# Cinématique du point

La cinématique est l'étude des mouvements, indépendamment des causes qui les produisent

Mécanique: chapitre 1

# 1. SYSTÈME DE COORDONNÉES

Pour repérer un point dans l'espace, on utilise un **système de coordonnées**

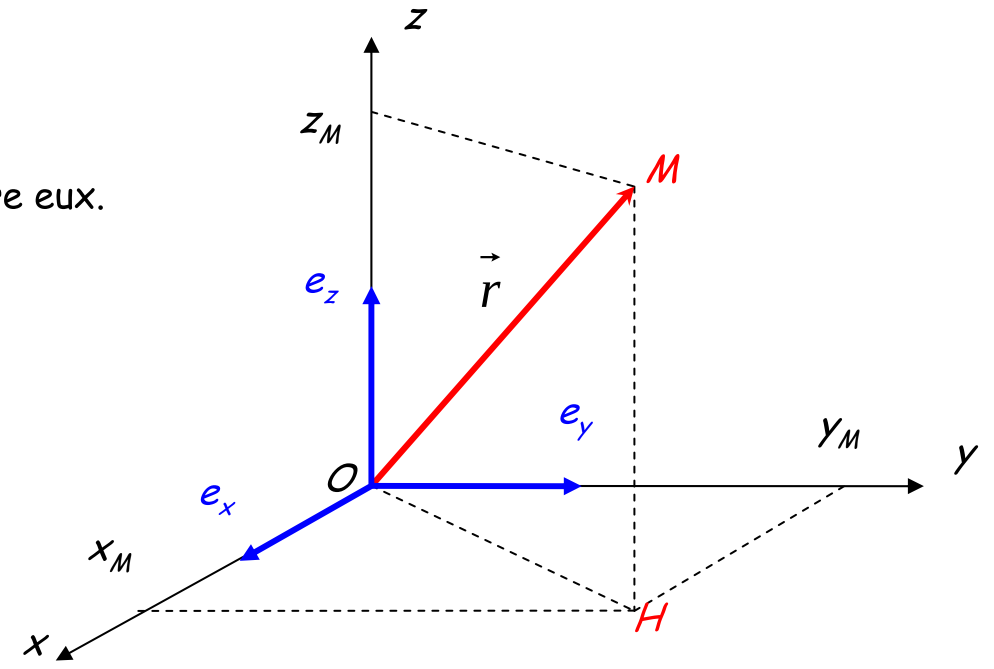
- les *coordonnées cartésiennes* (cas général),
- les *coordonnées cylindriques* (adaptées à la rotation autour d'un axe),
- les *coordonnées sphériques* (adaptées à la rotation autour d'un point).

## 1. Coordonnées cartésiennes

### 1. Définitions

*Repère cartésien*: défini par:

- un *point origine* $O$
- trois *axes* $Ox$, $Oy$, $Oz$ perpendiculaires entre eux.
- 3 *vecteurs unitaires* $\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \\ \vec{e}_y \end{array} \right.$




**S'ils ont même module**, le repère est dit *orthonormé*.

Disposition relative des axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ telle que **le trièdre soit direct**

Point $M$ repéré par les 3 *composantes* du vecteur joignant $O$ à $M$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{r} = \overrightarrow{OM} \\ \vec{r}(x_M, y_M, z_M) = x_M\vec{e}_x + y_M\vec{e}_y + z_M\vec{e}_z \end{array}}$$

On dit indistinctement qu'un objet se trouve au point $M$ ou en $\vec{r}$

Les composantes $x_M$ et $y_M$ sont celles de la projection du point $M$ sur le plan $xOy$, $H$.
La composante $z_M$ est obtenue en traçant la parallèle à $OH$ passant par $M$.

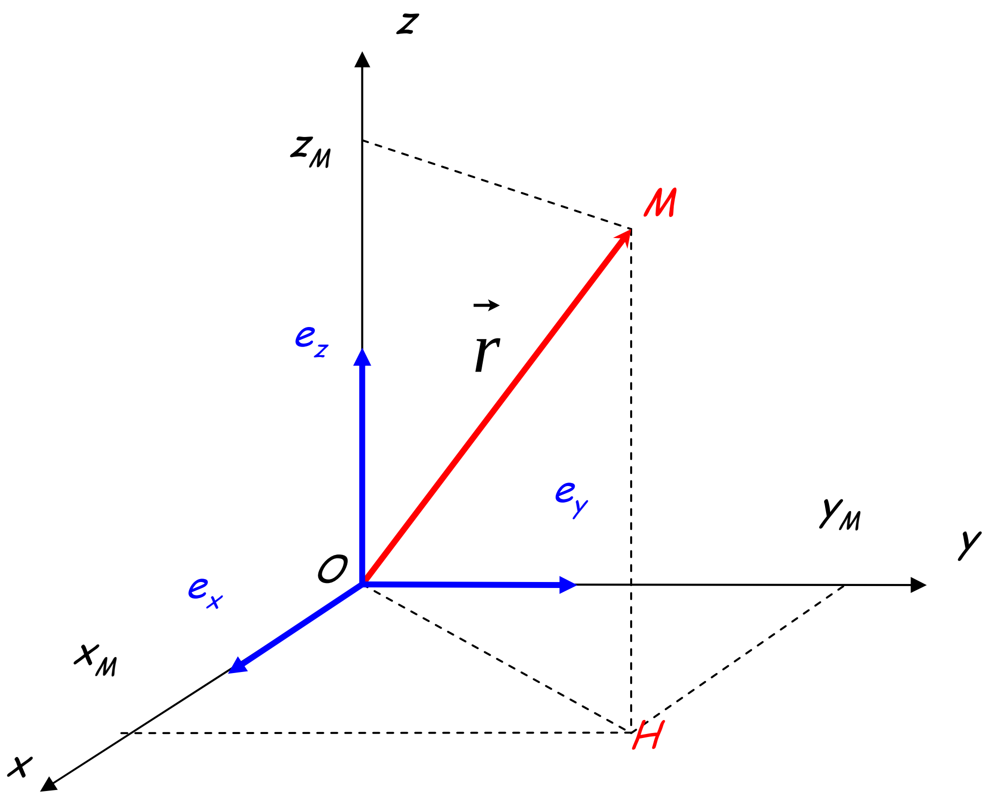
- ***abscisse***, $x$
- ***ordonnée***, $y$,
- ***côte***, $z$.

$\overrightarrow{OM}$ ***Vecteur position***

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{e_x} + y \cdot \overrightarrow{e_y} + z \cdot \overrightarrow{e_z}$$

Sous forme matricielle (matrice colonne)

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

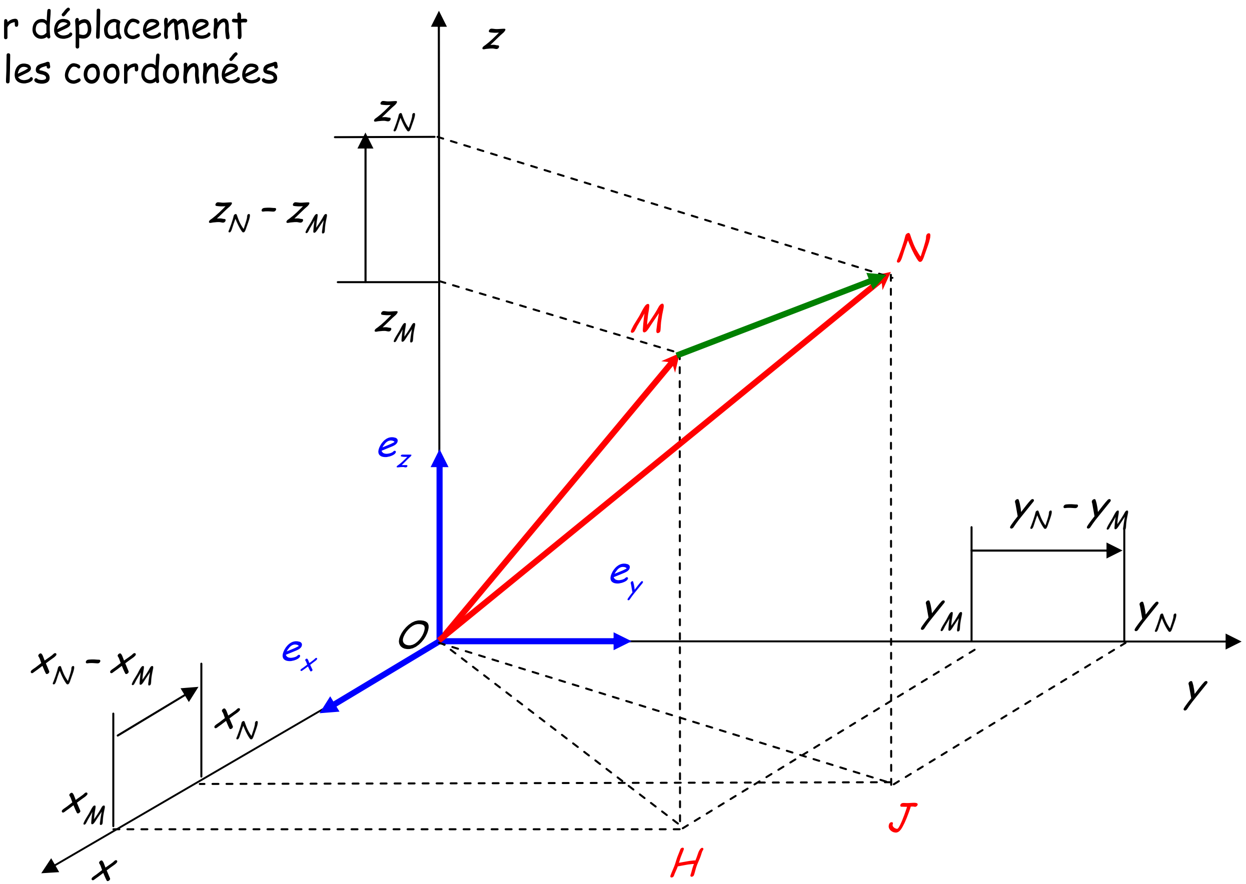


## 2. Déplacements

***Déplacement*** du point $M$ au point $N$: variation du vecteur position qui s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (x_N - x_M)\cdot\overrightarrow{e_x} + (y_N - y_M)\cdot\overrightarrow{e_y} + (z_N - z_M)\cdot\overrightarrow{e_z}}$$

