Energie mécanique

Mécanique: chapitre 4

1. TRAVAIL ET PUISSANCE

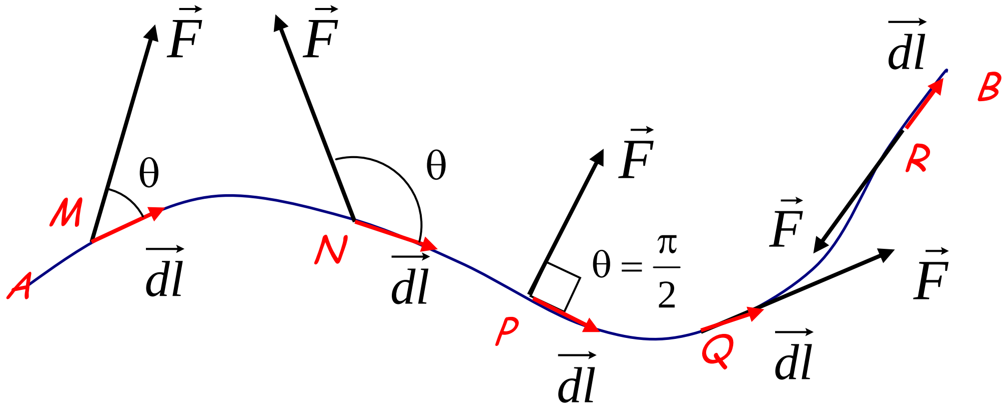
1.1 Travail élémentaire d'une force appliquée à un point matériel

Le travail élémentaire d'une force appliquée à un point matériel est égal au produit scalaire de cette force par le déplacement élémentaire.

$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}}$$

$$\boxed{dW = F \cdot dl \cdot \cos\theta}$$

Unité: Joule

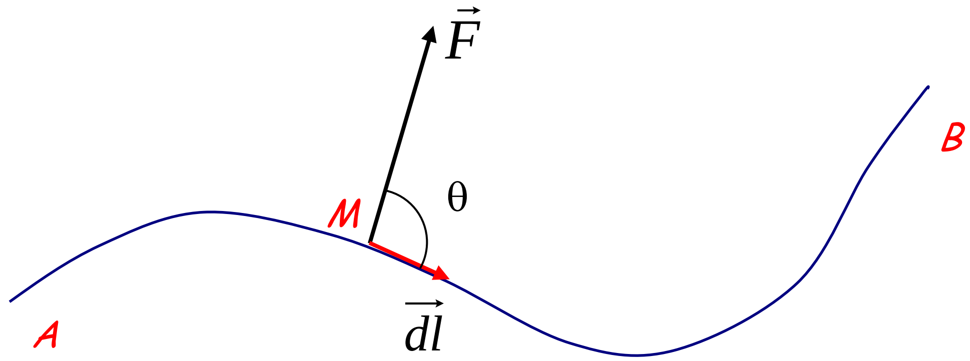


Au point *M*	$\theta < \frac{\pi}{2}$	$\cos\theta > 0$	$dW > 0$	Travail moteur
Au point *N*	$\theta > \frac{\pi}{2}$	$\cos\theta < 0$	$dW < 0$	Travail résistant
Au point *P*	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\cos\theta = 0$	$dW = 0$	Travail nul
Au point *Q*	$\theta = 0$	$\cos\theta = 1$		Travail moteur maximum
Au point *R*	$\theta = \pi$	$\cos\theta = -1$		Travail résistant (maximum en valeur absolue)

1.2 Travail d'une force au cours d'un déplacement

Le travail de la force au cours du déplacement du point *A* au point *B* est donné par intégration du travail élémentaire tout le long du parcours.

$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl}}$$



Remarques

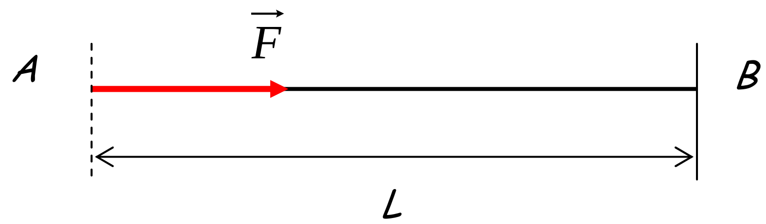
Au cours du déplacement de *A* à *B*:

- l'angle θ peut varier
- le module de la force peut varier

Exemple 1

Force constante, parallèle au déplacement et dans le sens du déplacement

$\theta = 0$ tout le long du déplacement



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_A^B F \cdot dl = F \cdot \int_A^B dl = F \cdot [l]_0^L$$

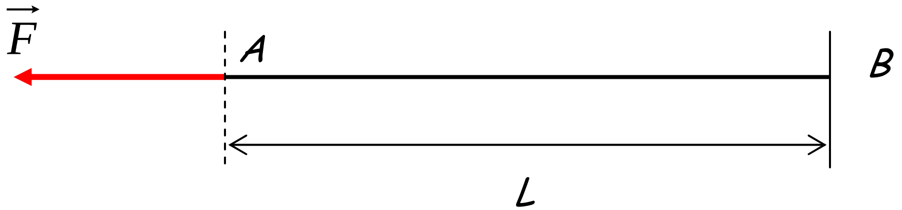
$$\boxed{W_{AB} = F \cdot L}$$

$W_{AB} > 0$ Travail moteur

Exemple 2

Force constante, parallèle au déplacement
et dans le sens opposé au déplacement

$\theta = \pi$ tout le long du déplacement



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_A^B F\cdot\cos\pi\cdot dl$$

$$= \int_A^B F\cdot(-1)\cdot dl = -F\cdot\int_A^B dl = -F\cdot[l]_0^L$$

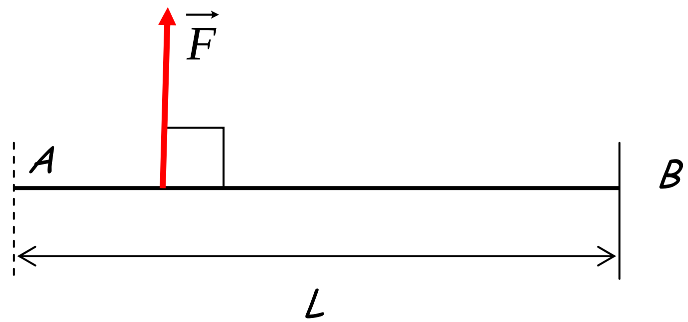
$$\boxed{W_{AB} = -F\cdot L}$$

W_{AB} < 0 Travail résistant

Exemple 3

Force constante, perpendiculaire au déplacement

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ tout le long du déplacement



