Forces; Moments

INTRODUCTION

Toute action mécanique s'exerçant sur un objet a pour effet soit:

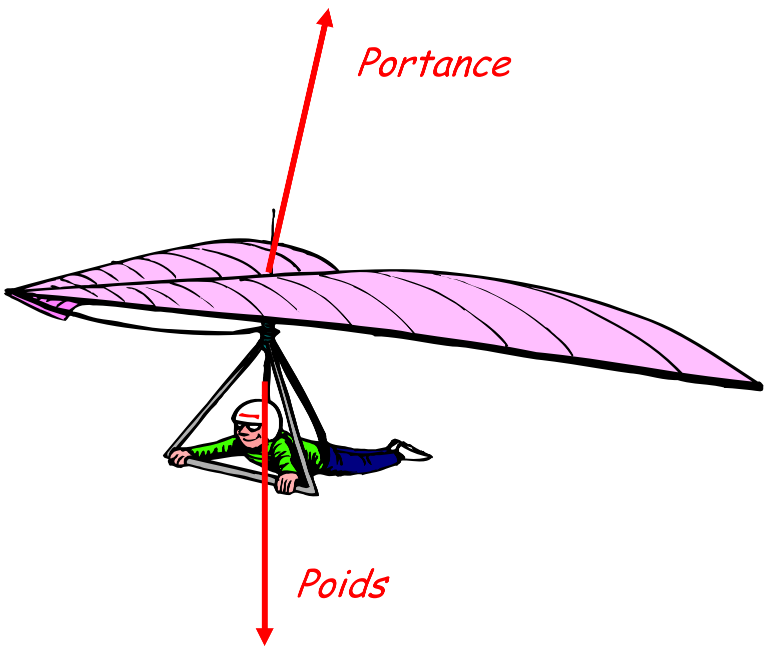
- de modifier son mouvement ou de le mettre en mouvement,
- de le maintenir en équilibre,
- de le déformer.

Toute action mécanique exercée sur un objet est décrite par quatre caractéristiques:

- le point d'application,
- la droite d'action,
- le sens,
- la valeur: son intensité.

Caractéristiques d'un VECTEUR

Une FORCE est une grandeur vectorielle

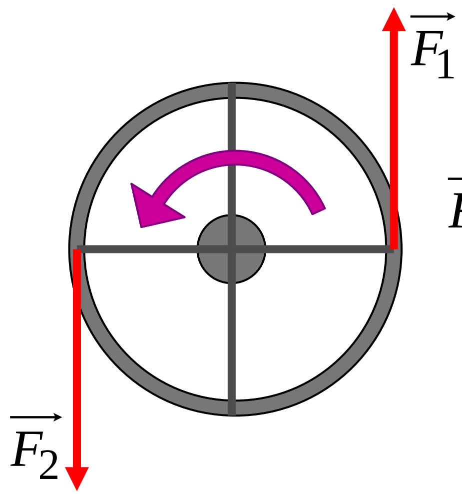


Une action sur un solide se décrit en général par **PLUSIEURS FORCES**.

ATTENTION !!

Il est souvent insuffisant de ne connaître que la somme vectorielle de toutes les forces pour décrire le mouvement d'un solide.

Une somme des forces **nulle** peut mettre en mouvement un solide (cas d'un couple de forces).



$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 0$$

Il est nécessaire de connaître une grandeur supplémentaire, le ***MOMENT*** total des forces (somme vectorielle des moments des forces) s'exerçant sur le solide.