Les composantes du vecteur déplacement sont les différences entre les coordonnées des points $M$ et $N$

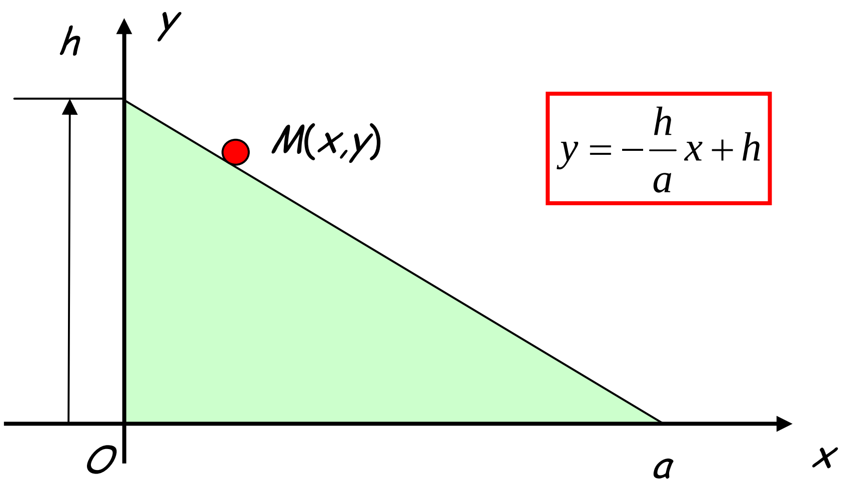


***Trajectoire*** : ensemble des positions occupées par le point *M* au cours du temps.

*<u>Exemple 1:</u>* bille roulant sur un plan incliné

***Equation de la trajectoire*** : relation liant les coordonnées indépendamment du temps.
En coordonnées cartésiennes, on note

$$\boxed{f(x, y, z) = 0}$$




$$\boxed{y = -\frac{h}{a}x + h}$$

***Equation horaire***: l'expression des coordonnées du point *M* au cours du temps

$$\boxed{\begin{cases} x = f_x(t) \\ y = f_y(t) \\ z = f_z(t) \end{cases}}$$

$$x = \frac{am}{2gh}t^2$$

$$y = -\frac{m}{2g}t^2 + h$$

***Mouvement plan***: deux coordonnées suffisent.
Généralement, on conserve les coordonnées *x* et *y*.

$$\boxed{\begin{cases} x = f_x(t) \\ y = f_y(t) \end{cases}}$$

***Mouvement rectiligne***: une seule coordonnée suffit.
Généralement, on conserve la coordonnée *x*.

$$\boxed{x = f_x(t)}$$

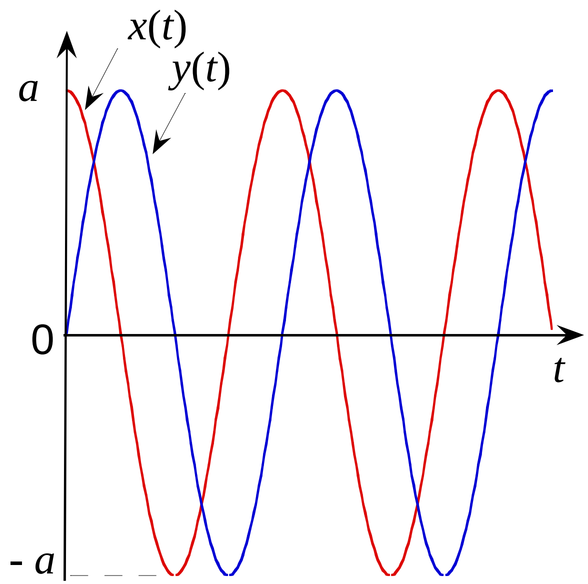
*Exemple:* soit les équations horaires:

$$x(t) = a\cos(\omega t)$$
$$y(t) = a\sin(\omega t)$$

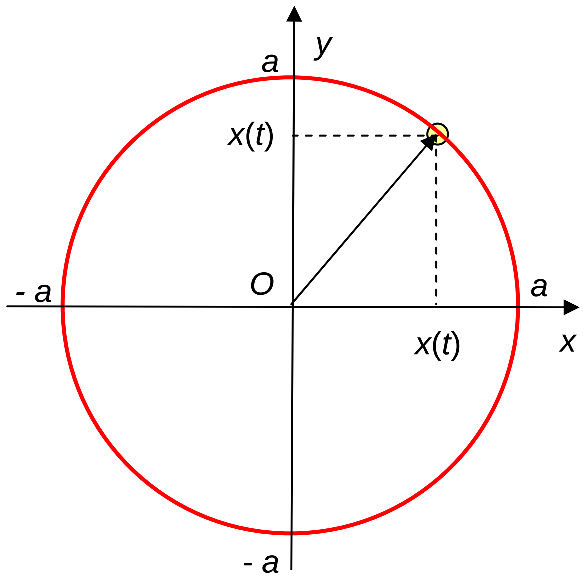
On peut éliminer le temps entre ces deux relations, ce qui fournit l'équation de la trajectoire:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

La trajectoire est un **cercle**



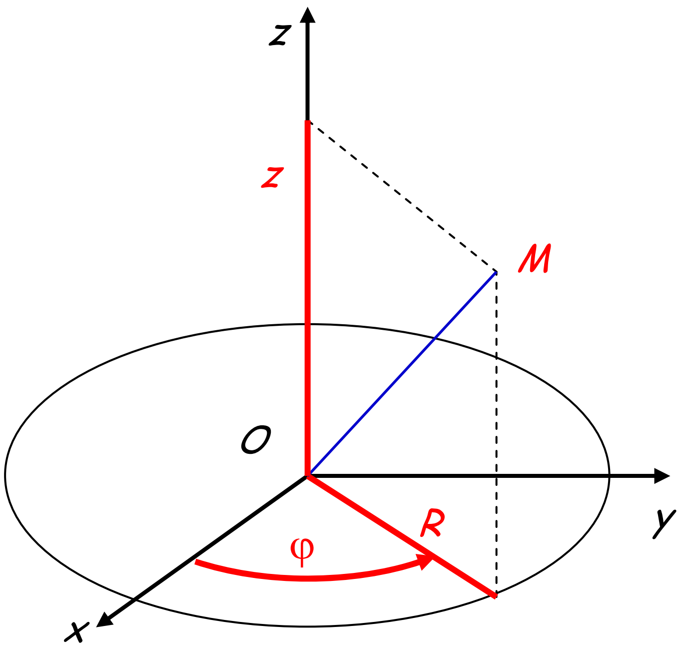

**Equations horaires**




**Trajectoire**

## 2. Les autres systèmes de coordonnées

### Coordonnées cylindriques



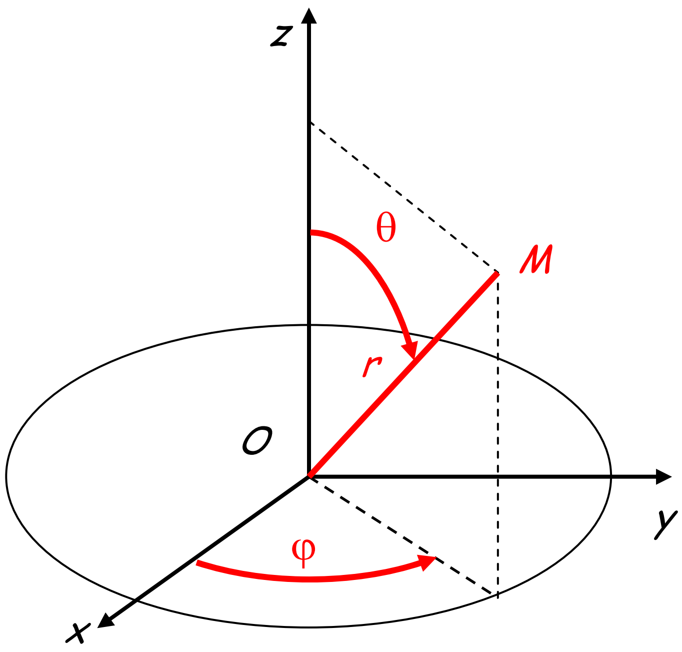

Un point *M* est repéré par:

a) le rayon *R*
b) l'angle φ
c) la côte z

Ce type de coordonnées est adapté aux systèmes à symétrie cylindrique

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z \end{cases}$$

### Coordonnées sphériques




Un point *M* est repéré par:

a) le rayon *r*
b) l'angle φ
c) l'angle θ

Ce type de coordonnées est adapté aux systèmes à symétrie sphérique

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

# 2. VITESSE D'UN POINT

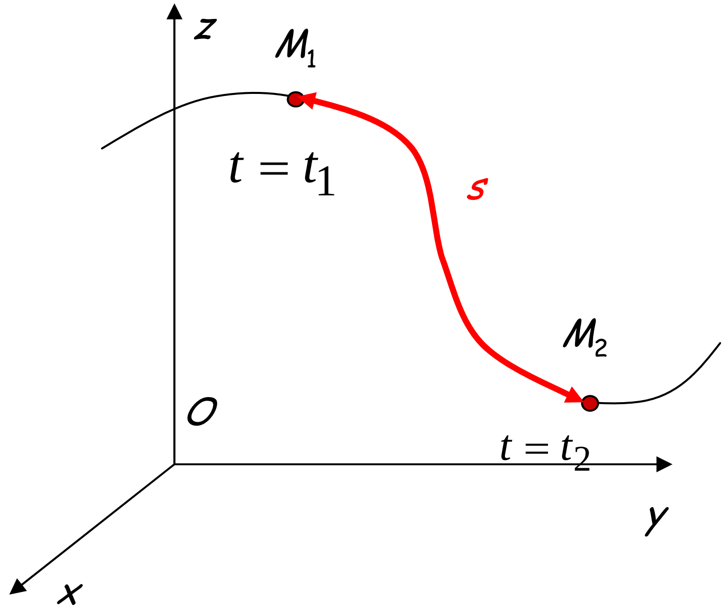
## 2.1 Définitions

*Vitesse scalaire moyenne:*

$$\boxed{\mathrm{v} = \frac{s}{t_2 - t_1}}$$

Distance parcourue le long de la trajectoire

Durée du parcours



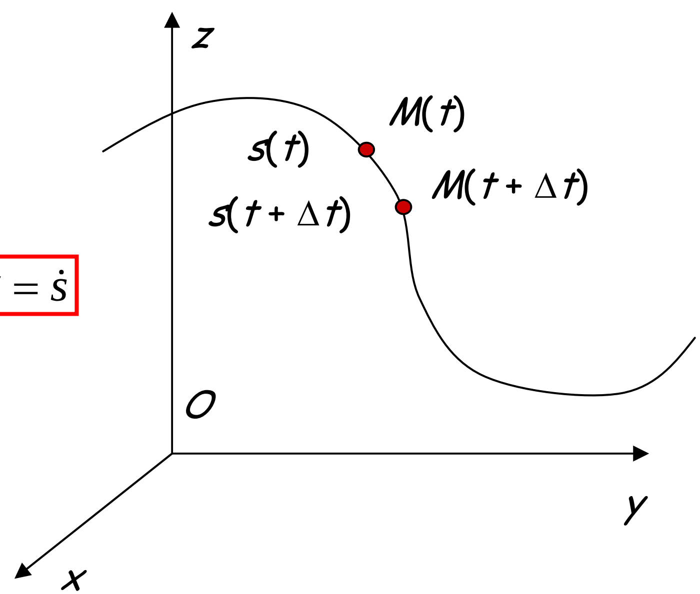

*Exemple:* parcours automobile entre 2 villes
$t_1$ heure de départ, $t_2$ heure d'arrivée
$s$ distance kilométrique parcourue

*Vitesse scalaire instantanée:* on fait tendre vers zéro l'intervalle de temps $t_2 - t_1$.
Soit $s(t)$ déplacement mesuré le long de la trajectoire à partir d'une origine quelconque, à l'instant $t$.
A un instant ultérieur voisin $t + \Delta t$, cette valeur passe à $s(t + \Delta t)$.
La vitesse scalaire instantanée est égale à

$$\mathrm{v} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

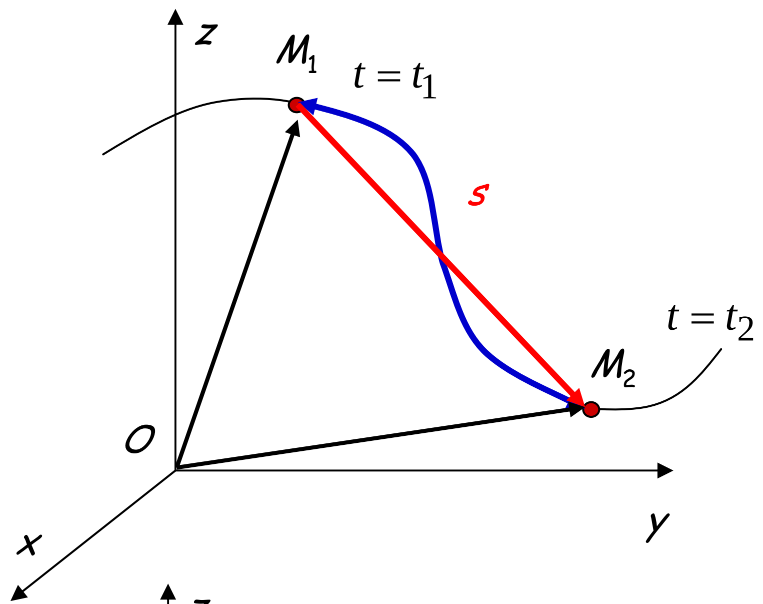
Si l'intervalle de temps $\Delta$t vers zéro,

$$\mathrm{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \qquad \mathrm{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \boxed{\mathrm{v} = \frac{ds}{dt}} \qquad \boxed{\mathrm{v} = \dot{s}}$$




*Remarque:* information sur le module de la vitesse ainsi que sur le sens de parcours le long de la trajectoire
Pas d'information sur la direction de la vitesse

Au lieu de repérer le point le long de la trajectoire, on repère le point par son vecteur position




### Vecteur vitesse moyenne :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{M_1M_2}} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}}$$

$$\overrightarrow{V_{M_1M_2}} = \begin{cases} \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \\ \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \\ \dfrac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

Information encore peu précise, que ce soit sur le module ou sur la direction

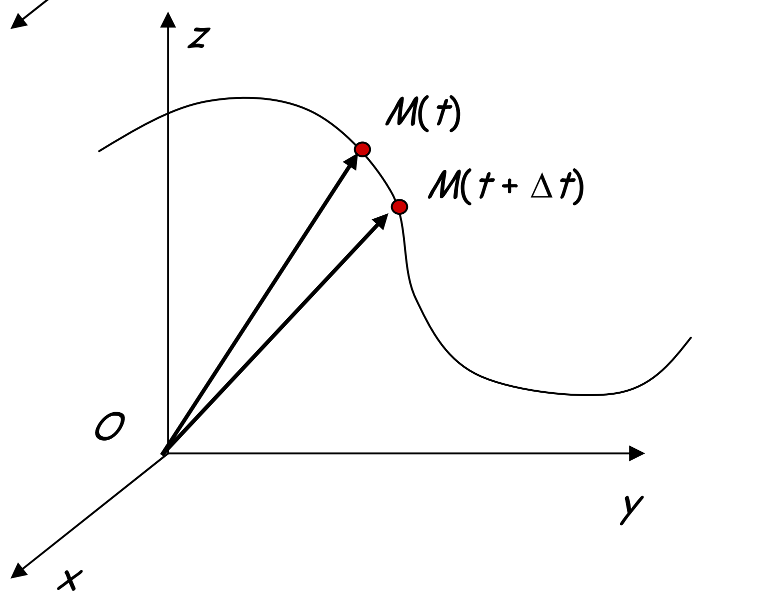
### Vecteur vitesse instantanée :

On fait tendre vers zéro l'intervalle de temps $t_2$ - $t_1$

$$\overrightarrow{V(M)} = \lim_{t_2 \to t_1} \overrightarrow{V_{M_1M_2}}$$

$$\overrightarrow{V(M)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{V(M)} = \begin{cases} \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \end{cases}$$

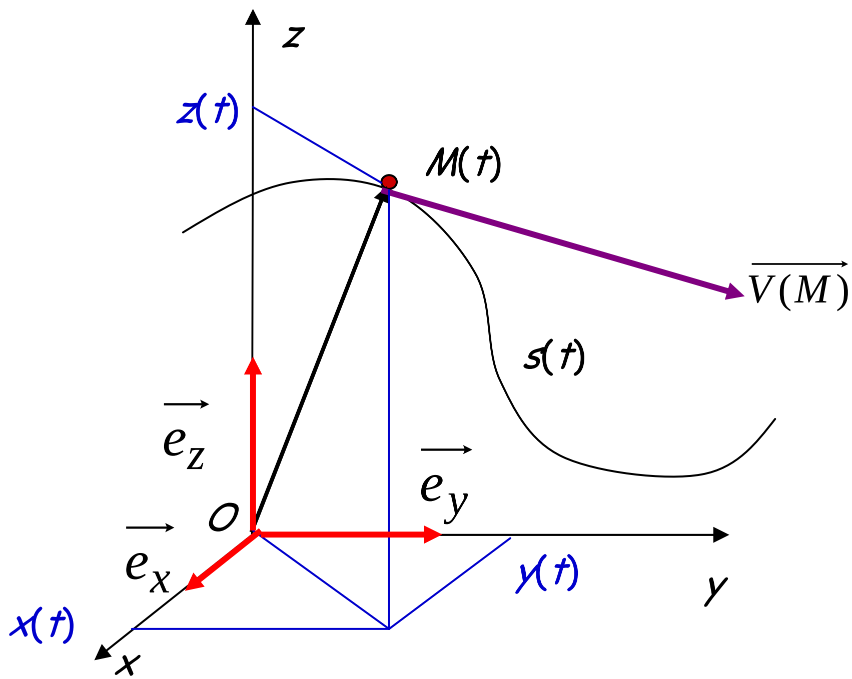


On reconnaît la définition des dérivées des coordonnées par rapport au temps

$$\boxed{\overrightarrow{V(M)} = \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{cases}}$$

Les composantes du vecteur vitesse instantanée sont les dérivées par rapport au temps des composantes du vecteur position (dérivées des équations du mouvement)

L'unité légale de la vitesse est le mètre par seconde ($m.s^{-1}$)




Sous forme vectorielle,
en introduisant les vecteurs de base

$$\overrightarrow{V(M)} = \frac{dx}{dt} \cdot \overrightarrow{e_x} + \frac{dy}{dt} \cdot \overrightarrow{e_y} + \frac{dz}{dt} \cdot \overrightarrow{e_z}$$
$$= \dot{x} \cdot \overrightarrow{e_x} + \dot{y} \cdot \overrightarrow{e_y} + \dot{z} \cdot \overrightarrow{e_z}$$