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_A^B F\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot dl$$

$$= \int_A^B F\cdot(0)\cdot dl = 0$$

$$\boxed{W_{AB} = 0}$$

W_{AB} = 0 Travail nul

Exemple 4

Force constante,en module, sens et direction
la trajectoire est un arc de cercle

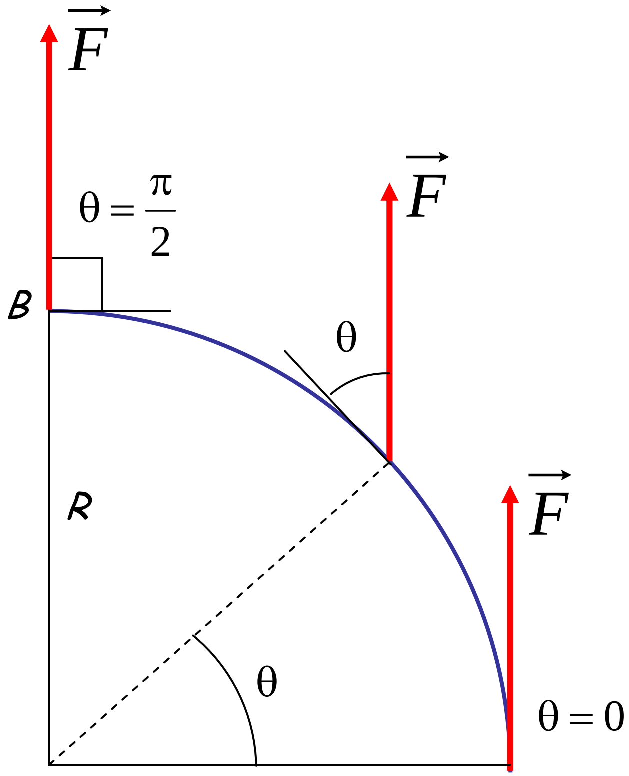
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

Déplacement le long du cercle $dl = R \cdot d\theta$

$$W_{AB} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot R \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$= F \cdot R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot d\theta = F \cdot R \cdot [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = F \cdot R \cdot [1 - 0]$$

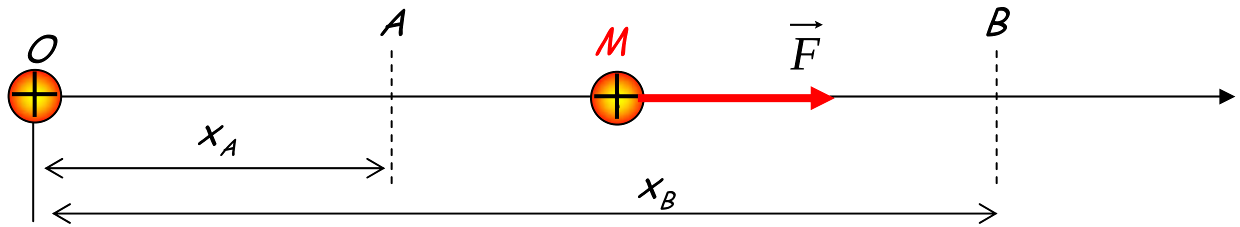
$$\boxed{W_{AB} = F \cdot R}$$



Exemple 5

La force n'est plus constante (interaction de deux charges)

$$\boxed{F = \frac{k}{x^2}} \qquad k > 0$$



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{x_A}^{x_B} F \cdot \cos 0 \cdot dx$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \frac{k}{x^2} \cdot dx = k \cdot \left[-\frac{1}{x} \right]_{x_A}^{x_B} = k \cdot \left[-\frac{1}{x_B} + \frac{1}{x_A} \right]$$

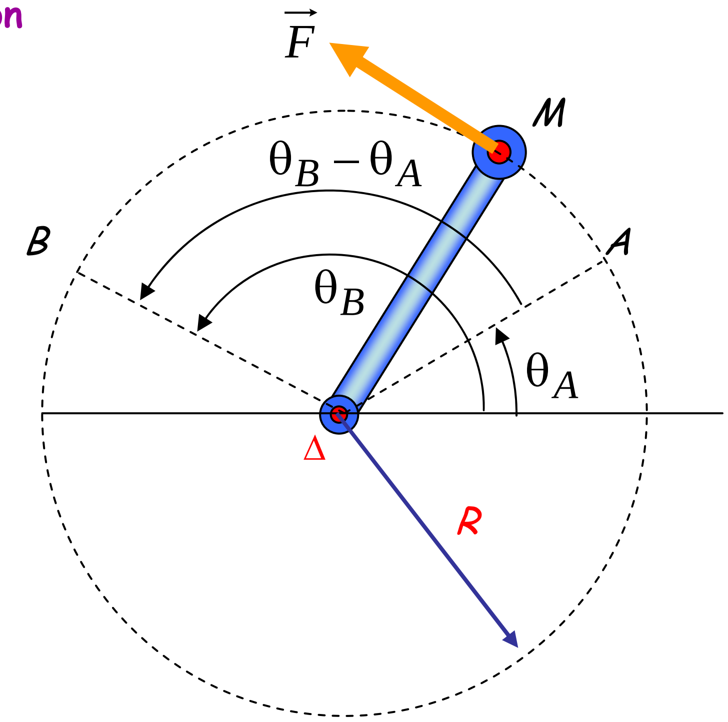
$$\boxed{W_{AB} = k \cdot \left[\frac{1}{x_A} - \frac{1}{x_B} \right]}$$

$W_{AB} > 0$ Travail moteur

1.2 Travail d'une force appliquée à un solide en rotation

On considère la force appliquée à un treuil.
On suppose que:

- le module de la force est constant
- la force est continuellement tangente à la trajectoire circulaire



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

Déplacement le long du cercle $dl = R \cdot d\theta$

$$W_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} F \cdot R \cdot d\theta = F \cdot R \cdot \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = F \cdot R \cdot [\theta]_{\theta_A}^{\theta_B} = F \cdot R \cdot [\theta_B - \theta_A]$$

$F \cdot R$ = moment de la force par rapport à l'axe de rotation Δ $\boxed{M = F \cdot R}$

$$\boxed{W_{AB} = M \cdot (\theta_B - \theta_A)}$$

Le travail de la force est égal au produit de son moment par rapport à l'axe, multiplié par l'angle de rotation (exprimé en radian)

1.3 Travail d'un couple

Travail de $\overrightarrow{F_1}$ $\quad W_1 = F \cdot R \cdot (\theta_B - \theta_A)$

Travail de $\overrightarrow{F_2}$ $\quad W_2 = F \cdot R \cdot (\theta_B - \theta_A)$

Travail du couple de forces

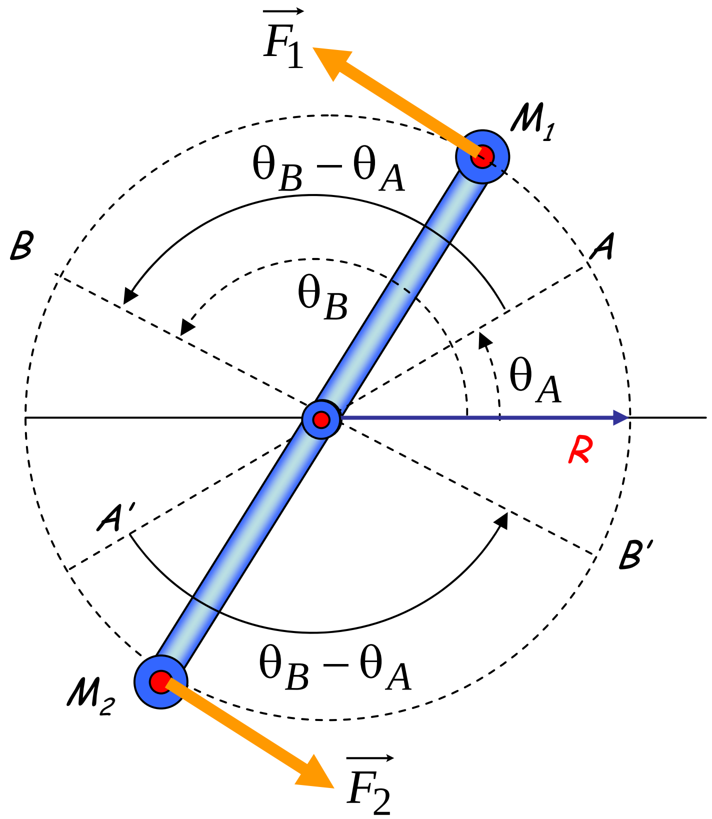
$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 \\ &= 2F \cdot R \cdot (\theta_B - \theta_A) \end{aligned}$$

Moment du couple de forces

$$\boxed{M_\Delta = 2F \cdot R}$$

Travail du couple de forces

$$\boxed{W = M_\Delta \cdot (\theta_B - \theta_A)}$$



Le travail d'un couple dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation est égal au produit de son moment par l'angle de rotation, exprimé en radian.

1.2 Puissance d'une force

Les expressions précédentes du travail, pour une force ou pour un couple de forces, ne font pas intervenir le temps.

Seuls interviennent:

- Pour une force:
  - la trajectoire
  - le module de la force
  - leur orientation respective à tout moment (angle θ)

- Pour un couple de forces
  - l'angle de rotation
  - le module du moment du couple

En particulier, la vitesse de déplacement du point matériel, ou la vitesse de rotation autour de l'axe n'apparaissent pas

Puissance d'une force, *P*: la dérivée par rapport au temps de l'expression du travail

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}} \qquad dW = \vec{F} \cdot \vec{dl} \qquad P = \vec{F} \cdot \frac{\vec{dl}}{dt} \qquad \boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{V}}$$

Unité: Watt

Dans le cas d'un couple $\quad dW = M \cdot d\theta \qquad P = M \frac{d\theta}{dt} \qquad \boxed{P = M \cdot \omega}$

2. ENERGIE CINÉTIQUE

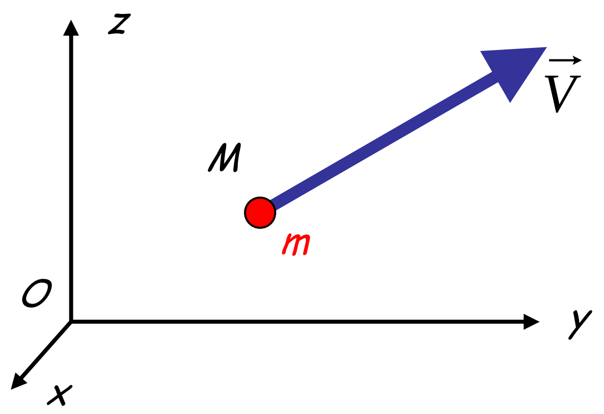
2.1 Energie cinétique d'un point matériel

C'est le produit de la masse du point matériel par le carré du module de sa vitesse

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} m \cdot \left|\vec{V}\right|^2}$$