Somme vectorielle des forces

+

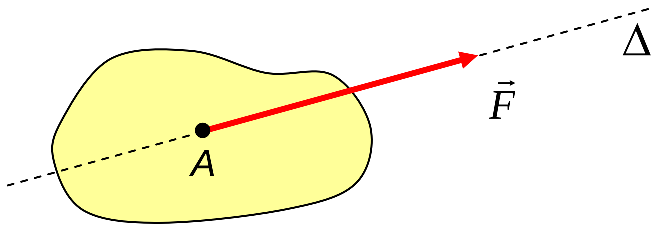
Somme vectorielle des moments des forces

= **TORSEUR FORCE**

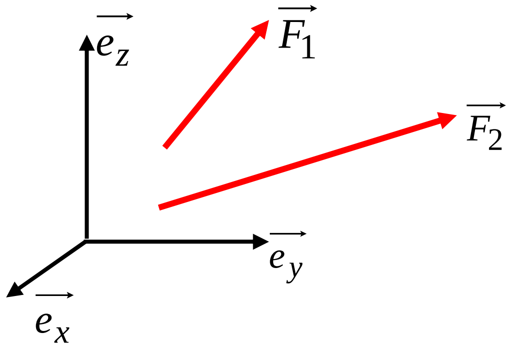
1. LES FORCES

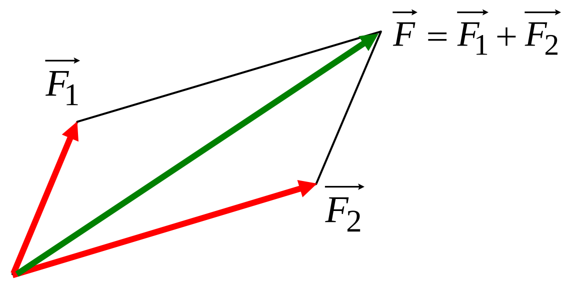
Caractéristiques d’une force

- son ***point d'application***, *A*
- sa ***droite d'action***, Δ
- son ***sens***,
- son ***intensité***, *F*.



