# Dynamique du solide

Mécanique: chapitre 3

# 1. LE TORSEUR CINÉTIQUE

Le ***torseur cinétique*** correspond à deux grandeurs,

- la ***quantité de mouvement***
- le ***moment cinétique***

## 1.1 La quantité de mouvement

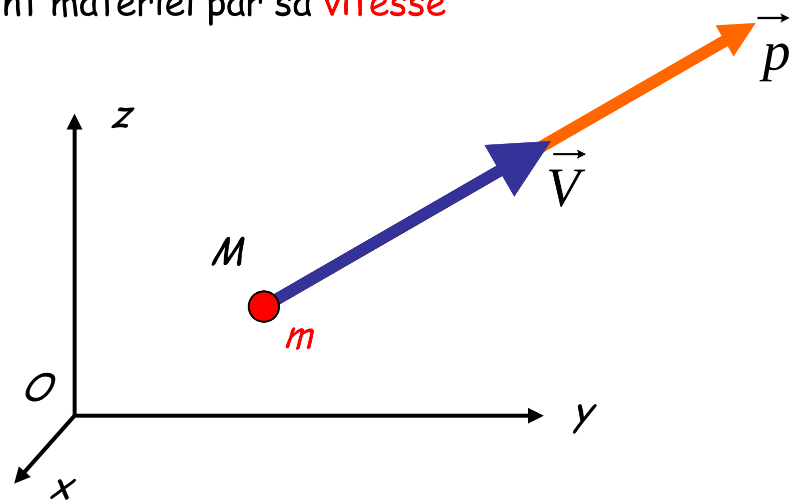
### *1.1.1 Quantité de mouvement d'un point matériel (solide ponctuel)*

C'est le produit de la masse du point matériel par sa vitesse

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{V}}$$

$$\boxed{\begin{cases} p_x = m \cdot V_x \\ p_y = m \cdot V_y \\ p_z = m \cdot V_z \end{cases}}$$

Unité: kg.m.s$^{-1}$



## 1.1.2 Cas général d'un ensemble de N points

*Exemple:* $N$ points, $A_1$, $A_2$,……. $A_N$

Masses $m_1, m_2, \ldots m_N$

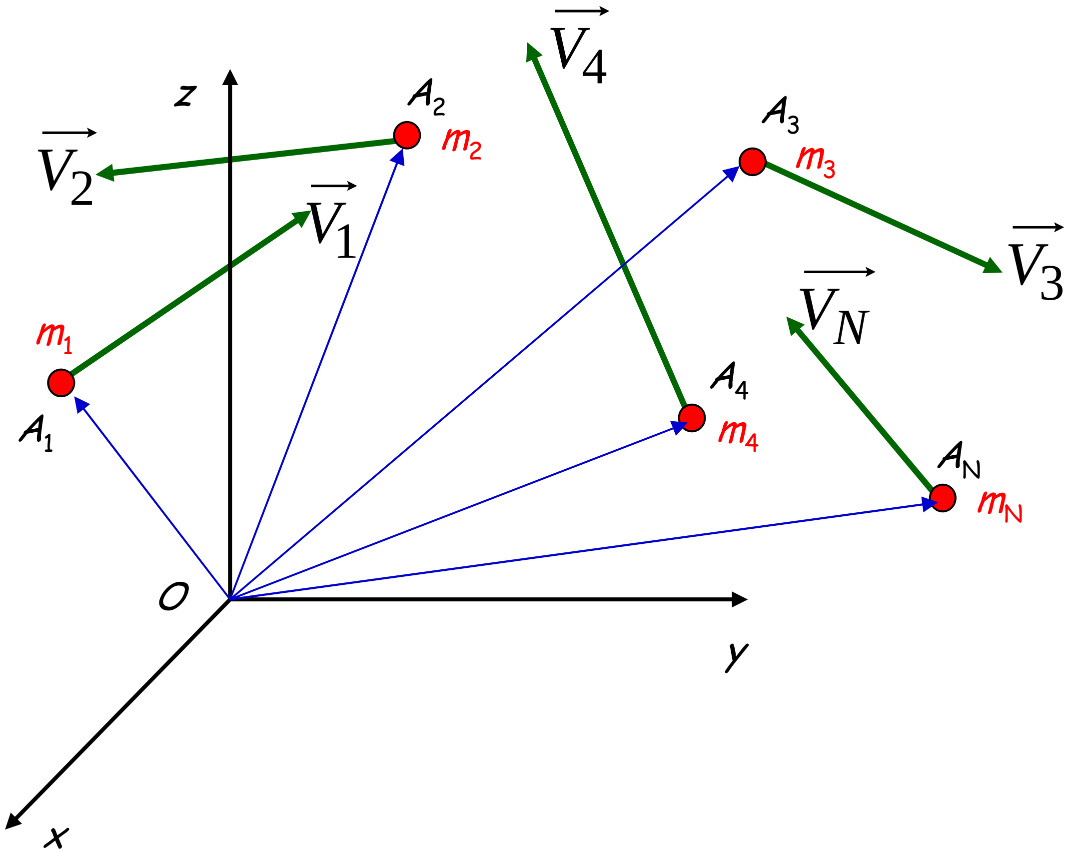
Vitesses $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \ldots \overrightarrow{V_N}$

Quantité de mouvement

$$\boxed{\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{V_i}}$$

Coordonnées

$$\boxed{\begin{cases} p_x = \sum_{i=1}^{N} m_i V_{ix} \\ p_y = \sum_{i=1}^{N} m_i V_{iy} \\ p_z = \sum_{i=1}^{N} m_i V_{iz} \end{cases}}$$