Sous forme matricielle

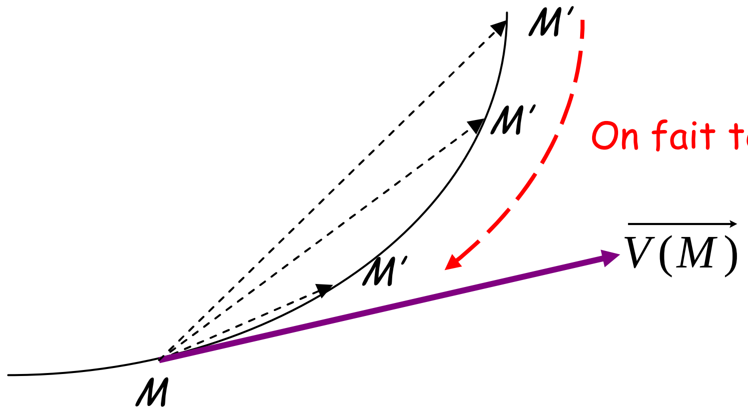
$$\overrightarrow{V(M)} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Comme pour tout vecteur, la norme de la vitesse correspond à la racine carrée de la somme des composantes de ce vecteur

$$\boxed{V(M) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

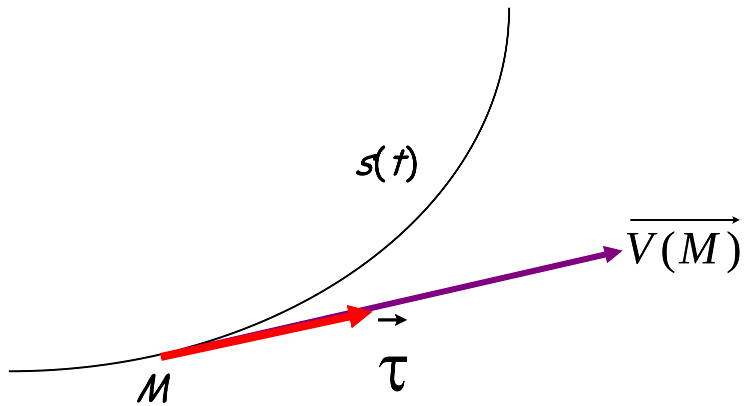
**A tout instant, le vecteur vitesse instantanée est tangent à la trajectoire**

$$\overrightarrow{V(M)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{arcMM'}{\Delta t}$$




On fait tendre *M'* vers *M*

Le sens du vecteur vitesse est celui du mouvement.



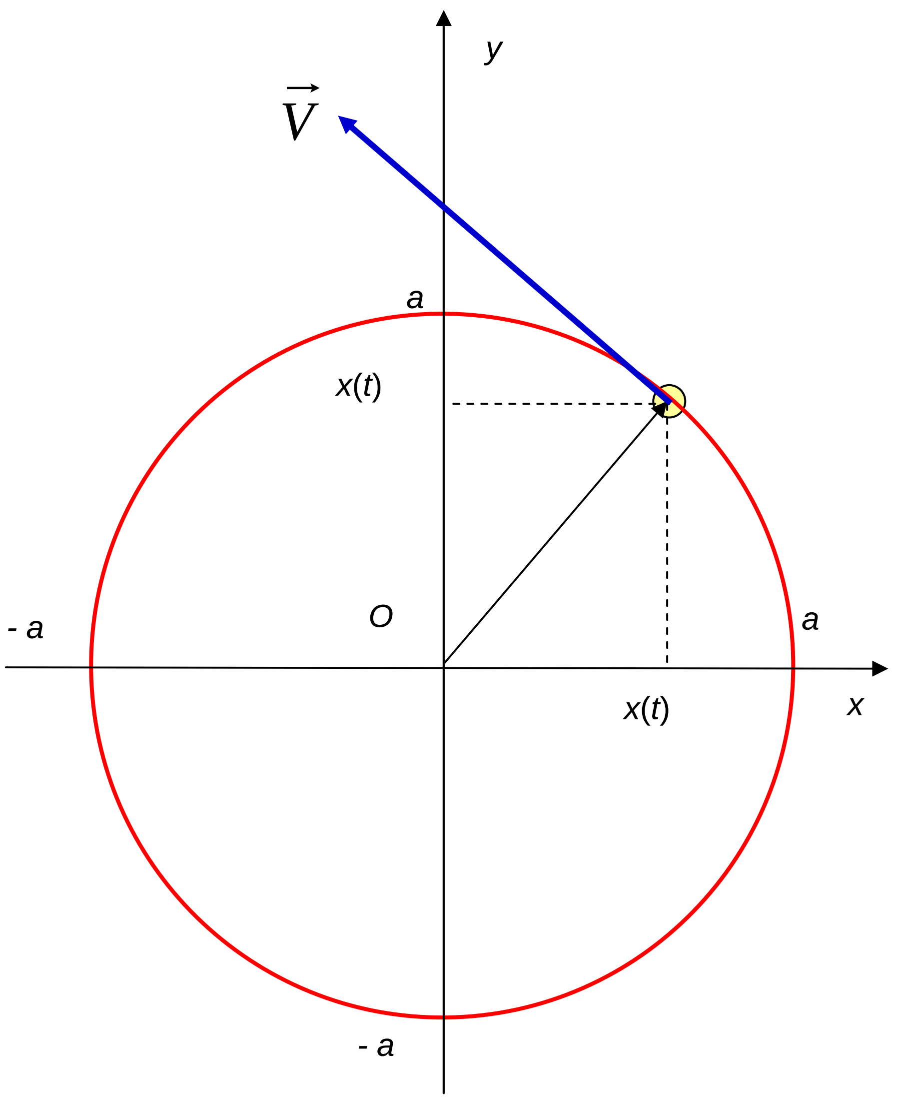

$\vec{\tau}$ vecteur unitaire tangent à la trajectoire.

*s* abscisse curviligne le long de la trajectoire.

$$\boxed{\overrightarrow{V(M)} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau}}$$

$$x(t) = a\cos(\omega t)$$
$$y(t) = a\sin(\omega t)$$

$$V_x(t) = \frac{d(a\cos\omega t)}{dt} = a\frac{d(\cos\omega t)}{dt} = -a\omega\sin(\omega t)$$
$$V_y(t) = \frac{d(a\sin\omega t)}{dt} = a\frac{d(\sin\omega t)}{dt} = a\omega\sin(\omega t)$$



## 2.2 Mouvement de rotation autour d'un axe:

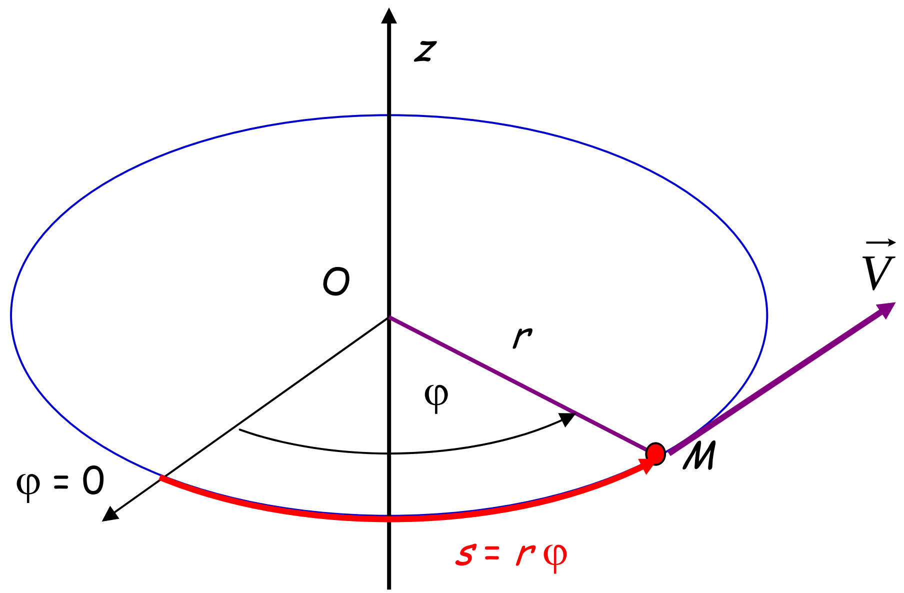
Soit un point *M* en rotation autour d'un axe *Oz*.

$r$ : rayon

$\varphi$: angle de rotation (radians), repéré par rapport à une origine quelconque

Longueur parcourue sur le cercle depuis l'origine (abscisse curviligne)

$$\boxed{s = r\varphi}$$




Vitesse sur le cercle

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt}$$

Le rayon est constant: $V = r\dfrac{d\varphi}{dt}$

### *Vitesse angulaire de rotation*

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}}$$

Exprimée en radians par seconde (rad/s)
On utilise aussi: tours/s, tours/mn

Vitesse le long de la trajectoire (m/s) $\longrightarrow$ $\boxed{V = r\omega}$ $\longleftarrow$ Vitesse angulaire (rad/s)

Rayon (m)

*Exemple: vitesse angulaire d'une roue de voiture*
Une automobile roule à la vitesse constante de 120 km/h. Ses roues ont un rayon de 30 cm.
Calculer leur vitesse angulaire.