Unité: Joule

L'énergie cinétique est toujours POSITIVE



2.2 Energie cinétique d'un ensemble de N points matériels

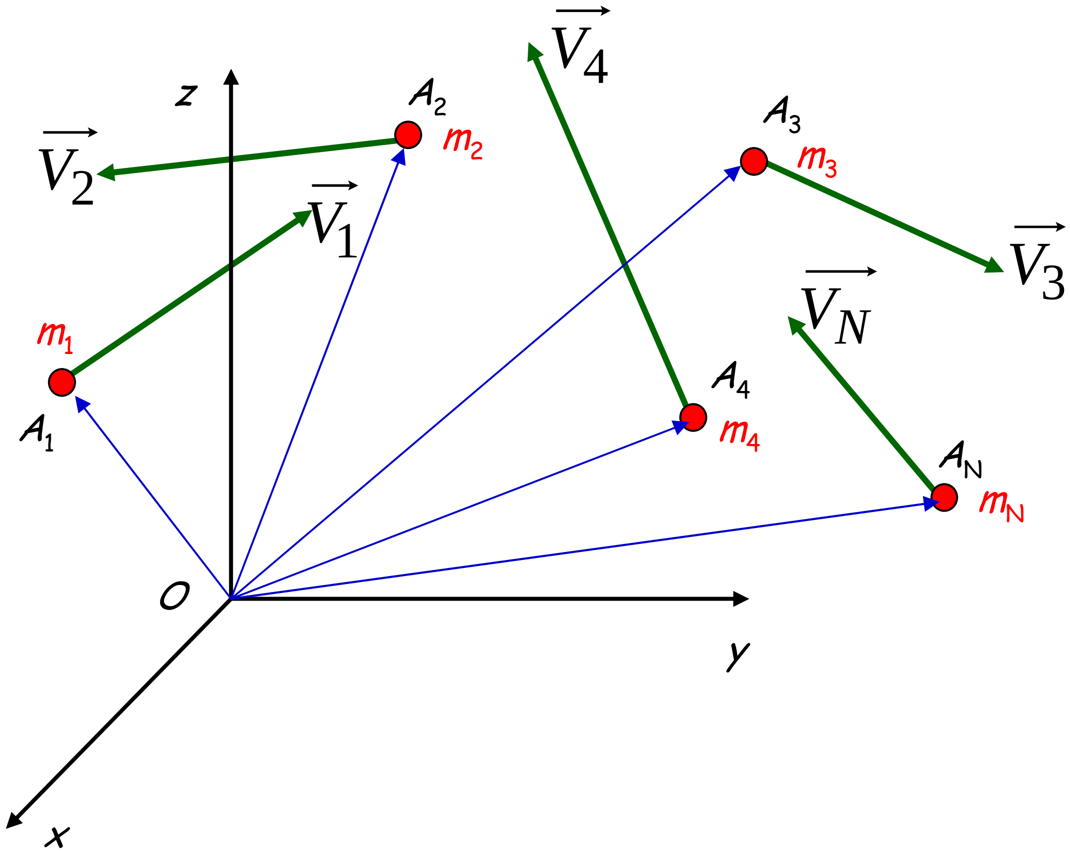
Exemple: N points, A_1, A_2,....... A_N

Masses $m_1, m_2, \ldots m_N$

Vitesses $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \ldots \overrightarrow{V_N}$

L'énergie cinétique totale est la somme des énergies cinétiques de chacun des points

$$\boxed{E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\overrightarrow{V_i}\right|^2}$$



2.3 Distribution continue de points matériels: solide

L'énergie cinétique d'un solide est la somme des énergies cinétiques des éléments matériels qui le composent

2.3.1 Solide en translation

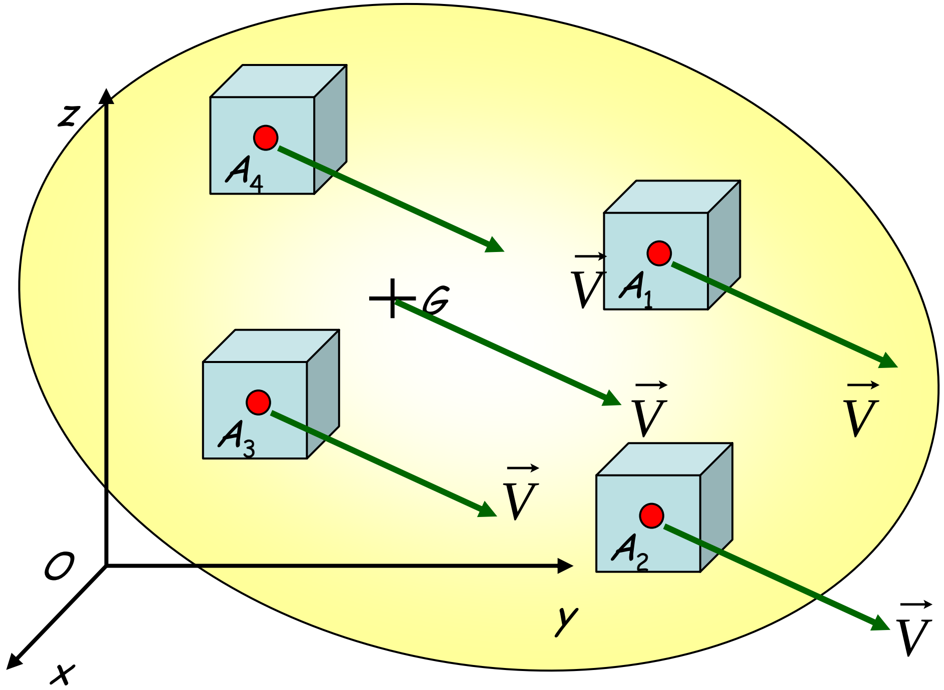
Tous les points se déplacent à la même vitesse, égale à celle du centre de gravité

$$E_{c,t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\vec{V}\right|^2$$

$$E_{c,t} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\left|\vec{V}\right|^2$$