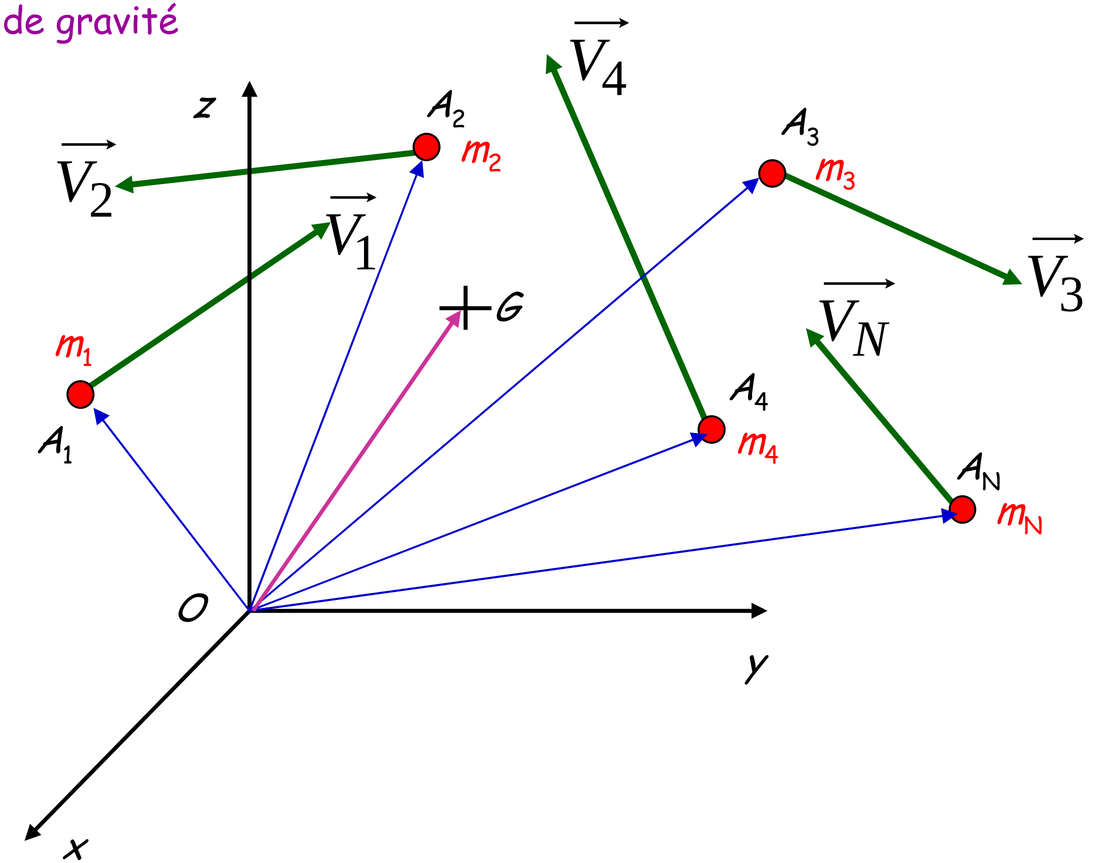


Remarque: d'après la définition du centre de gravité

Centre de gravité $$\boxed{M \cdot \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA_i}}$$

Masse totale $$\boxed{M = \sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Coordonnées $$\boxed{\begin{cases} M \cdot x_G = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\ M \cdot y_G = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\ M \cdot z_G = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i \end{cases}}$$




En dérivant par rapport au temps

$$M \cdot \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\overrightarrow{OA_i}}{dt}$$

$$\boxed{M \cdot \overrightarrow{V_G} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{V_i} = \vec{p}}$$

***La quantité de mouvement d'un ensemble de points matériels est égale à celle de leur centre de gravité, auquel la somme des masses serait appliquée.***

### *1.1.3 Distribution continue de points matériels: solide*

Le résultat précédent se généralise au cas d'un solide

***La quantité de mouvement d'un solide est égale à celle de son centre de gravité, auquel la somme des masses serait appliquée.***

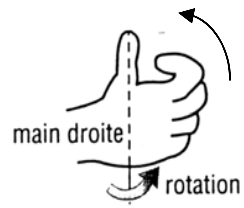
## 1.2 Le moment cinétique

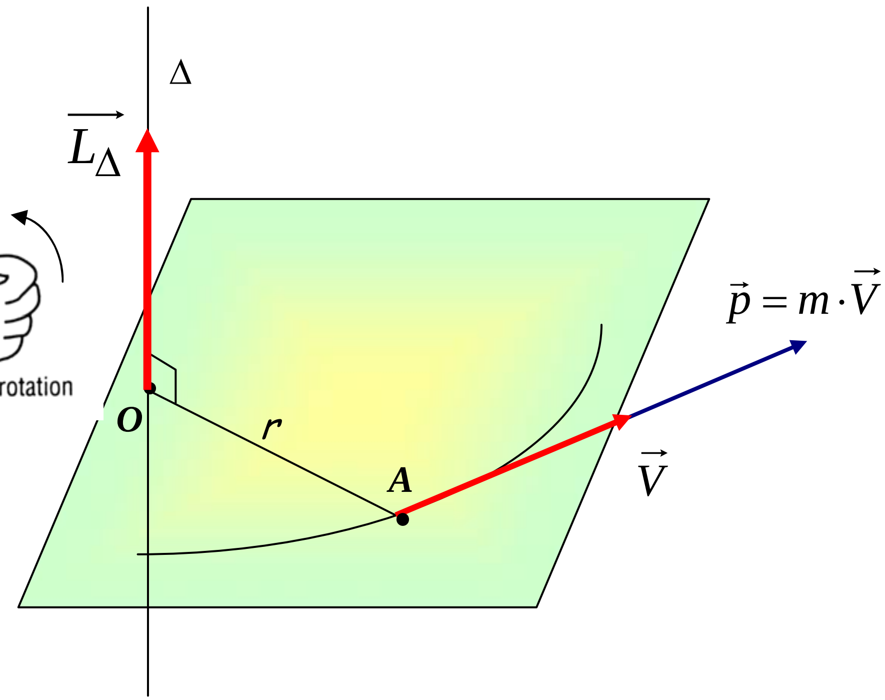
**On se limite au cas d'une rotation autour d'un axe**

### *1.2.1 Moment cinétique d'un point matériel en rotation autour d'un axe*

Le ***moment cinétique*** du point *A* par rapport à l'axe $\Delta$ est un vecteur égal au moment par rapport à l'axe $\Delta$ de la quantité de mouvement du point *A*

$$\overrightarrow{L_\Delta} = \overrightarrow{M_\Delta(\vec{p})}$$




Le ***moment cinétique*** du point *A* par rapport à l'axe $\Delta$ a les propriétés suivantes:

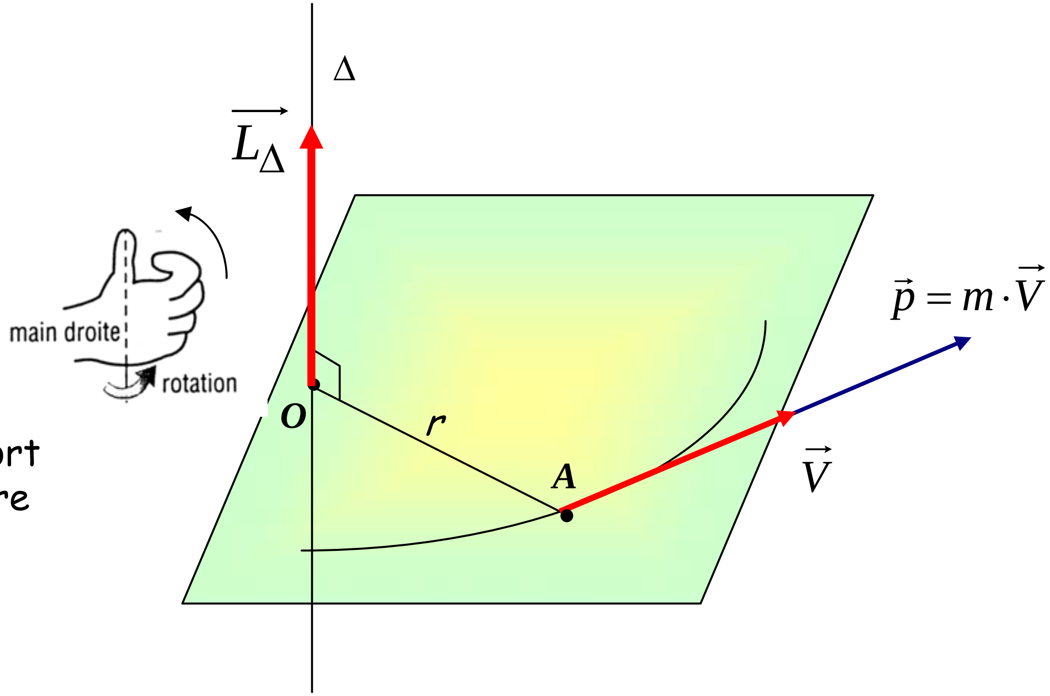
- il est perpendiculaire au plan déterminé par *OA* et la quantité de mouvement du point *A* (donc sa vitesse) donc porté par l'axe $\Delta$
- son sens indique le sens de rotation du point *A* (règle de la main droite)
- Si *r* est la distance entre la point *A* et l'axe de rotation $\Delta$ ($r = OA$) le module du moment cinétique est