Vitesse d'un point du pneu en contact avec la route est $V = 120\ \mathrm{km/h}$, soit: $V = \dfrac{1{,}2 \cdot 10^5}{3600}$ $V = 33{,}333\ \mathrm{m.s^{-1}}$

$\omega = \dfrac{V}{R}$ $\omega = \dfrac{33{,}333}{0{,}3}$ $\boxed{\omega = 111{,}111\ \mathrm{rad.s^{-1}}}$

En tours/seconde: $\omega = \dfrac{111{,}111}{2\pi}$ $\boxed{\omega = 17{,}68\ \mathrm{tr.s^{-1}}}$

### *Vecteur vitesse angulaire de rotation*

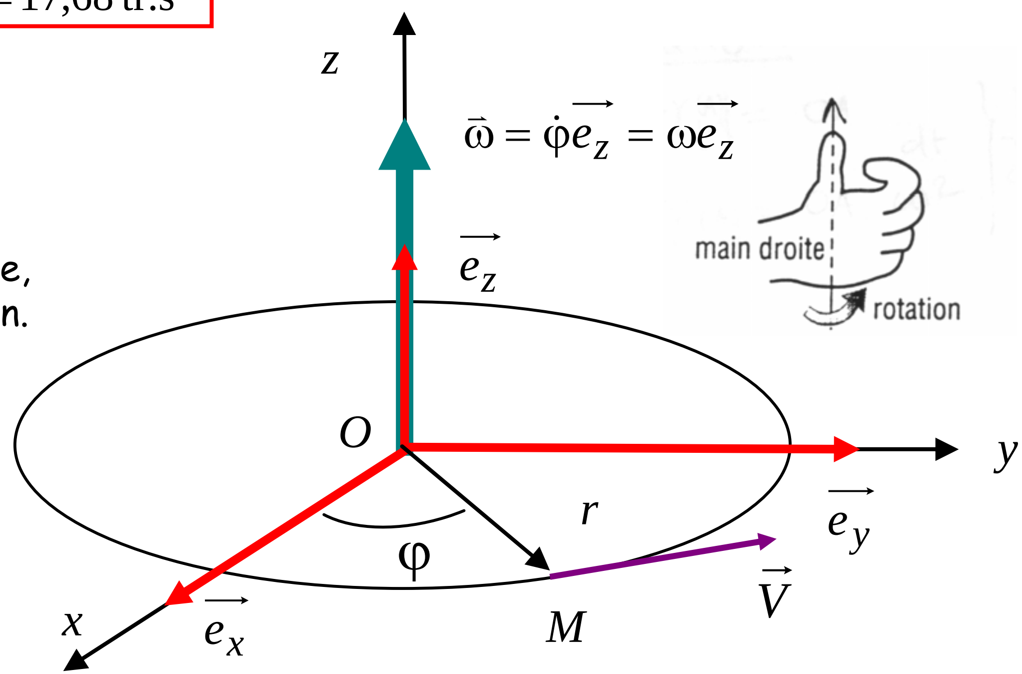
- Porté par l'axe de rotation,
- Sens déterminé par la règle de la main droite,
- Module égal à la vitesse angulaire de rotation.

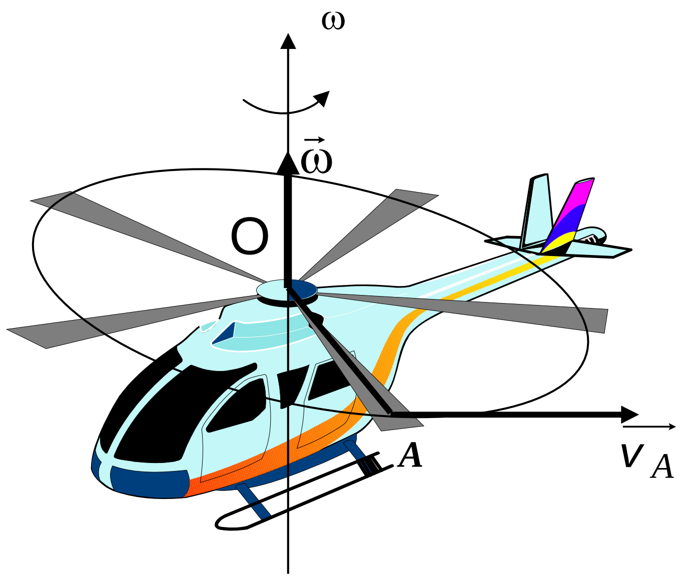
Sous forme vectorielle:

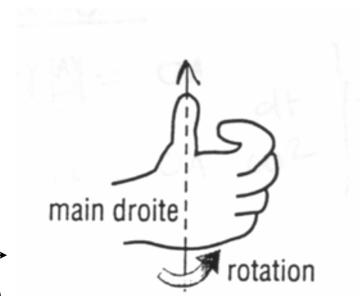
$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{e_z} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z} = \omega\overrightarrow{e_z}}$$

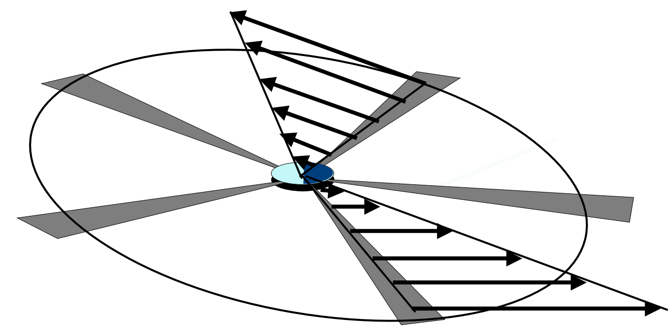
D'après la définition du produit vectoriel

$$\boxed{\overrightarrow{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$$





$$\boxed{\overrightarrow{v_A} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}}$$

Remarque : la relation $\overrightarrow{v_A} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$

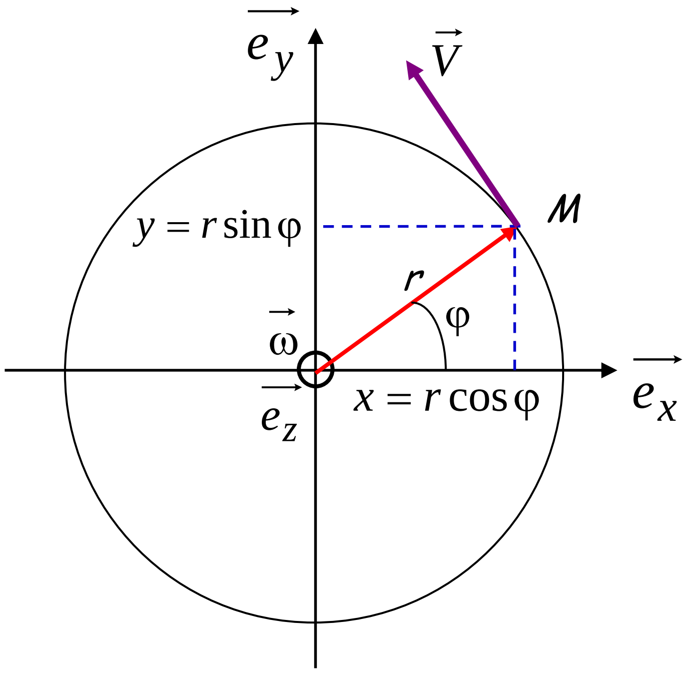
est valable ***quel que soit le point O de l'axe de rotation***.

*Distribution des vitesses dans le solide :*

chaque point du solide est soumis à une vitesse dont le module est proportionnel à la distance à l'axe de rotation

En coordonnées cartésiennes, le rayon *r* étant constant:

$$\vec{\omega}\begin{cases}0\\0\\\dot{\varphi}=\omega\end{cases}\qquad \overrightarrow{OM}\begin{cases}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\\0\end{cases}$$




*Rappel: produit vectoriel*

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A}(A_x, A_y A_z)\\ \\ \vec{B}(B_x, B_y B_z)\end{array}\right\}\quad \vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{cases}A_yB_z - A_zB_y\\A_zB_x - A_xB_z\\A_xB_y - A_yB_x\end{cases}$$

$$\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}=\begin{cases}-\dot{\varphi}r\sin\varphi\\\dot{\varphi}r\cos\varphi\\0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{d(r\cos\varphi)}{dt}\\\dfrac{d(r\sin\varphi)}{dt}\\0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}\\\dfrac{dy}{dt}\\0\end{cases}=\begin{cases}\dot{x}\\\dot{y}=\vec{V}\\0\end{cases}$$

## 3. ACCÉLÉRATION D'UN POINT

### 3.1 Accélération scalaire moyenne

ON SE LIMITE AU CAS DE TRAJECTOIRES RECTILIGNES

*Exemple 1:*

Une voiture qui roulait à 108 km/h s'arrête en 7,5 secondes. La trajectoire est supposée rectiligne.