Les forces suivent donc les lois de l'algèbre des vecteurs,

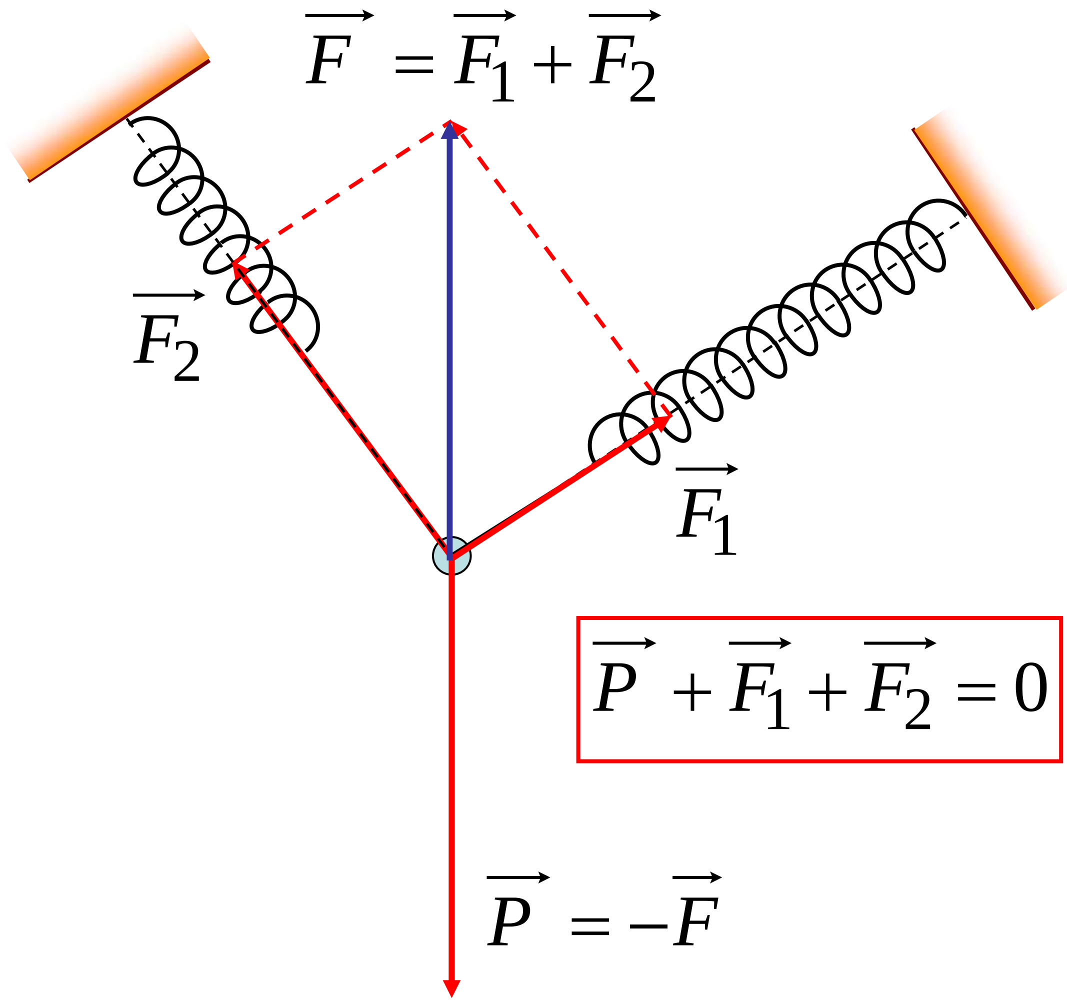




Pour les composantes

$$\overrightarrow{F_1} = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1z} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{F_2} = \begin{bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{2z} \end{bmatrix} \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} f_{1x} + f_{2x} \\ f_{1y} + f_{2y} \\ f_{1z} + f_{2z} \end{bmatrix}$$

Exemple: solide ponctuel suspendu à 2 ressorts



$$\boxed{\vec{P} + \vec{F_1} + \vec{F_2} = 0}$$

Les forces peuvent être regroupées en trois familles:

- les ***forces de champ***: force de ***gravitation***, force ***électrostatique***, force ***magnétique***,
- les ***forces de contact***: force de ***frottement***,
- les ***forces nucléaires*** assurant la cohésion du noyau atomique.

Les forces s'expriment en ***Newton***, noté N

__Exemple:__

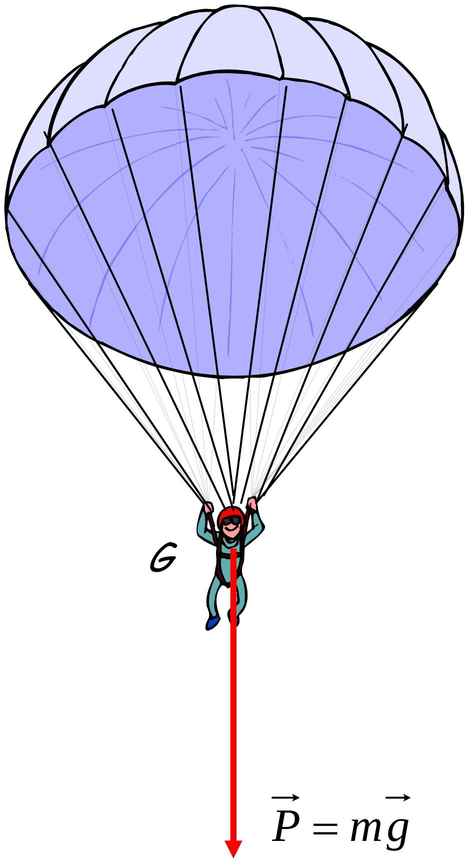
Le ***poids*** appartient à la première famille.

Défini par les caractéristiques suivantes:

- son point d'application: le ***centre d'inertie*** (***centre de gravité***) du solide
- sa droite d'action: la verticale,
- son sens: du haut vers le bas,
- son intensité:

$$\boxed{P = m \cdot g}$$

m, masse en kg du solide
g, accélération de la pesanteur (*g* = 9,81 m/s² sur la terre).