$$\left|\overrightarrow{L_\Delta}\right| = r\cdot p = r\cdot m\cdot V \qquad \boxed{L_\Delta = m\cdot r\cdot V}$$

Remarque:

Le vecteur vitesse angulaire est aussi porté par l'axe $\Delta$ et son module est relié à la vitesse du point *A* par:

$$V = r \cdot \omega$$




Le ***moment cinétique*** du point *A* par rapport à l'axe $\Delta$ est donc relié à la vitesse angulaire par

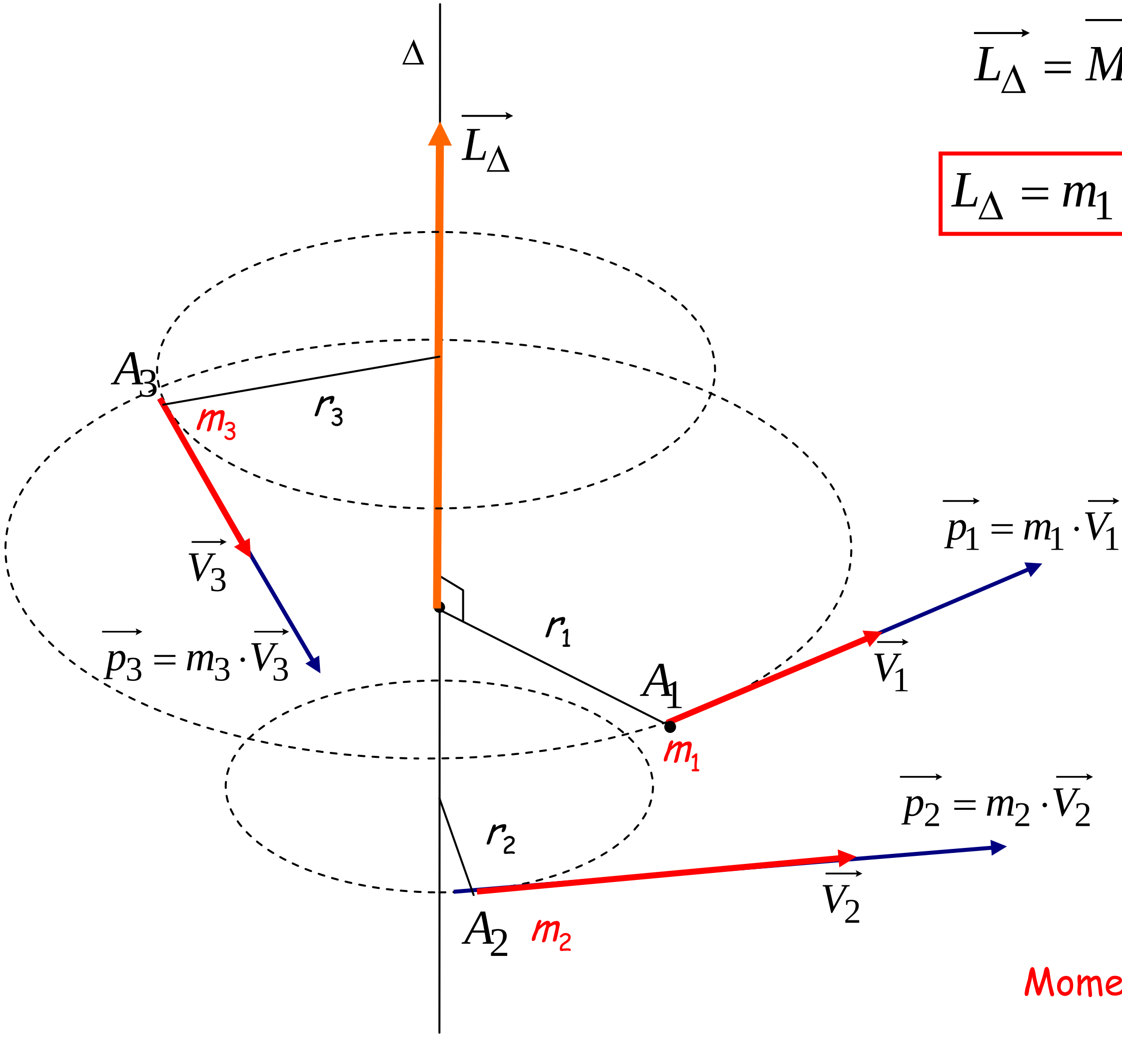
$$\boxed{L_\Delta = m \cdot r^2 \cdot \omega}$$

On définit le moment d'inertie du point *A* par rapport à l'axe $\Delta$

$$\boxed{J = m \cdot r^2}$$

$$\boxed{L_\Delta = J \cdot \omega}$$

## 1.2.2 Moment cinétique d'un ensemble de points matériels en rotation autour d'un axe




$$\overrightarrow{L_\Delta} = \overrightarrow{M_\Delta(\overrightarrow{p_1})} + \overrightarrow{M_\Delta(\overrightarrow{p_2})} + \overrightarrow{M_\Delta(\overrightarrow{p_2})}$$

$$\boxed{L_\Delta = m_1 \cdot r_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot r_2 \cdot V_2 + m_3 \cdot r_3 \cdot V_3}$$