$t = 0$, $V = 108$ km/h

$t = 7{,}5$ s, $V = 0$ km/h

A l'instant $t_0 = 0$ la vitesse est égale à $V(t_0) = 108\ \mathrm{km/h}$ , soit en m/s: $V(t_0) = \dfrac{108 \times 10^3}{3600}$ $\quad V(t_0) = 30\ \mathrm{m.s^{-1}}$

A l'instant $t_1$ la vitesse est nulle $\quad V(t_1) = 0\ \mathrm{m.s^{-1}}$

On peut définir une ***accélération scalaire moyenne*** :

$$\boxed{\gamma_{t_0 t_1} = \frac{V(t_1) - V(t_0)}{t_1 - t_0}}$$

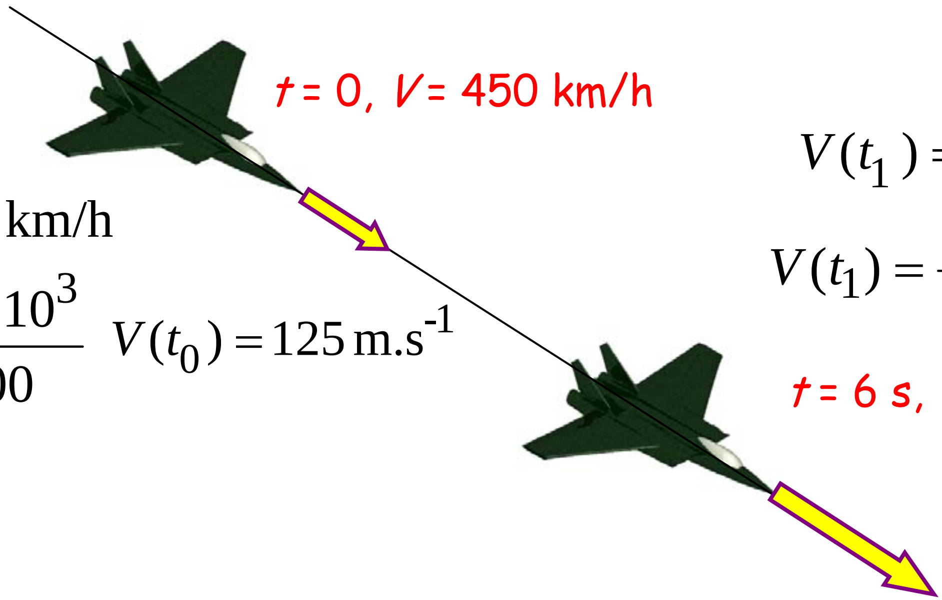
Unité: $\mathrm{m.s^{-2}}$

*Application numérique:* $\gamma = \dfrac{0 - 30}{7{,}5 - 0}$ $\quad \boxed{\gamma = -4\ \mathrm{m.s^{-2}}}$ Accélération négative = décélération

*Remarque:* $\gamma \cong \dfrac{g}{2}$ $\qquad g$ accélération de la pesanteur ($9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$)

*Exemple 2:*

Un avion amorce un piqué à 450 km/h. Après 6 secondes, la vitesse a atteint 900 km/h




$$V(t_0) = 450 \text{ km/h}$$

$$V(t_0) = \frac{450 \times 10^3}{3600} \qquad V(t_0) = 125 \,\text{m.s}^{-1}$$

$$V(t_1) = 900 \text{ km/h}$$

$$V(t_1) = \frac{900 \times 10^3}{3600} \qquad V(t_1) = 250 \,\text{m.s}^{-1}$$

**accélération scalaire moyenne** : $\boxed{\gamma_{t_0 t_1} = \dfrac{V(t_1) - V(t_0)}{t_1 - t_0}}$

*Application numérique:* $\gamma = \dfrac{250 - 125}{6 - 0} = 20{,}83$ $\qquad \boxed{\gamma = 20{,}83 \,\text{m.s}^{-2}}$ $\qquad \gamma \cong 2g$

*Remarque 1:*

Cette définition n'est qu'une valeur moyenne
L'accélération n'est pas nécessairement constante au cours du déplacement
On définit une ***accélération instantanée***

$$\boxed{\gamma(t) = \frac{dV}{dt}}$$

Relations de passage:

| Trajectoire | | Vitesse | | Accélération |
|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | **Dérivée** → | $V(t) = \frac{dx}{dt}$ | **Dérivée** → | $\gamma(t) = \frac{dV}{dt}$ <br> $\gamma(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$ |

**La vitesse est la dérivée première de la trajectoire**
**L'accélération est la dérivée première de la vitesse, donc la dérivée seconde de la trajectoire**

*Remarque 2:*

Quand on résout un problème de dynamique (mouvement d'un solide sous l'action de forces), on utilise ces relations en sens inverse (intégration):

**La vitesse est la primitive de l'accélération**
**La trajectoire est la primitive de la vitesse**

*Remarque 1:*

Cette définition n'est qu'une valeur moyenne
L'accélération n'est pas nécessairement constante au cours du déplacement
On définit une ***accélération instantanée***

$$\boxed{\gamma(t) = \frac{dV}{dt}}$$

Relations de passage:

Trajectoire

$x(t)$

**Dérivée** →

← **Intégrale**

Vitesse

$$V(t) = \frac{dx}{dt}$$

**Dérivée** →

← **Intégrale**

Accélération

$$\gamma(t) = \frac{dV}{dt}$$

$$\gamma(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

**La vitesse est la dérivée première de la trajectoire**
**L'accélération est la dérivée première de la vitesse, donc la dérivée seconde de la trajectoire**

*Remarque 2:*

Quand on résout un problème de dynamique (mouvement d'un solide sous l'action de forces), on utilise ces relations en sens inverse (intégration):

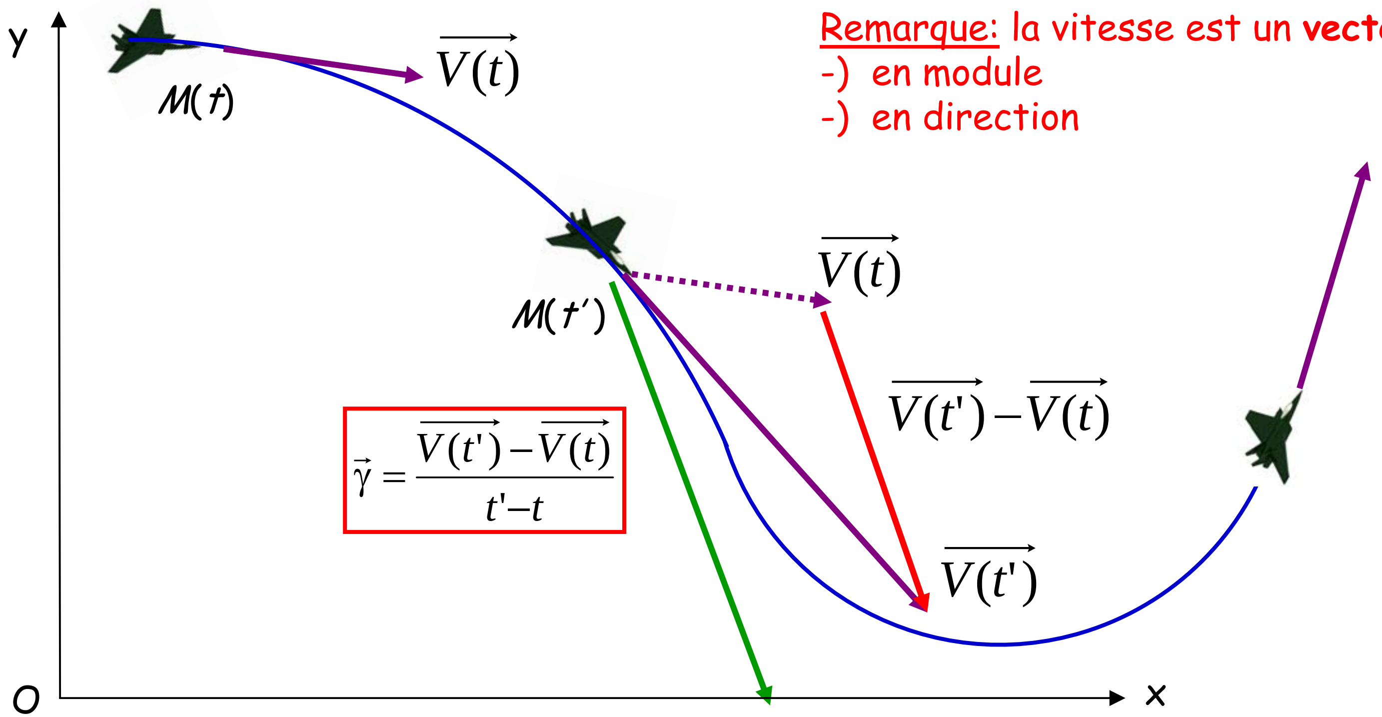
**La vitesse est la primitive de l'accélération**
**La trajectoire est la primitive de la vitesse**

*Remarque 3:*
A partir de l'instant $t_1$ le pilote redresse l'appareil: la trajectoire n'est plus rectiligne
Que devient l'accélération ?.

### 3.3 Expressions vectorielles et cartésiennes de l'accélération:

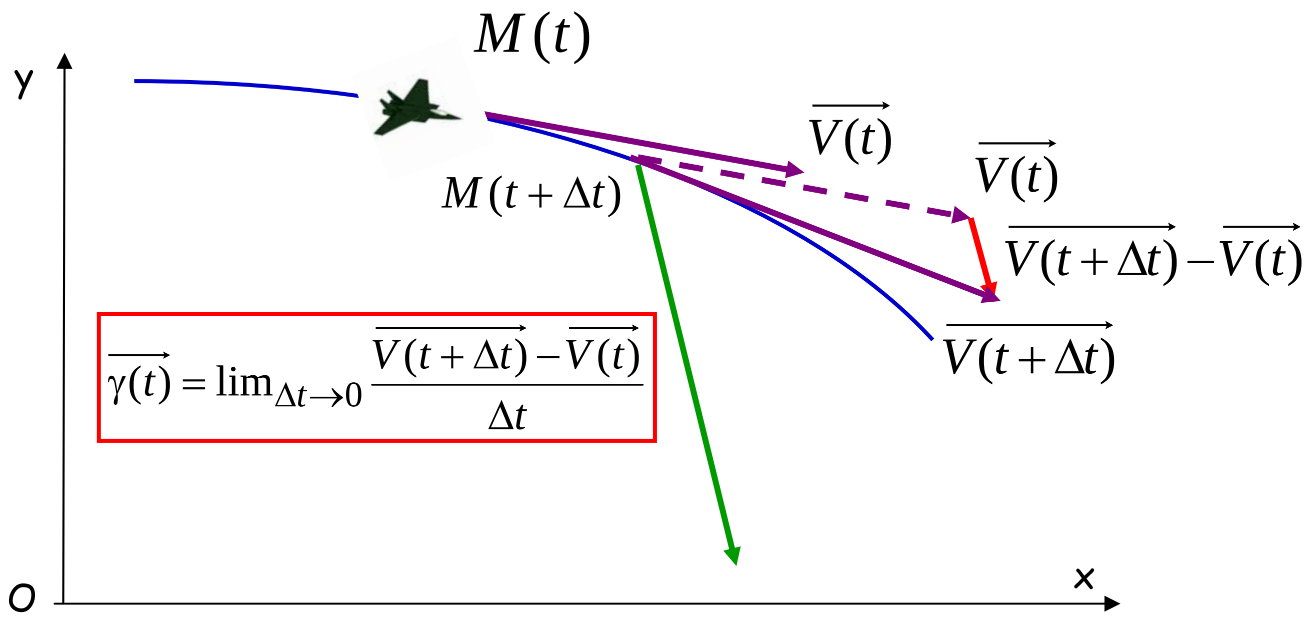
Comme pour la vitesse on peut définir les ***vecteurs accélération moyenne*** et ***accélération instantanée.***

Le ***vecteur accélération moyenne*** est obtenu entre deux vecteurs vitesse à des instants $t$ et $t'$.