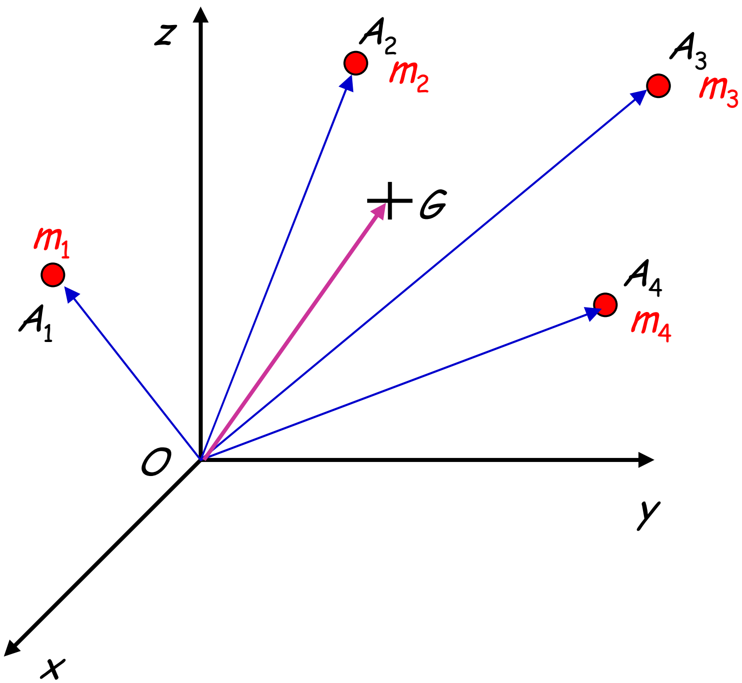
$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Centre de gravité d'un ensemble de points

Définition: moyenne pondérée

Exemple: 4 points, A_1, A_2, A_3, A_4, de masses m_1, m_2, m_3, m_4

$$A_1\begin{cases}x_1\\y_1\\z_1\end{cases}\quad A_2\begin{cases}x_2\\y_2\\z_2\end{cases}\quad A_3\begin{cases}x_3\\y_3\\z_3\end{cases}\quad A_4\begin{cases}x_4\\y_4\\z_4\end{cases}$$



Soit M la masse totale des 4 points

$$\boxed{M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Chaque point intervient proportionnellement à sa masse

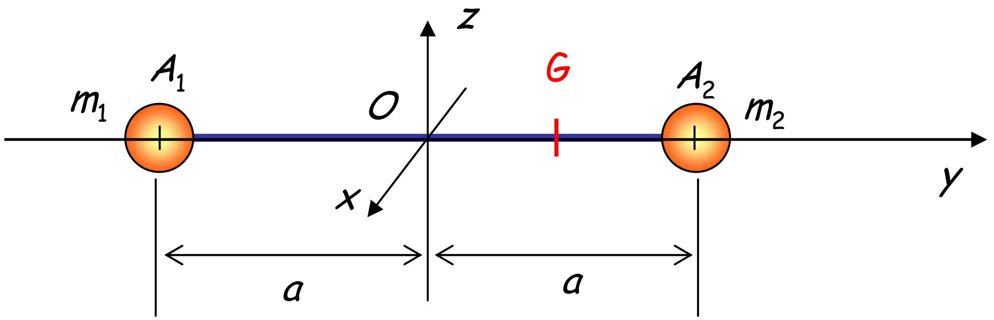
$$\boxed{M\,\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + m_3\overrightarrow{OA_3} + m_4\overrightarrow{OA_4}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + m_3\overrightarrow{OA_3} + m_4\overrightarrow{OA_4}}{M}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \begin{cases} x_G = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{M} \\ y_G = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4}{M} \\ z_G = \dfrac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + m_4z_4}{M} \end{cases}}$$

Exemple: 2 sphères reliées par une tige de masse négligeable. Les rayons des sphères sont supposés suffisamment petits pour pouvoir être négligés.