Si les points tournent avec la même vitesse angulaire, $\omega$:

$$V_1 = r_1 \cdot \omega$$

$$V_2 = r_2 \cdot \omega$$

$$V_3 = r_3 \cdot \omega$$

$$L_\Delta = \left(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2\right) \cdot \omega$$

$$\boxed{L_\Delta = J \cdot \omega}$$

Moment d'inertie des 3 points

$$\boxed{J = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2}$$

## *1.2.3 Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe*

La notion de moment d'inertie se généralise au cas d'un solide

On divise le volume en un un très grand nombre (infinité) de petits **volumes élémentaires** (cubiques), entourant chacun un point $A_i$.
Chaque volume élémentaire vaut

$$dV = dxdydz$$

Chaque volume contient une masse élémentaire égale à

$$dm = \rho dV$$

$\rho$ = masse volumique = masse de l'unité de volume

On est ramené au cas de *n* points matériels;
les points matériels sont les volumes infiniment petits

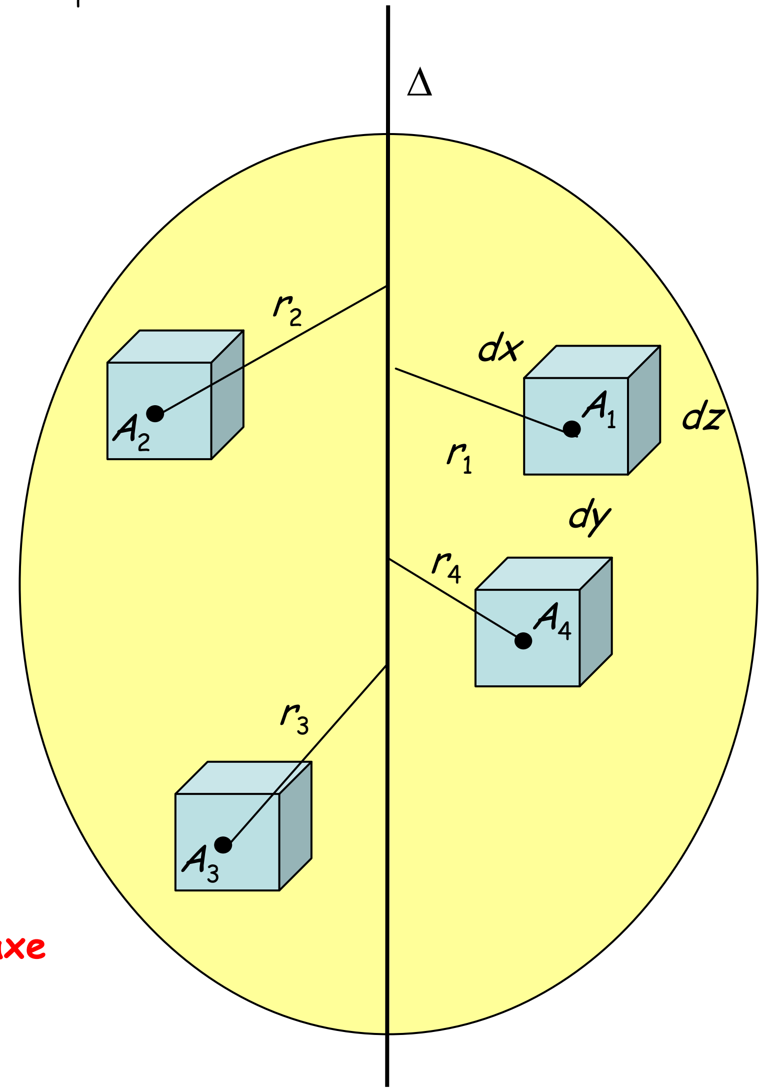
$$J = \sum_{\text{Tous les volumes élémentaires}} r_i^2 \cdot dm$$

Puisque la taille des volumes élémentaires est infiniment petite, l'expression précédente devient une intégrale

$$J = \int_{Volume} r^2 \cdot dm = \int_{Volume} r^2 \cdot \rho dV$$

**Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe**

$$\boxed{L_\Delta = J \cdot \omega}$$



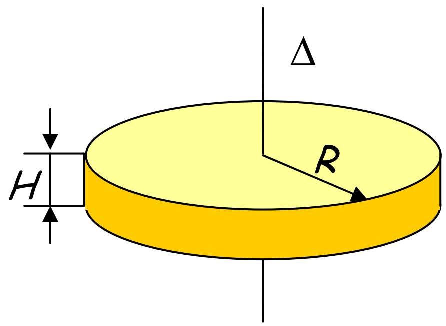
## *Exemple: moment d'inertie d'un disque autour de son axe*

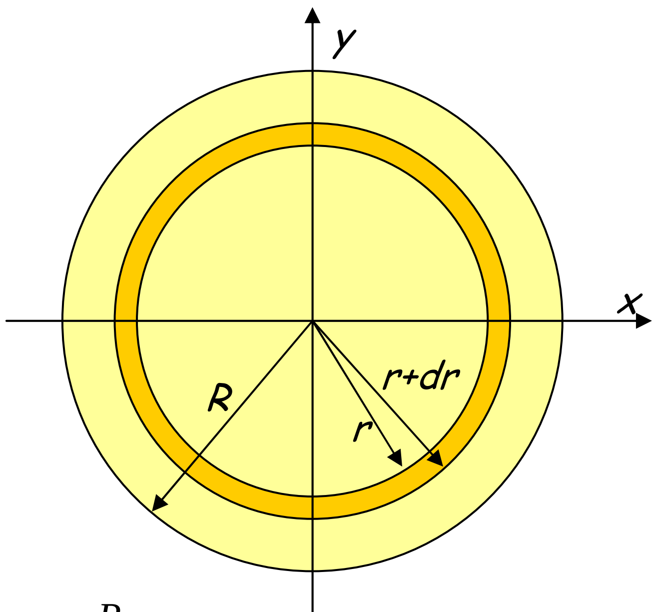
Soit un disque de rayon $R$, d'épaisseur $H$, de masse $M$, de masse volumique r.
Considérons une couronne circulaire comprise entre les rayons $r$ et $r + dr$.

Surface $$dS = 2\pi r dr$$

Volume $$dV = H \cdot dS = H \cdot (2\pi r dr) = 2\pi r H dr$$

Masse $$\begin{aligned} dm &= \rho dV \\ &= \rho(2\pi r H dr) \\ &= 2\pi r H \rho dr \end{aligned}$$




Contribution au moment d'inertie

$$\begin{aligned} dJ &= r^2 dm \\ &= r^2(2\pi r H \rho dr) \\ &= 2\pi r H \rho r^3 dr \end{aligned}$$

Moment d'inertie $$J = \int_0^R 2\pi H \rho r^3 dr = 2\pi H \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi H \rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{1}{2}\pi H \rho R^4$$