Remarque: la vitesse est un **vecteur** qui varie à la fois
-) en module
-) en direction

*Vecteur accélération instantanée:* on fait tendre l'intervalle de temps vers zéro




$$\boxed{\overrightarrow{\gamma(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{V(t+\Delta t)}-\overrightarrow{V(t)}}{\Delta t}}$$

*Vecteur accélération instantanée:* dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps

$$\boxed{\vec{\gamma}(t) = \frac{d\overrightarrow{V(t)}}{dt}}$$

Or $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ ⇨ $\vec{\gamma}(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}\right)$ $\boxed{\vec{\gamma}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{V(t)}}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$

L'accélération instantanée est la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps

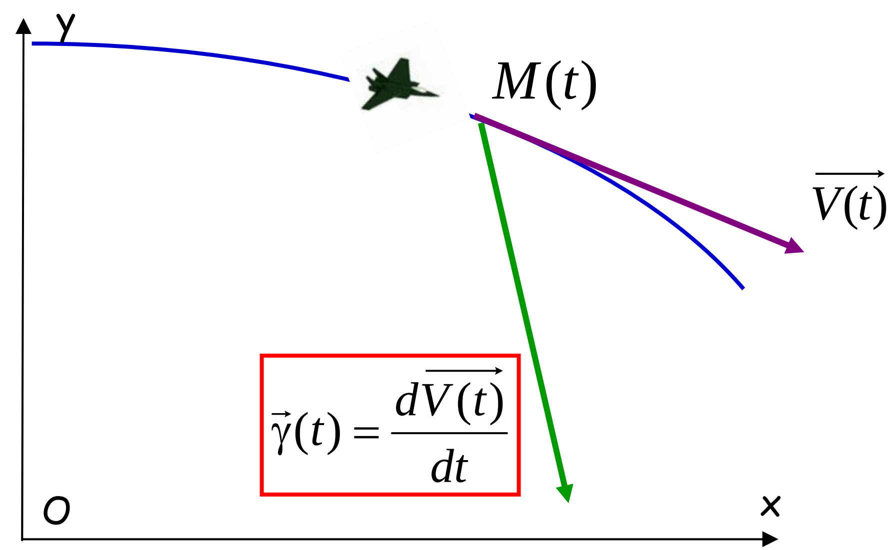
Composantes:

$$\begin{cases}\gamma_x = \dfrac{dV_x}{dt} \\ \gamma_y = \dfrac{dV_y}{dt} \\ \gamma_z = \dfrac{dV_z}{dt}\end{cases} \qquad \begin{cases}\gamma_x = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) \\ \gamma_y = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) \\ \gamma_z = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dz}{dt}\right)\end{cases} \qquad \begin{cases}\gamma_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \gamma_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ \gamma_z = \dfrac{d^2z}{dt^2}\end{cases} \qquad \begin{cases}\gamma_x = \ddot{x} \\ \gamma_y = \ddot{y} \\ \gamma_z = \ddot{z}\end{cases}$$

<u>Remarque:</u> la vitesse est un **vecteur** qui varie à la fois
- -) en **module**
- -) en **direction**

La vitesse est un vecteur **tangent à la trajectoire**

L'accélération est un vecteur qui varie à la fois
- -) en **module**
- -) en **direction**




$$\boxed{\vec{\gamma}(t) = \frac{d\overrightarrow{V(t)}}{dt}}$$

A QUOI CORRESPOND L'ORIENTATION DE L'ACCELERATION PAR RAPPORT A LA TRAJECTOIRE ?

## 3..4 Rotation autour d'un axe; Accélération angulaire :

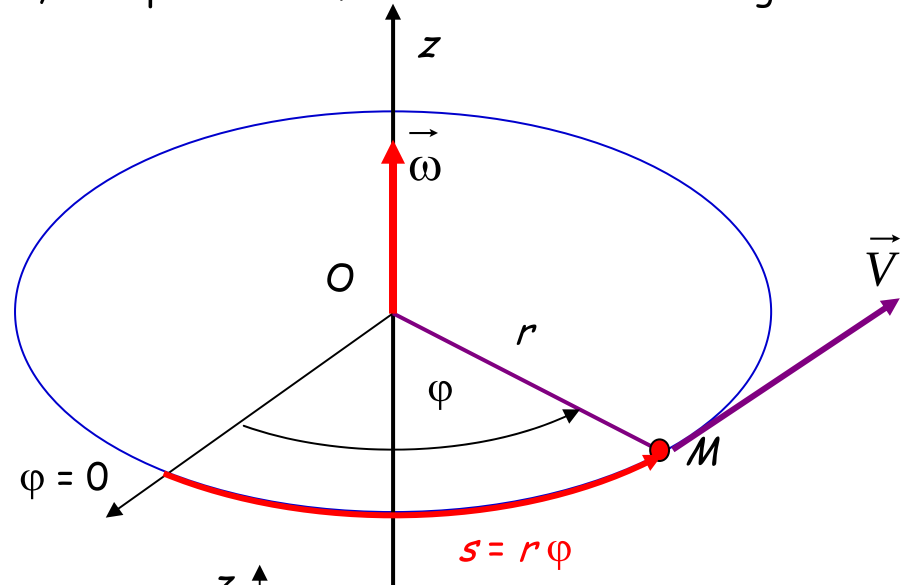
De même que nous avons défini une vitesse angulaire, nous pouvons définir une accélération angulaire:

Soit un point *M* en rotation autour d'un axe *Oz* .

$r$ : rayon (constant)

$\varphi$: angle de rotation (radians)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$ Vitesse angulaire




### *Accélération angulaire:*

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}} \qquad \boxed{\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}}$$