Par symétrie: $x_G = 0$ et $y_G = 0$



$$A_1\begin{cases}0\\-a\\0\end{cases} \qquad A_2\begin{cases}0\\a\\0\end{cases}$$

$$M = m_1 + m_2$$

$$y_G = \frac{(-a)m_1 + am_2}{M} \qquad \boxed{y_G = -\frac{m_1}{M}a + \frac{m_2}{M}a}$$

Application numérique: a = 50 cm, m_1 = 100 g, m_2 = 300 g

$$y_G = -\frac{100}{400}50 + \frac{300}{400}50 = 25\,\text{cm}$$

Remarque:

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_1} \qquad \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_2}$$

$$M\,\overrightarrow{OG} = m_1\left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_1}\right) + m_2(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_2})$$

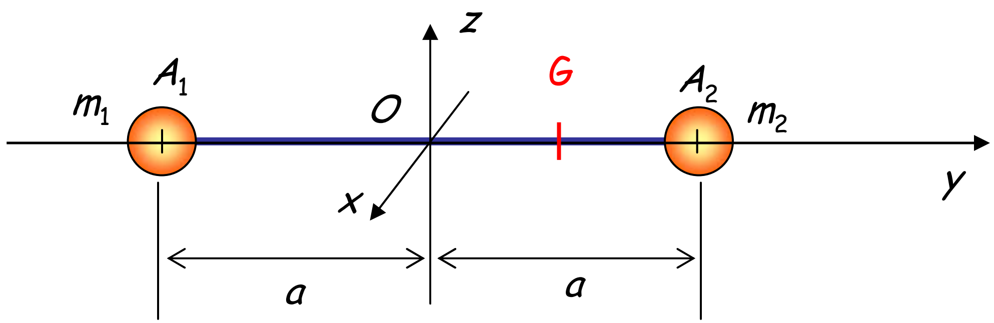
$$M\,\overrightarrow{OG} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} + m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2}$$

$$M\,\overrightarrow{OG} = M\,\overrightarrow{OG} + m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2}$$

$$0 = m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2}$$

$$\boxed{m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} = 0}$$

Application au cas de 2 masses



$$\overrightarrow{OG} = \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \dfrac{m_2 - m_1}{M} a \\ z_G = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -a \\ z_1 = 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{OA_2} = \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = a \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

$$y_1 - y_G = -a - \frac{m_2 - m_1}{M} a = -\frac{m_1 + m_2 + m_2 - m_1}{M} a = \frac{-2m_2}{M} a$$

$$y_2 - y_G = a - \frac{m_2 - m_1}{M} a = \frac{m_1 + m_2 - m_2 + m_1}{M} a = \frac{2m_1}{M} a$$

$$m_1(y_1 - y_G) + m_2(y_2 - y_G) = -\frac{2m_1 m_2}{M} a + \frac{2m_1 m_2}{M} a = 0$$