Volume du disque $V = \pi R^2 H$ Masse totale du disque $M = V \cdot \rho = (\pi R^2 H) \cdot \rho$

$$\boxed{J = \frac{1}{2} M R^2}$$

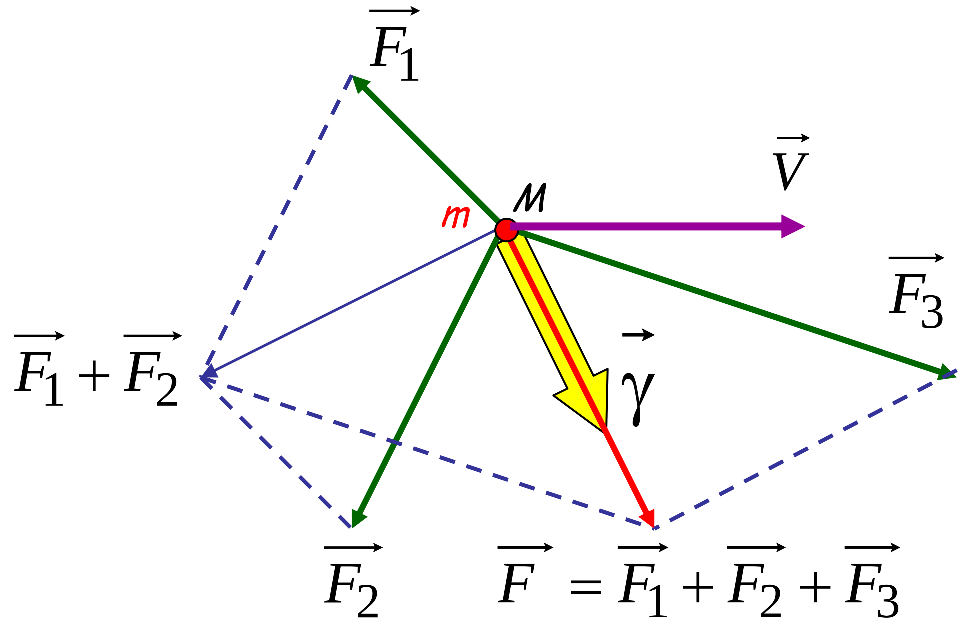
## 2. RELATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE

### 2.1 Point matériel

Point matériel *M*, de masse *m*

Soumis à des forces $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}....$

Résultante $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$




**Relation fondamentale de la dynamique**

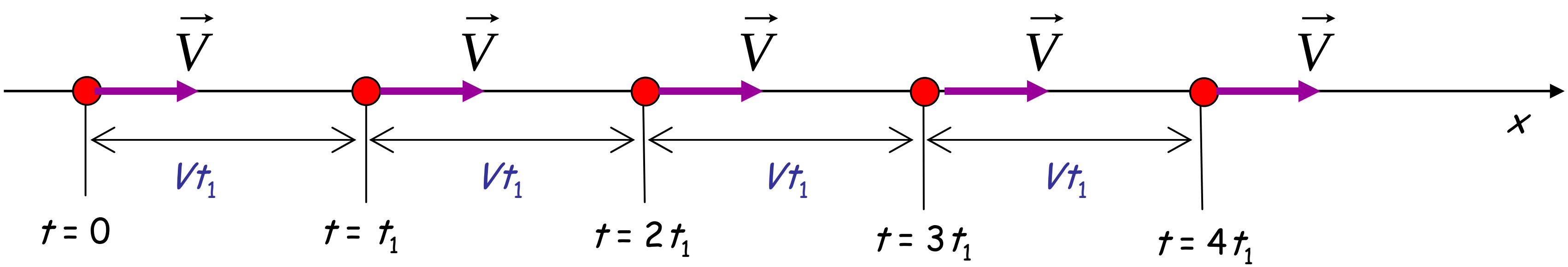
$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}}$$

$\gamma$ accélération du point

*Conséquence importante*

Si $\overrightarrow{F} = 0$ alors $\vec{\gamma} = 0$ **la vitesse est constante**

***En absence de forces appliquées, un point matériel est à l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme.***



## Relation fondamentale de la dynamique

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{V}\right)}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{dt}}$$

**La résultante des forces appliquées est égale à la dérivée de la quantité de mouvement**

## 2.2 Solide

Solide de masse *M*, centre de gravité *G*

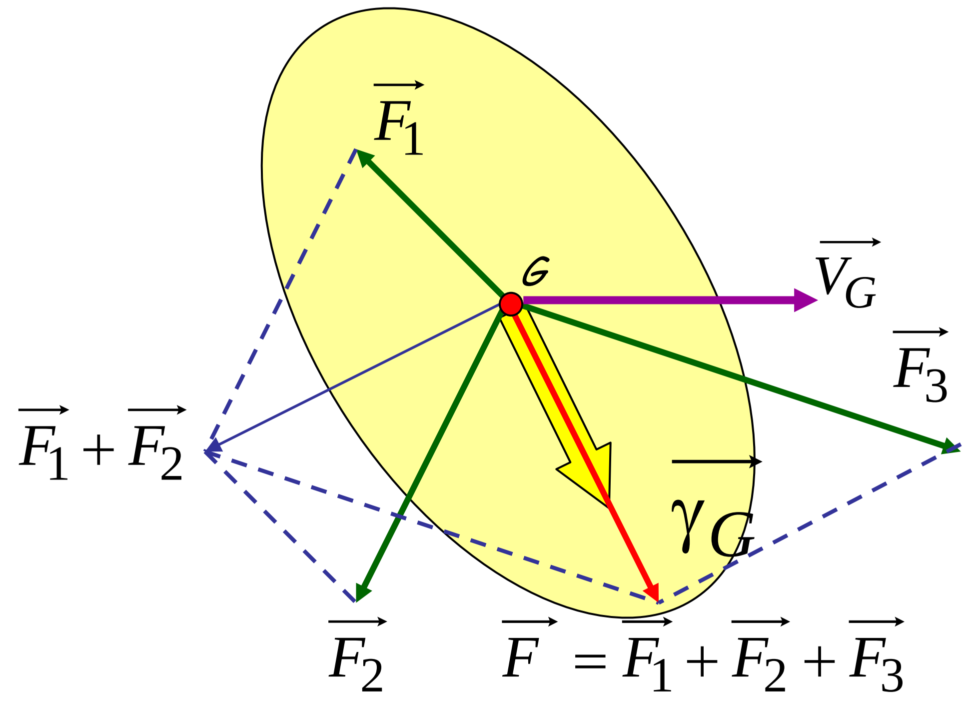
Soumis à des forces $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}....$

Résultante $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$

**Relation fondamentale de la dynamique**

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \overrightarrow{\gamma_G}}$$