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$ Masse totale

$$\boxed{E_{c,t} = \frac{1}{2} M \left|\vec{V}\right|^2}$$

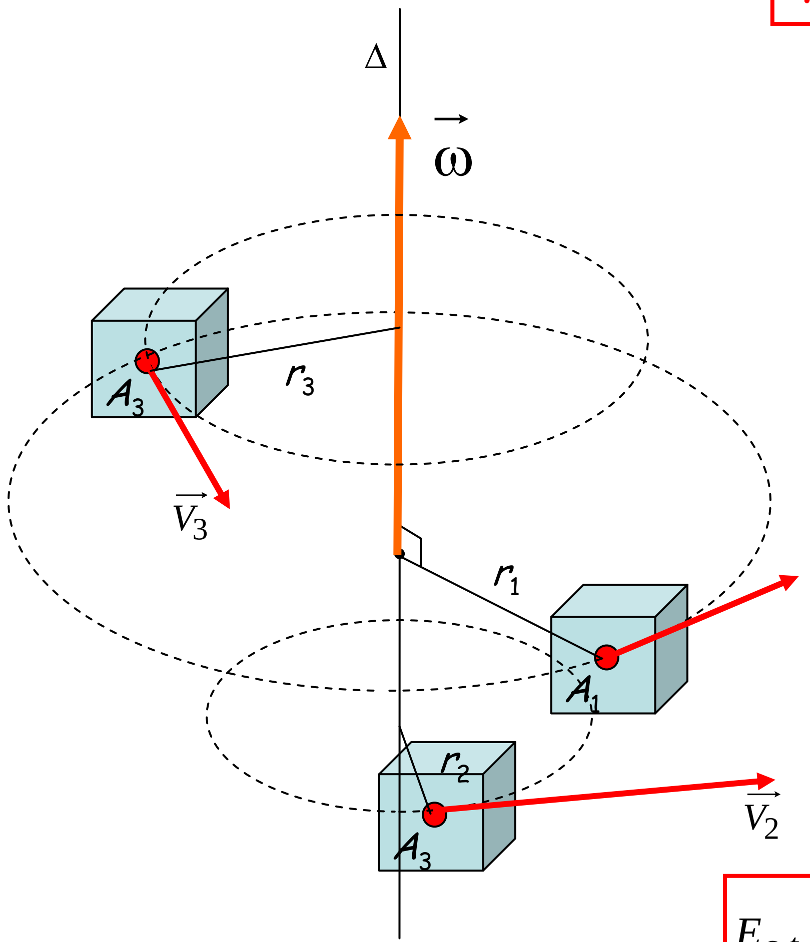


L'énergie cinétique d'un solide en translation est égale à celle de son centre de gravité, auquel toute la masse serait appliquée.

Exemple: train de 200 tonnes, vitesse 57,6 km/h

$$V = \frac{57{,}6 \times 10^3}{3600} = 16 \text{ m.s}^{-1} \qquad E_{cin} = \frac{1}{2} m V^2 \qquad E_{cin} = \frac{1}{2} 200 \times 10^3 \cdot (16)^2 = 25{,}6 \times 10^6 \text{ Joule}$$

2.3.2 Solide en rotation autour d'un axe



Tous les points ont la même vitesse angulaire, ω

$$V_1 = r_1 \cdot \omega \qquad \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2$$

$$V_2 = r_2 \cdot \omega \qquad \frac{1}{2} m_2 V_1^2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2$$

$$V_3 = r_3 \cdot \omega \qquad \frac{1}{2} m_3 V_3^2 = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \omega^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \ldots\right) \cdot \omega^2$$

Moment d'inertie

$$J = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \ldots.$$

$\boxed{E_{c,t} = \frac{1}{2} M V^2}$ ⟺ CORRESPONDANCE ⟺ $\boxed{E_{c,r} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2}$

Exemple: Rotor 20 kg; rayon 10 cm; vitesse 2400 tours/mn

$$\omega = \frac{2400 \cdot 2\pi}{60} = 25{,}15 rad / s \qquad J = \frac{1}{2} 20 \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}1 kgm^2 \qquad E_{c,r} = 0{,}1 \cdot (2(,15)^2 = 63{,}25 Joule$$

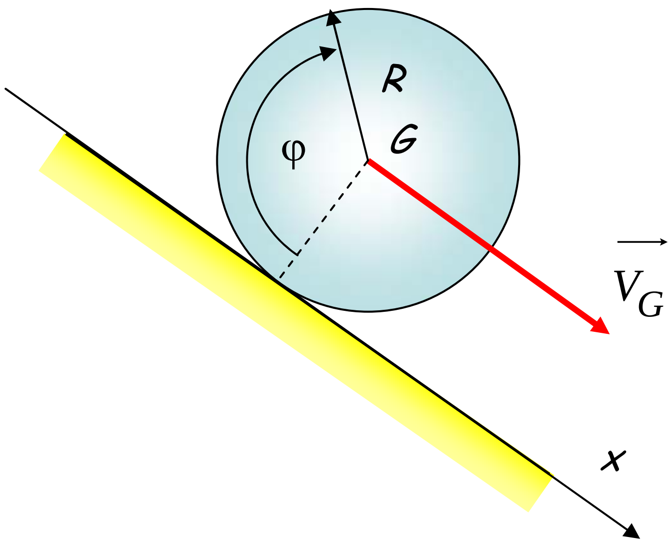
2.3.3 Cas général

Le mouvement se décompose:

- Mouvement du centre de gravité, considéré comme un point matériel de même masse que le solide
- Rotation autour d'un axe passant par le centre de gravité

$$\boxed{\begin{aligned} E_c &= E_{c,t} + E_{c,r} \\ E_c &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \end{aligned}}$$

Exemple: bille sur un plan incliné



$$V_G = \frac{dx}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega \qquad \omega = \frac{V_G}{R}$$

$$E_c = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$J = \frac{2}{5}MR^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\frac{V_G^2}{R^2} = \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{5}MV_G^2$$

$$\boxed{E_c = \frac{7}{10}MV_G^2}$$

M = 30 g, V = 3 m/s $\qquad$ E_c = 0,19 Joule

2.4 Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique totale d'un solide entre deux instants donnés est égale à la somme algébrique des travaux effectués entre ces instants par toutes les forces extérieures qui agissent sur le solide

Exemple :

Un camion de 7 tonnes, partant du repos, atteint la vitesse de 72 km/h en parcourant 500 m, d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Trouver la résultante des forces qui agissent sur le camion au cours du déplacement.

A $t = 0$ $\quad E_C(0) = 0$

Après 500 m $\quad E_C = \frac{1}{2} m V^2 \qquad V = \frac{72 \cdot 10^3}{3600} = 20 \text{ m/s} \qquad E_C = \frac{1}{2}(7 \times 10^3)(20)^2 = 14 \times 10^5 \text{ Joules}$

L'accélération est constante, donc la résultante des forces aussi.