$$\boxed{m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2} = 0}$$

Cas général d'un ensemble de N points

Exemple: N points, A_1, A_2,……. A_N, de masses m_1, m_2, ……, m_N

Masse totale

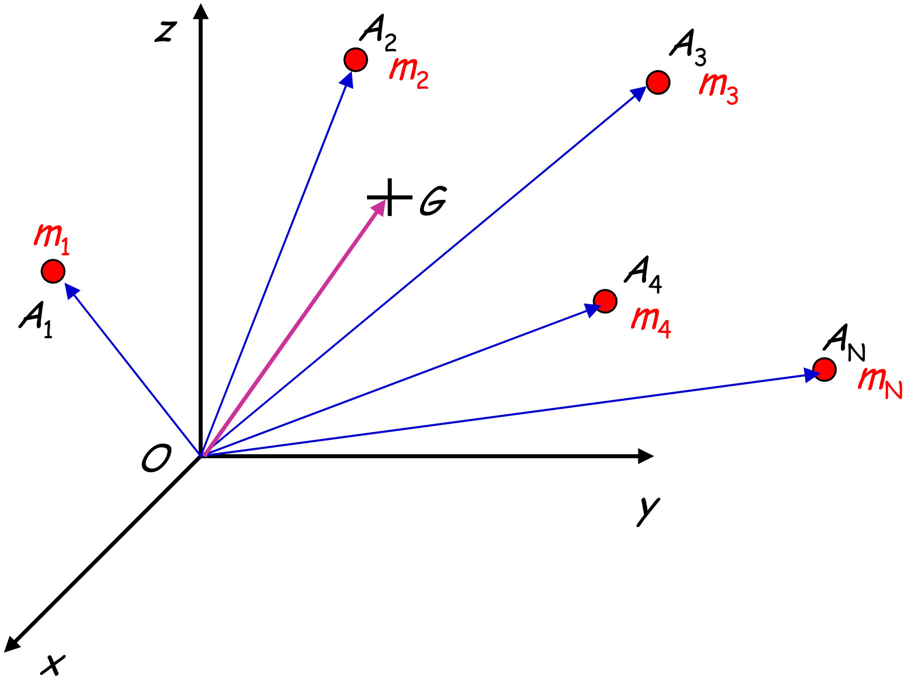
$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Centre de gravité

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA_i}}$$

Coordonnées

$$\boxed{\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\ y_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\ z_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \end{cases}}$$



$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GA_i} = 0}$$

Cas d'un solide quelconque: *distribution continue* de points. PRINCIPE DU CALCUL

On divise le volume en un un très grand nombre (infinité) de petits **volumes élémentaires** (cubiques), entourant chacun un point A_i. Chaque volume élémentaire vaut

$$dV = dxdydz$$

Chaque volume contient une masse élémentaire égale à

$$dm = \rho dV$$

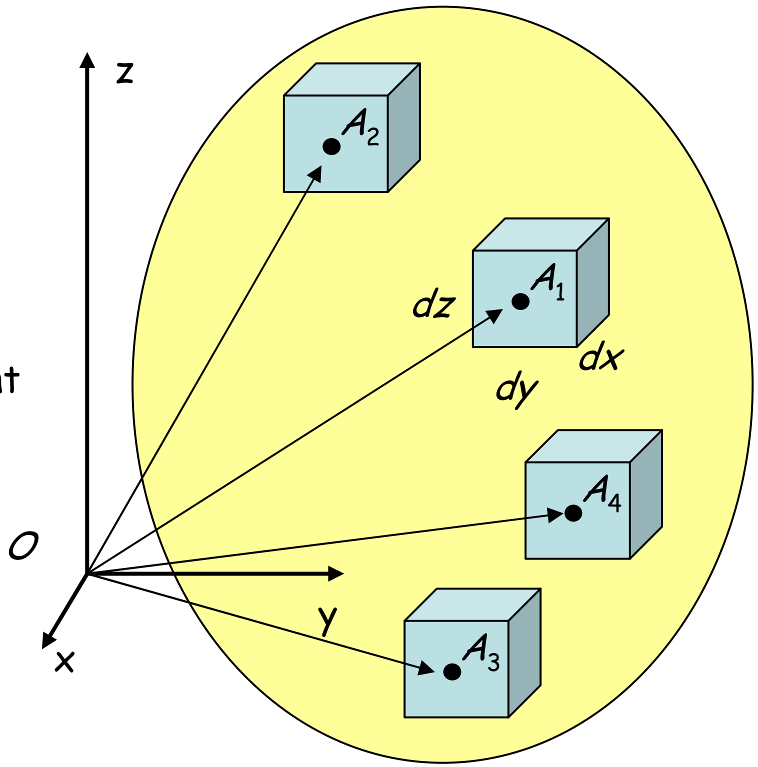
ρ = masse volumique = masse de l'unité de volume

On est ramené au cas de *n* points matériels; les points matériels sont les volumes infiniment petits

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{\text{Tous les volumes élémentaires}} \overrightarrow{OA} \cdot dm$$