$\gamma_G$ accélération du centre de gravité

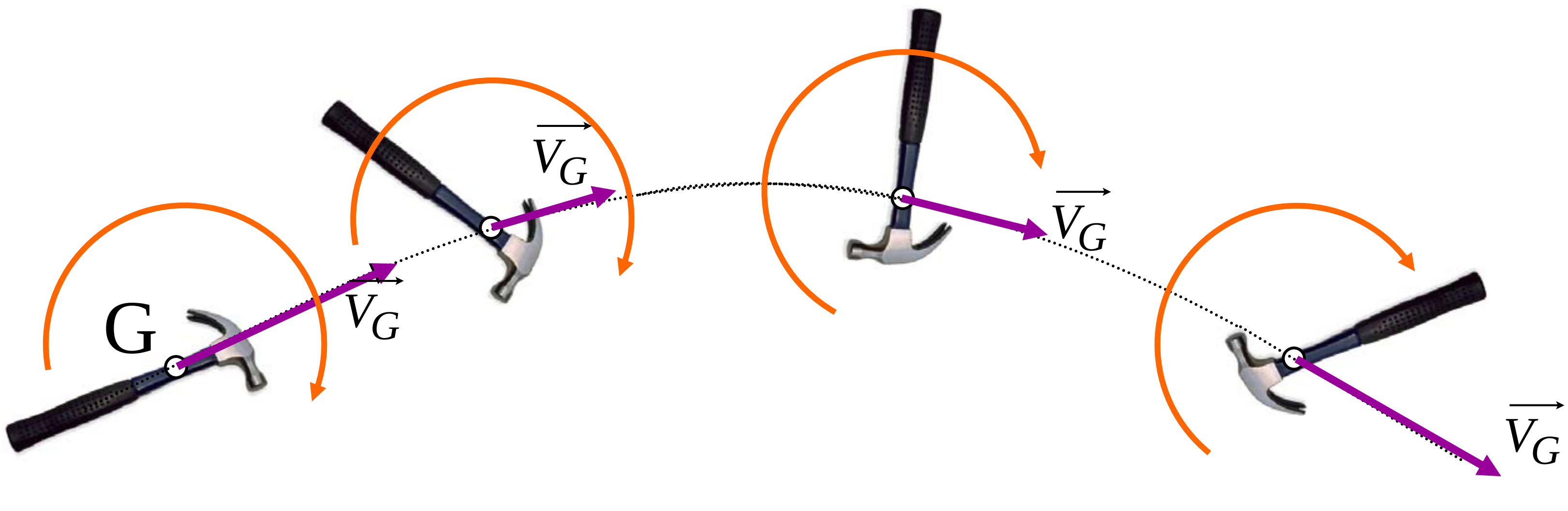



***Le centre de gravité d'un solide se déplace comme si toute la masse y était concentrée et toutes les forces appliquées.***

Conséquence Si $\overrightarrow{F} = 0$ alors $\overrightarrow{\gamma_G} = 0$ **la vitesse du centre de gravité est constante**

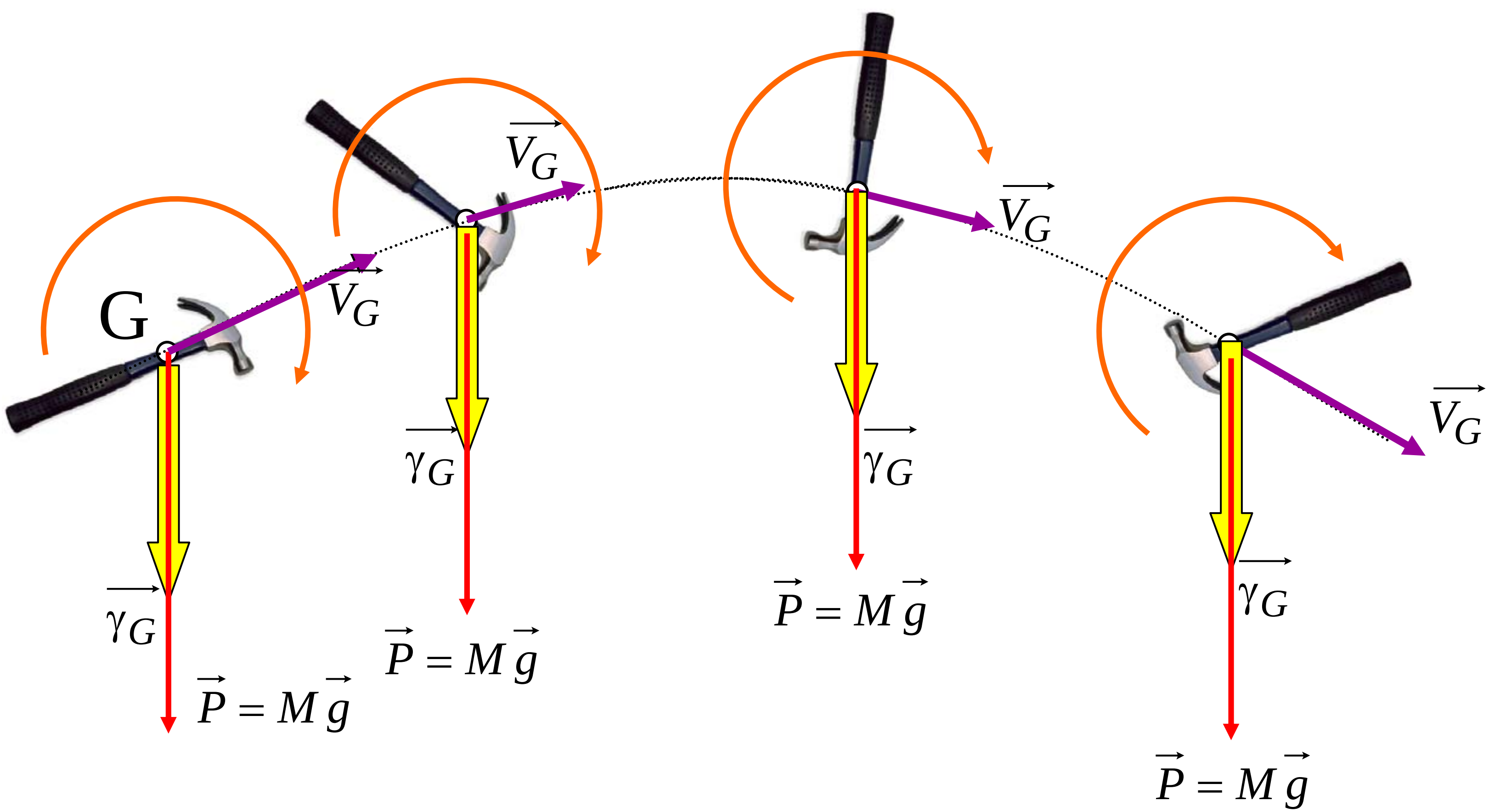
***Si la résultante des forces appliquées à un solide est nulle, son centre de gravité est à l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme.***

Remarque: Le solide lui-même peut effectuer une rotation autour de son centre de gravité