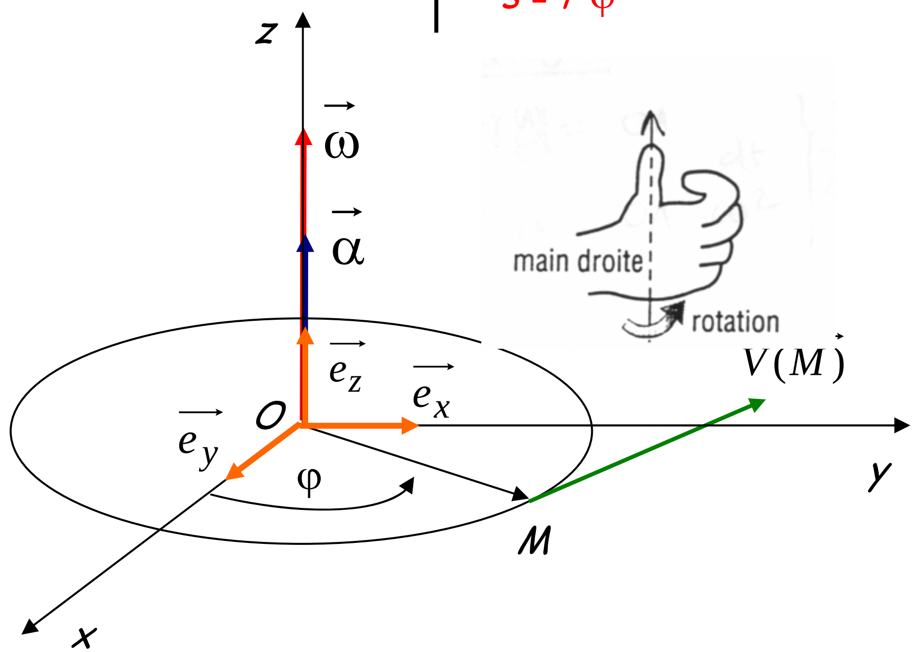
Unité: rad/s²

### *Vecteur accélération angulaire*

-) Porté par l'axe de rotation

-) Module égal à l'accélération angulaire, $\alpha$

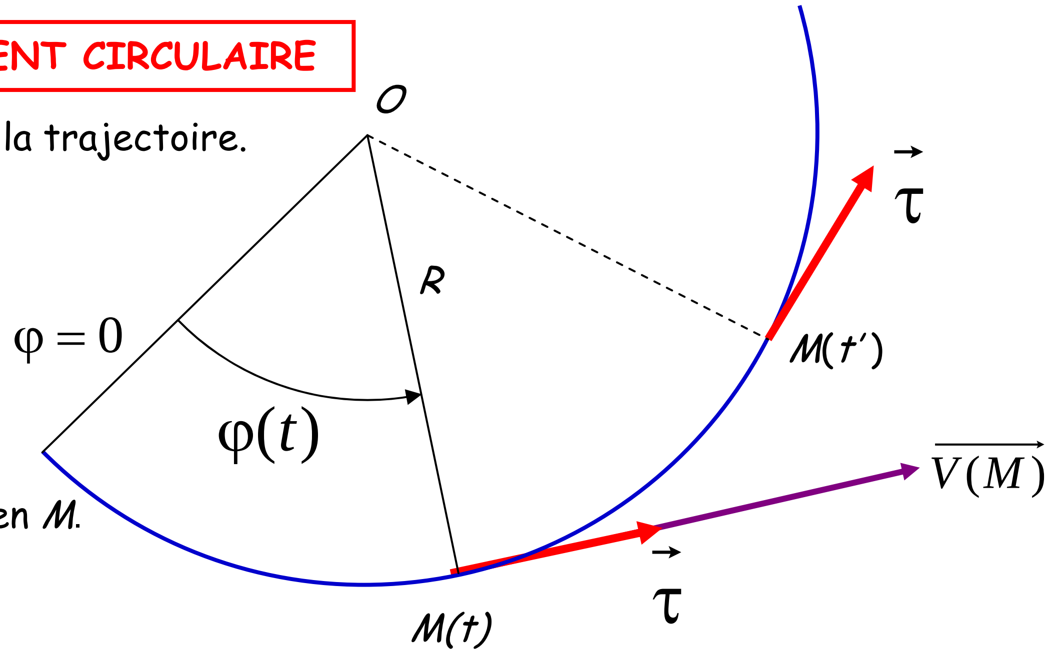
-) Sens: règle de la main droite




$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\alpha} &= \frac{d\omega}{dt}\overrightarrow{e_z} = \dot{\omega}\cdot\overrightarrow{e_z} \\ &= \frac{d^2\varphi}{dt^2}\overrightarrow{e_z} = \ddot{\varphi}\cdot\overrightarrow{e_z}\end{aligned}}$$

### 3.5 Accélération tangentielle; accélération normale

**ON SE LIMITE AU CAS DU MOUVEMENT CIRCULAIRE**




A tout instant, la vitesse est tangente à la trajectoire.

$\omega$ vitesse angulaire (rad/s),

$R$ rayon de la trajectoire, constant (m)

$$\boxed{V = R\omega = R\frac{d\varphi}{dt} = R\dot{\varphi}}$$

$\vec{\tau}$ vecteur unitaire, tangent au cercle, en $M$.

$$\boxed{\vec{V} = R\cdot\omega\cdot\vec{\tau}}$$

$$\overrightarrow{\gamma(t)} = \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad \overrightarrow{\gamma(t)} = \frac{d(R\omega\vec{\tau})}{dt} = R\frac{d(\omega\vec{\tau})}{dt}$$

$\omega$ varie au cours du temps (la vitesse angulaire augmente ou ralentit)

$\vec{\tau}$ varie aussi au cours du temps: son module reste constamment égal à 1, mais sa ***direction varie*** le long de la trajectoire, avec le déplacement du point $M$.

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma(t)} = R\frac{d\omega}{dt}\vec{\tau} + R\omega\frac{d\vec{\tau}}{dt}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma(t)} = R\frac{d\omega}{dt}\vec{\tau} + R\omega\frac{d\vec{\tau}}{dt}}$$

On démontre que $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$ est un vecteur perpendiculaire au vecteur $\vec{\tau}$ donc dirigé suivant le rayon

Finalement on montre que l'accélération se décompose en deux parties

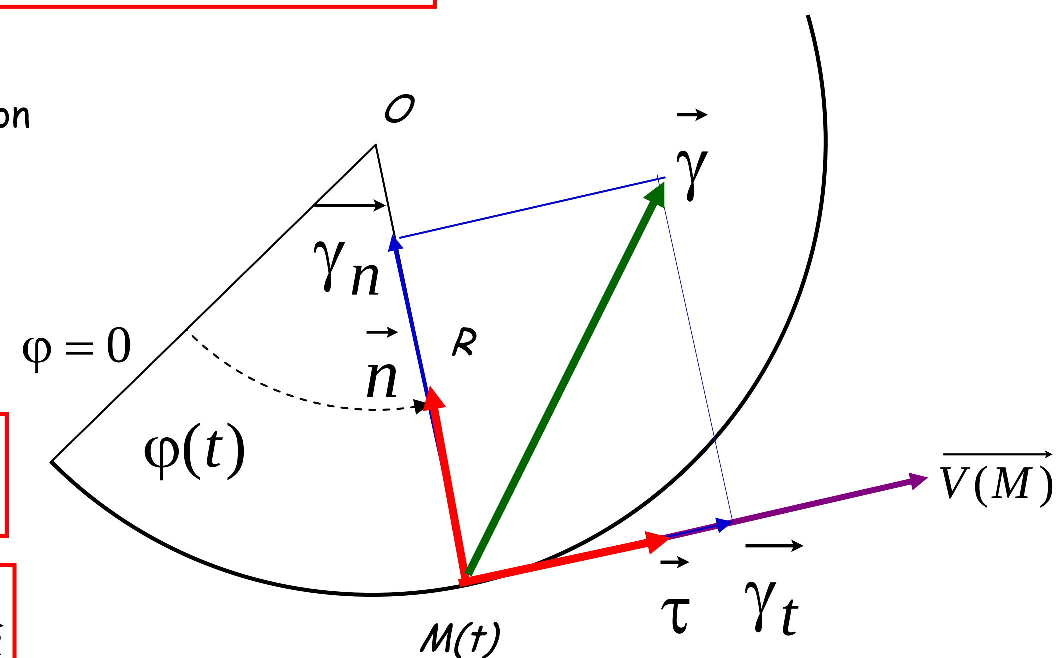
$$\boxed{\overrightarrow{\gamma(t)} = \frac{dV}{dt}\cdot\vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\cdot\vec{n}} \Longleftrightarrow \boxed{\overrightarrow{\gamma(t)} = R\frac{d\omega}{dt}\cdot\vec{\tau} + R\omega^2\cdot\vec{n}}$$

$\vec{n}$ et $\vec{\tau}$ unitaires

Accélération tangentielle

Accélération normale

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma(t)} = \overrightarrow{\gamma_t} + \overrightarrow{\gamma_n}}$$




Variation du module de la vitesse

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma_t} = \frac{dV}{dt}\cdot\vec{\tau}}$$

Variation de la direction de la vitesse

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma_n} = \frac{V^2}{R}\cdot\vec{n}}$$

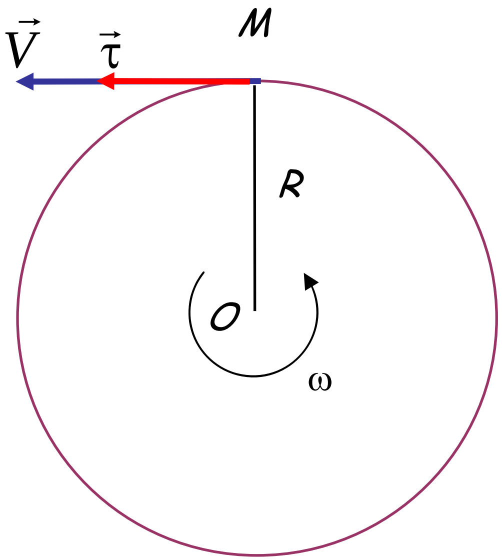
### 3.6 Mouvement circulaire uniforme:

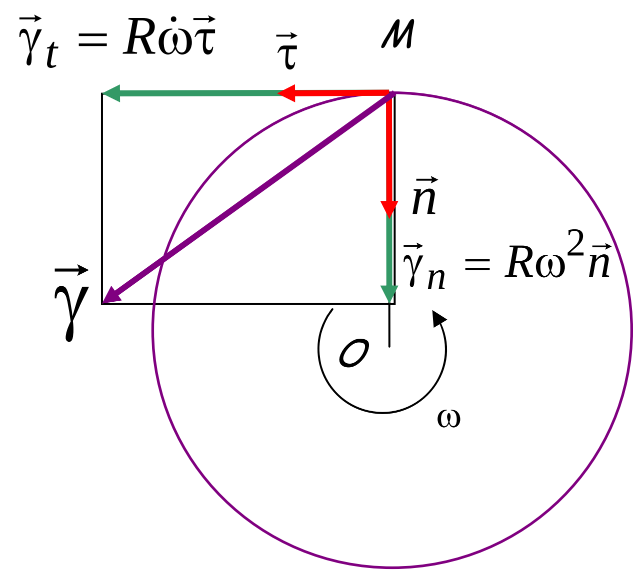
*Le module de la vitesse est constant,*

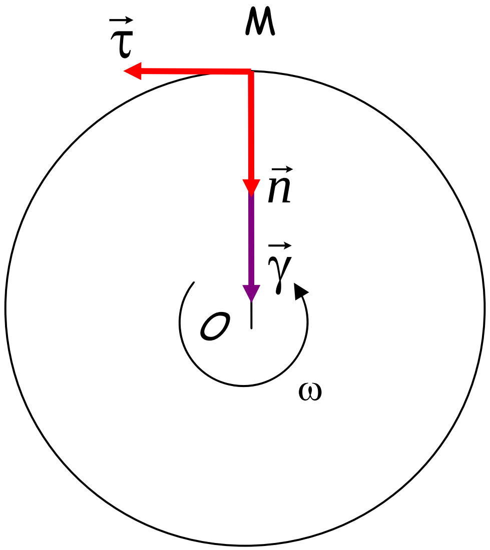
Seule subsiste la composante normale de l'accélération.

$$\left|\vec{V}\right| = V = \text{Constante} \qquad \omega = \text{constante}$$

$$\frac{dV}{dt} = 0 \qquad \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = 0$$




**Vitesse**

$$\vec{V} = \omega R\vec{\tau}$$

**Accélération**

$$\vec{\gamma} = R\omega^2\vec{n} + R\dot{\omega}\vec{\tau}$$

**Mouvement uniforme**

$$\vec{\gamma} = R\omega^2\vec{n}$$