M est la masse totale du solide

$$M = \sum_{\text{Tous les volumes élémentaires}} dm$$



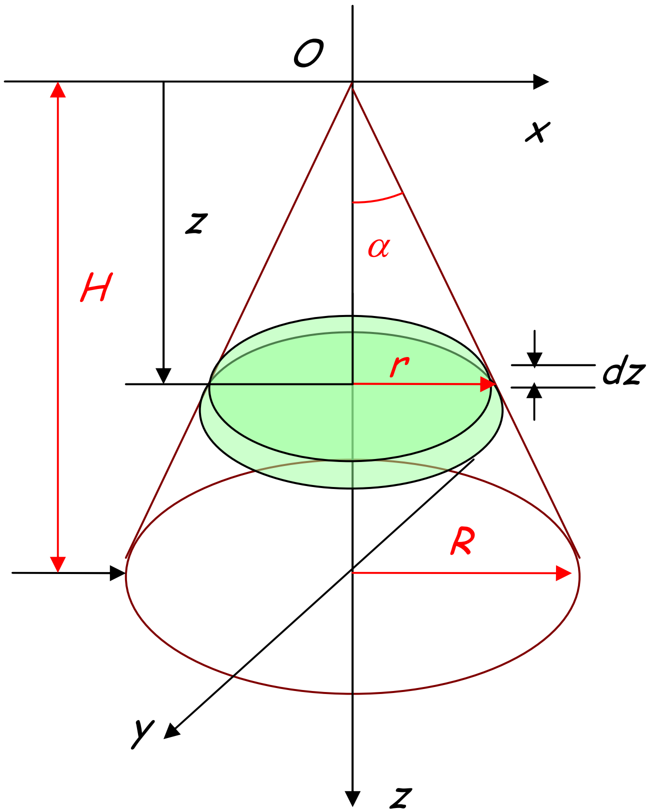
Puisque la taille des volumes élémentaires est infiniment petite, l'expression précédente devient une intégrale

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \int_{Volume} \overrightarrow{OA} \cdot dm = \frac{1}{M} \int_{Volume} \overrightarrow{OA} \cdot \rho dV$$

$$M = \int_{Volume} dm = \int_{Volume} \rho dV$$

Exemple: centre de gravité d'un cône

ρ = masse volumique (masse de l'unité de volume)



Relation de proportionnalité: $\frac{r}{R} = \frac{z}{H}$

Volume du disque élémentaire $dV = \pi r^2 dz$

Masse du disque élémentaire $dm = \rho \cdot \pi r^2 dz$

$$dm = \rho \cdot \pi \frac{R^2 z^2}{H^2} dz \qquad A = \rho \cdot \pi \frac{R^2}{H^2} \qquad dm = Az^2 dz$$

Masse totale du cône

$$M = \int_0^H Az^2 dz \qquad M = A\int_0^H z^2 dz = A\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^H = \frac{AH^3}{3}$$

Coordonnée du centre de gravité:

$$z_G = \frac{1}{M}\int_0^H z \cdot Az^2 dz \qquad z_G = \frac{1}{M} A\int_0^H z^3 dz = \frac{A}{M}\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^H = \frac{A}{M}\frac{H^4}{4}$$

$$z_G = \frac{AH^4}{4}\frac{3}{AH^3} = \frac{3}{4}H \qquad \boxed{z_G = \frac{3}{4}H}$$