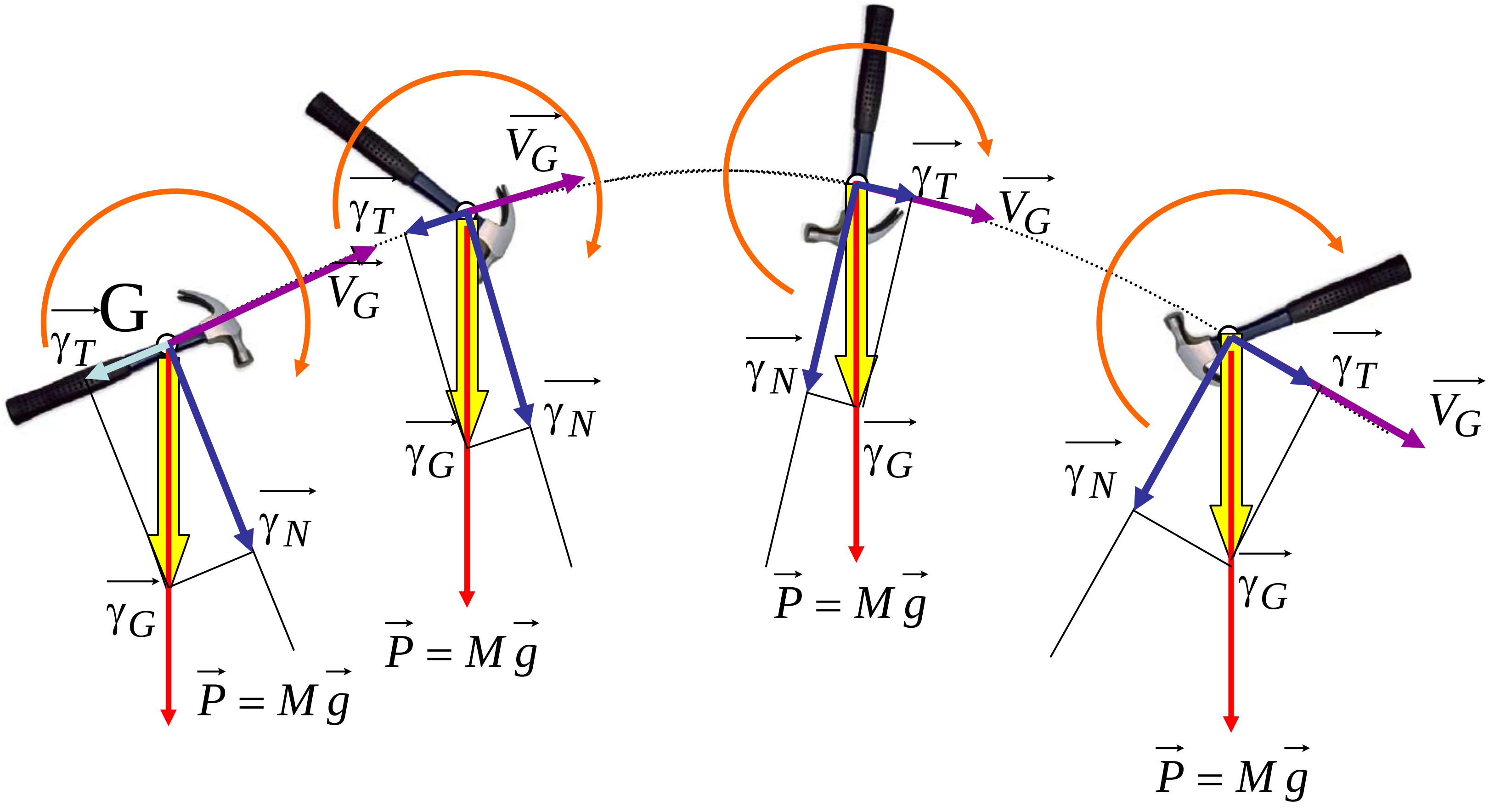


G
$\overrightarrow{V_G}$
$\overrightarrow{V_G}$
$\overrightarrow{V_G}$
$\overrightarrow{V_G}$

$\vec{g}$ accélération de la pesanteur



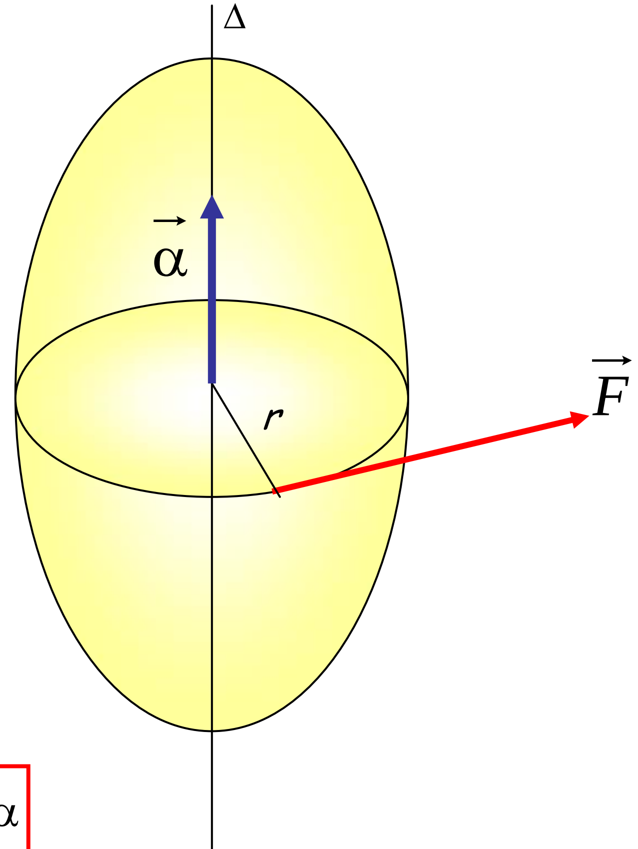
$\vec{g}$ accélération de la pesanteur



## 2.3 Théorème du moment cinétique

***La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe est égale à la somme des moments par rapport à cet axe de toutes les forces qui agissent sur le solide***