Travail des forces $\quad W = F \cdot L$

$$F = \frac{W}{L} \qquad \boxed{F = \frac{14 \times 10^5}{500} = 2800 \text{ N}}$$

Pour augmenter de 1°C une masse d'eau de 1 kg, il faut 4180 Joules. L'énergie cinétique du camion, restituée au cours d'un freinage jusqu'à l'arrêt complet permettrait d'élever de 33°C une masse d'eau de 10 kg.

Preuve (en scalaire)

On a (relation fondamentale de la dynamique)

$$m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \sum \vec{F}$$

donc

$$m\left(\frac{dv}{dt}\right).v = \sum F.v$$

or

$$m\left(\frac{dv}{dt}\right).v = \frac{1}{2}m\left(\frac{dv^2}{dt}\right) = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\sum F.v = \sum F.\left(\frac{dl}{dt}\right) = \frac{d\left(\sum F.l\right)}{dt}$$

donc

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d\left(\sum F.l\right)}{dt}$$

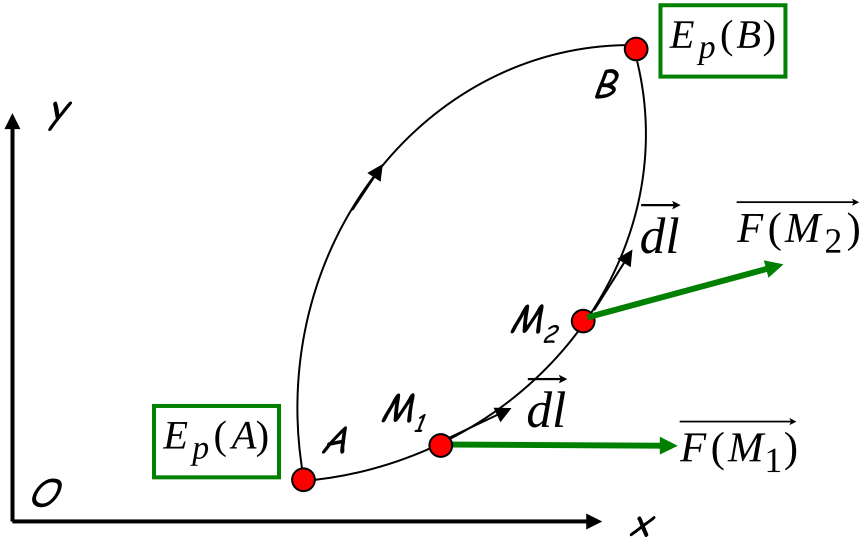
Ce qui donne en intégrant :

$$\left[E_c\right]_A^B = \left[W\right]_A^B$$

3. ENERGIE POTENTIELLE

On dit qu'une force est conservative, ou encore qu'elle dérive d'un potentiel si son travail ne dépend que de la position initiale et de la position finale de son point d'application.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = E_p(A) - E_p(B)$$



$E_p(A)$ et $E_p(B)$ sont les valeurs prises aux points *A* et *B* par une fonction $E_p(x,y,z)$ appelée **énergie potentielle**

Une dimension: $$W_{AB} = \int_A^B F(x) \cdot dx = E_p(A) - E_p(B)$$

Le travail effectué par la force du point *A* au point *B* est indépendant du chemin suivi

D'après les propriétés de l'intégrale définie

$$f(x_B) - f(x_A) = \int_A^B \frac{df}{dx} dx$$

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$$

La force $F(x)$ est la dérivée du potentiel $E_p(x)$ par rapport à x ***(au signe près)***

La force dérive du potentiel

3.1 Energie potentielle de pesanteur

$$\vec{P}\begin{cases}0\\0\\-Mg\end{cases} \qquad \vec{dl}=\begin{cases}dx\\dy\\dz\end{cases}$$

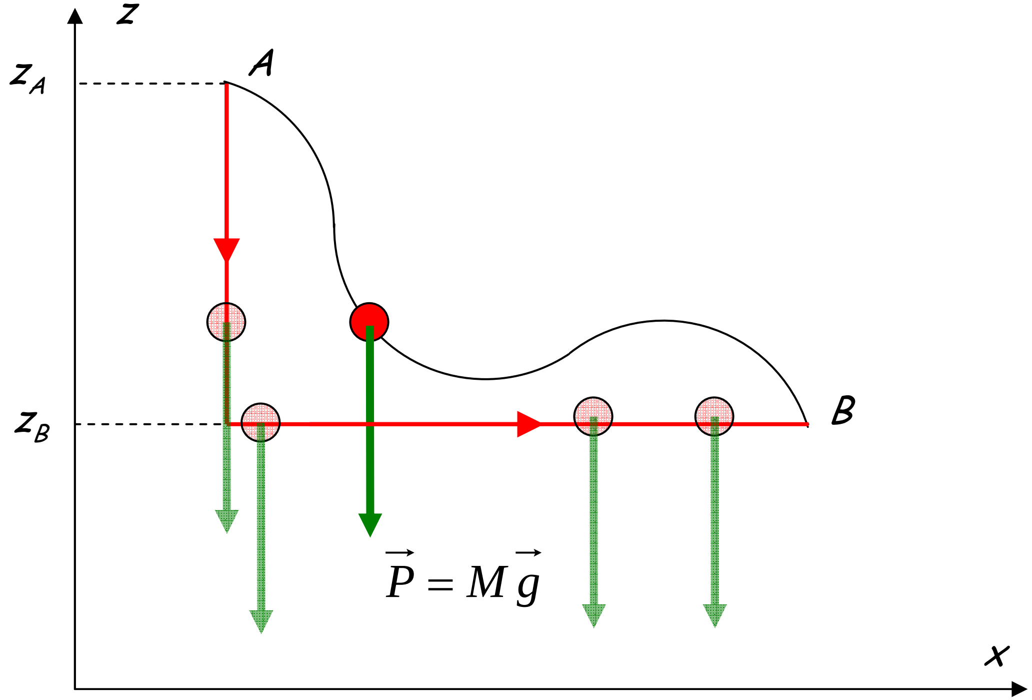
$$dW=\vec{P}\cdot\vec{dl}$$
$$=0\times dx+0\times dy-Mgdz$$

$$dW=-Mgdz$$

$$W_{AB}=\int_A^B -Mgdz=-Mg\int_{z_A}^{z_B}dz$$

$$W_{AB}=-Mg[z]_{z_A}^{z_B}=-Mg[z_B-z_A]$$

$$\boxed{W_{AB}=Mg(z_A-z_B)}$$



La DIMINUTION d'énergie potentielle est égale au travail de la force

Energie potentielle de pesanteur $\boxed{E_p(z)=Mgz}$

$$\boxed{W_{AB}=E_p(z_A)-E_p(z_B)}$$

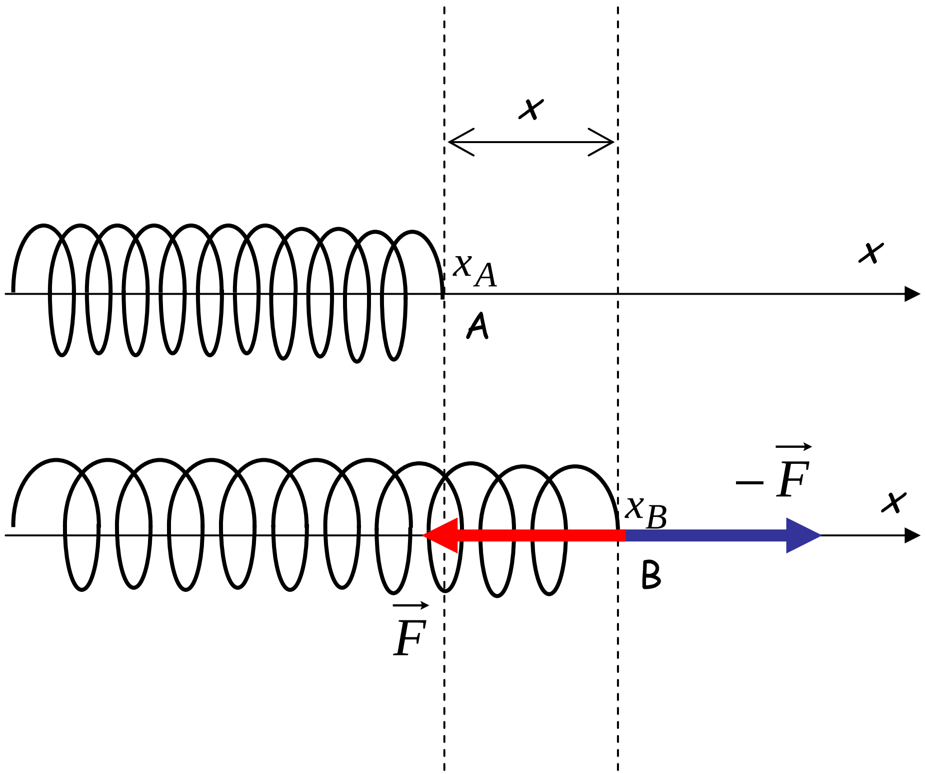
Initiale

Finale

$$P=-\frac{dE_p(z)}{dz}=-\frac{d(mgz)}{dz}=-mg\frac{dz}{dz}=-mg$$

3.2 Energie potentielle élastique

Force de rappel $\vec{F}\begin{cases}-kx\\0\\0\end{cases}$ $\vec{dl}=\begin{cases}dx\\0\\0\end{cases}$



Travail au cours d'un déplacement élémentaire

$$dW=\vec{F}\cdot\vec{dl}=-kxdx$$

$$W_{AB}=\int_A^B -kxdx=-k\int_{x_A}^{x_B} xdx$$

$$W_{AB}=-k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_A}^{x_B}=-\frac{k}{2}\left[x_B^2-x_A^2\right]$$

$$\boxed{W_{AB}=\frac{1}{2}k\left(x_A^2-x_B^2\right)}$$

Négatif: travail résistant

Energie potentielle élastique $$\boxed{E_p(x)=\frac{1}{2}kx^2(+Cte)}$$

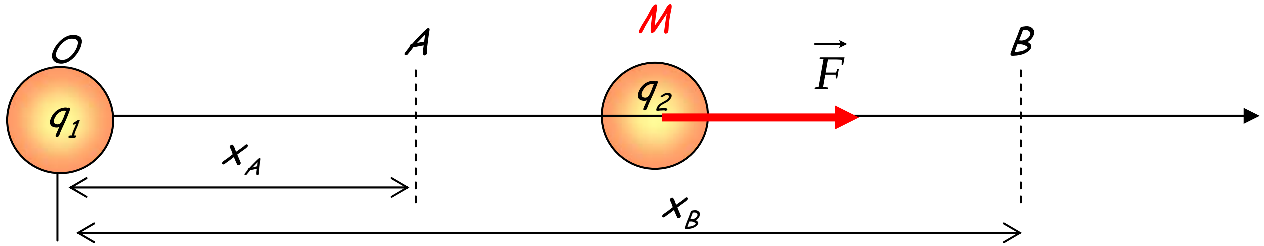
$$\boxed{W_{AB}=E_p(x_A)-E_p(x_B)}$$

$$\boxed{W_{AB}<0 \qquad E_p(x_B)>E_p(x_A)}$$

3.3 Energie potentielle électrostatique

Attraction/répulsion entre deux charges électriques

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{x^2}$$



Si $q_1\, q_2 > 0$ (charges de même signe) force répulsive

Si $q_1\, q_2 < 0$ (charges de signes contraires) force attractive

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}\cdot dx$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x_A}^{x_B}\frac{dx}{x^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]_{x_A}^{x_B} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[-\frac{1}{x_B}+\frac{1}{x_A}\right]$$

$$\boxed{W_{AB} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{x_A}-\frac{1}{x_B}\right]}$$