$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i M_\Delta(\vec{F_i})}$$

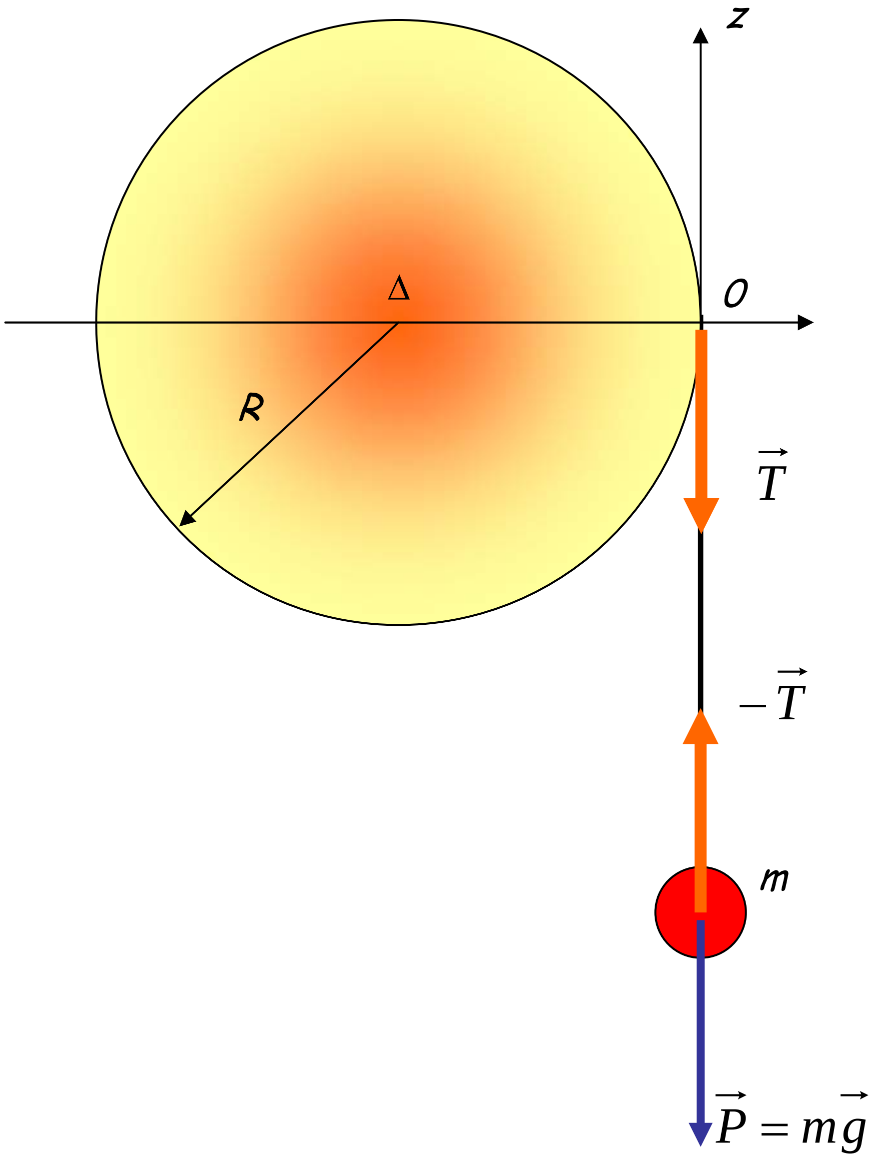



Puisque $L_\Delta = J \cdot \omega$

$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \cdot \frac{d\omega}{dt}} \quad \boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \cdot \alpha}$$

$$\boxed{\sum_i M_\Delta(\vec{F_i}) = J_\Delta \cdot \frac{d\omega}{dt}} \quad \boxed{\sum_i M_\Delta(\vec{F_i}) = J_\Delta \cdot \alpha}$$

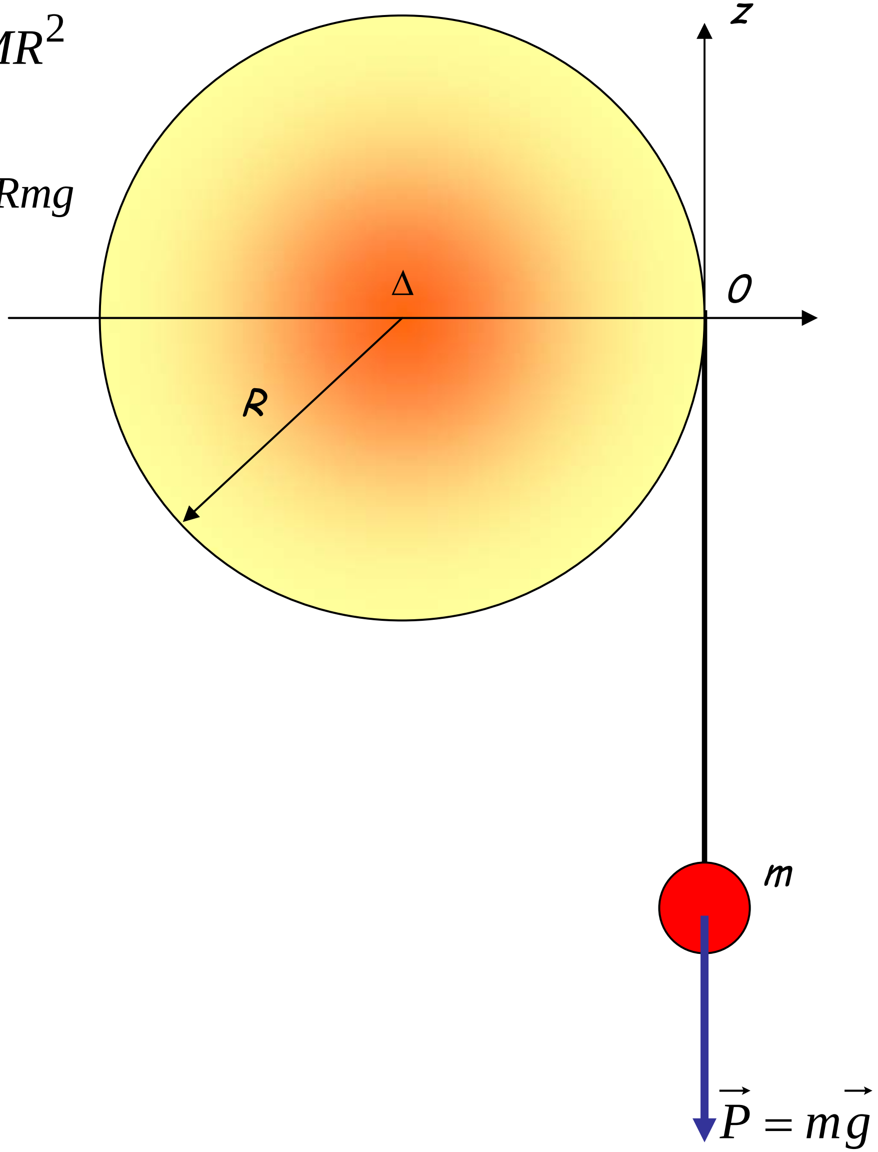
$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}} \quad \text{CORRESPONDANCE} \quad \boxed{M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \cdot \alpha}$$



z
O
Δ
R
$\vec{T}$
$-\vec{T}$
m
$\vec{P} = m\vec{g}$

$$J = \frac{1}{2} MR^2$$

$$M_\Delta(\vec{P}) = Rmg$$




$$J\alpha = Rmg = \frac{1}{2} MR^2 \alpha$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{Rmg}{\frac{1}{2} MR^2} = \frac{2mg}{MR}$$

$$\omega(t) = \frac{2mg}{MR} t + Cte$$

$$t = 0, \omega(0) = 0 \Rightarrow Cte = 0$$

$$\omega(t) = \frac{2mg}{MR} t$$

$$V(t) = R\omega(t) = R \frac{2mg}{MR} t = \frac{2mg}{M} t$$

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varphi(t) = \frac{mg}{MR} t^2 + Cte$$

$$t = 0, \varphi(0) = 0 \Rightarrow Cte = 0$$

$$\varphi(t) = \frac{mg}{MR} t^2$$

$$z(t) = -R\varphi(t) = -\frac{mg}{M} t^2$$