Energie potentielle électrostatique

$$\boxed{E_p(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{x}}$$

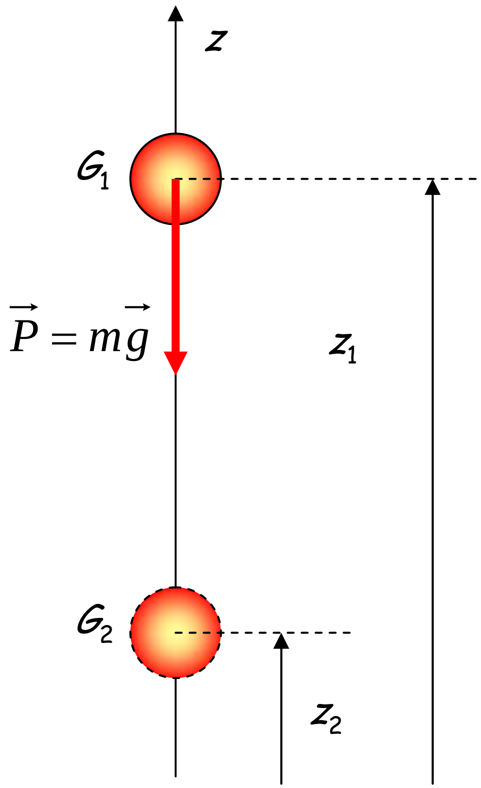
$$\boxed{W_{AB} = E_p(x_A) - E_p(x_B)}$$

4. ENERGIE MECANIQUE TOTALE

L'énergie mécanique totale est la somme de l'énergie cinétique totale (translation +rotation) et de l'énergie potentielle

$$\boxed{E_{tot} = E_c + E_p} \qquad \boxed{E_c = E_{c,t} + E_{c,r}}$$

L'énergie mécanique totale d'un système isolé se conserve



Exemple: chute libre

A l'altitude z_1 $\quad E_1 = \frac{1}{2} m V_1^2 + mgz_1$

A l'altitude z_{12} $\quad E_2 = \frac{1}{2} m V_2^2 + mgz_2$

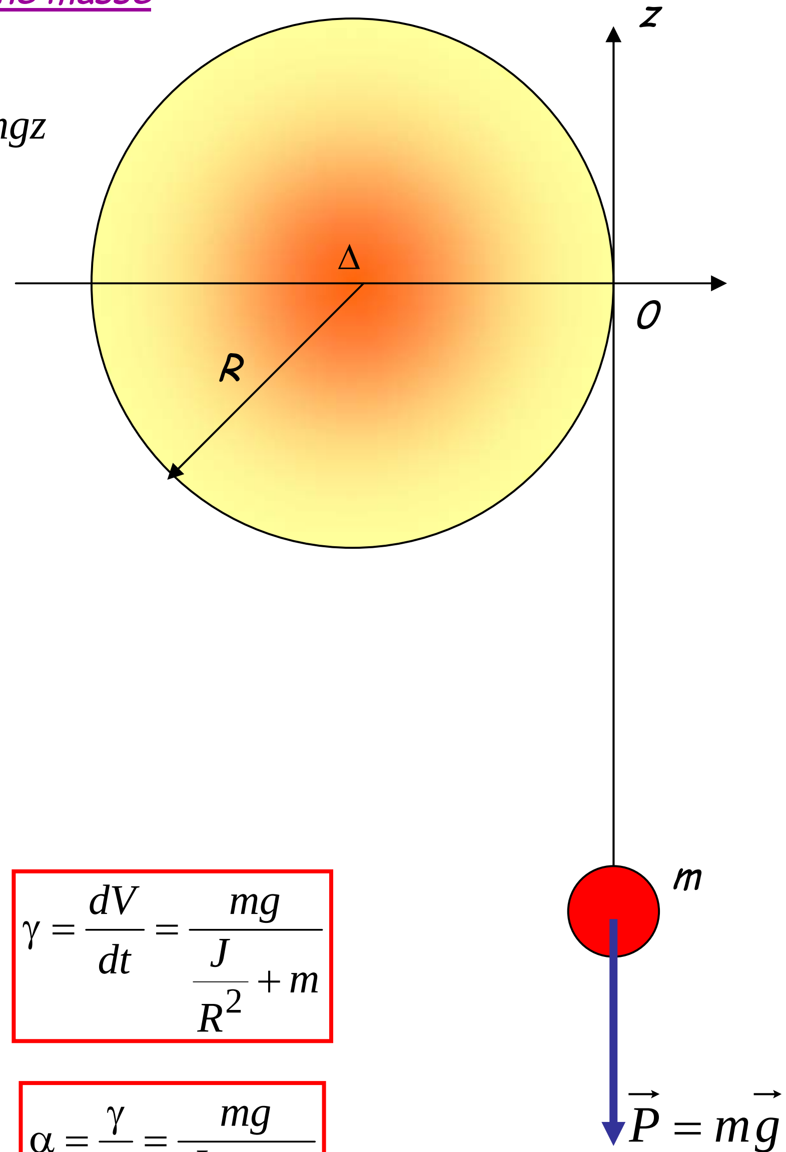
L'énergie mécanique totale se conserve $\quad E_1 = E_2$

$$\frac{1}{2} m V_1^2 + mgz_1 = \frac{1}{2} m V_2^2 + mgz_2$$

$$\boxed{V_2^2 - V_1^2 = 2g(z_1 - z_2)}$$

Exemple: accélération d'une poulie accélérée par une masse

Energie mécanique totale $E = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mV^2 - mgz$



Relation entre la vitesse linéaire et
la vitesse angulaire

$$\omega = \frac{V}{R}$$

$$E = \frac{1}{2}J\frac{V^2}{R^2} + \frac{1}{2}mV^2 - mgz$$

L'énergie mécanique totale se conserve

$$\frac{1}{2}J\frac{V^2}{R^2} + \frac{1}{2}mV^2 - mgz = Cte$$

En dérivant cette équation

$$\frac{1}{2}\frac{J}{R^2}(2V\frac{dV}{dt}) + \frac{1}{2}m(2V\frac{dV}{dt}) - mg\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{J}{R^2}V\frac{dV}{dt} + mV\frac{dV}{dt} - mgV = 0$$

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right)\frac{dV}{dt} - mg = 0$$

$$\boxed{\gamma = \frac{dV}{dt} = \frac{mg}{\frac{J}{R^2} + m}}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\gamma}{R} = \frac{mg}{\frac{J}{R} + mR}}$$