ANNEXE ANNEXE ANNEXE ANNEXE ANNEXE ANNEXE

2. ROTATION AUTOUR D'UN AXE: MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN AXE

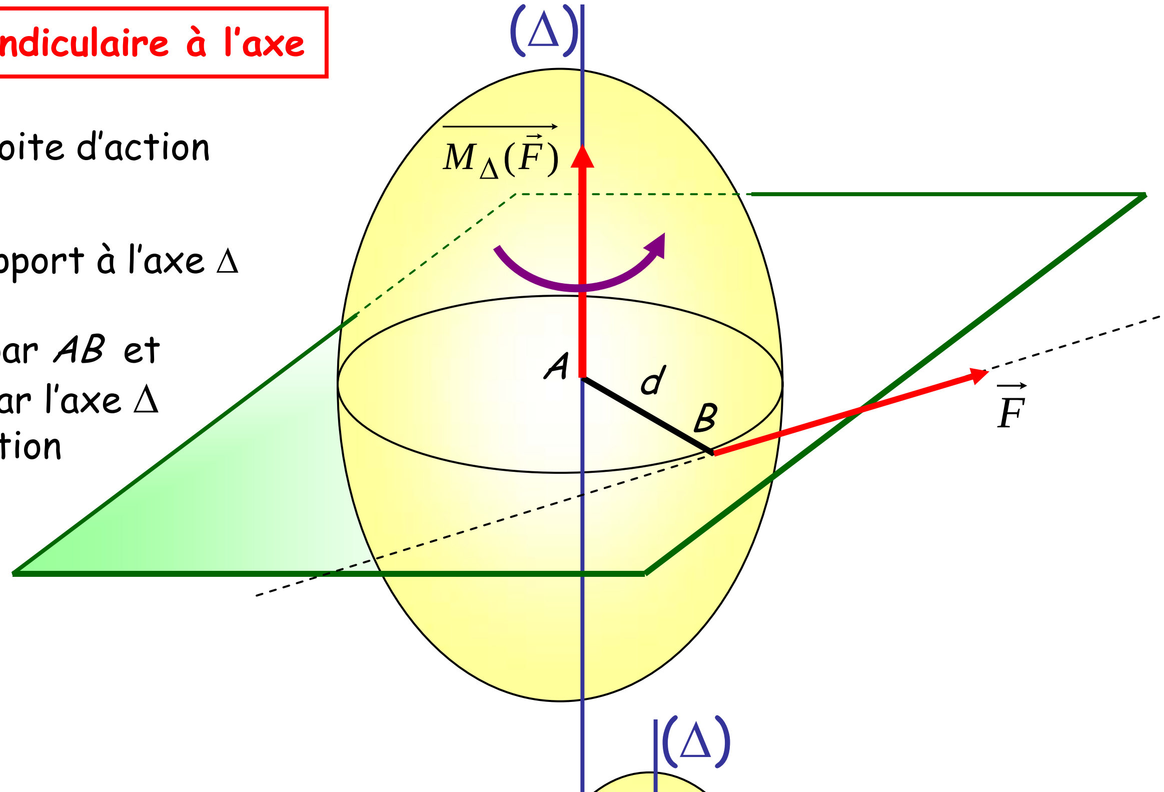
On se limite au cas d'une force perpendiculaire à l'axe

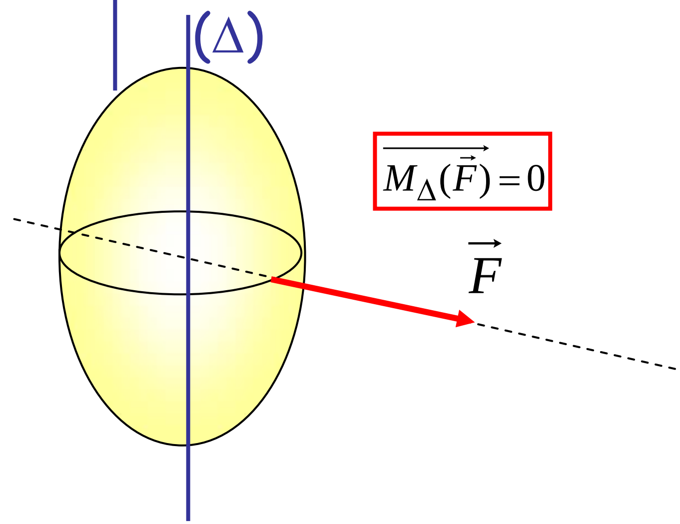
Soit *d* la distance entre l'axe Δ et la droite d'action de la force ($d = AB$)

Le ***moment vectoriel*** de la force par rapport à l'axe Δ est un vecteur:

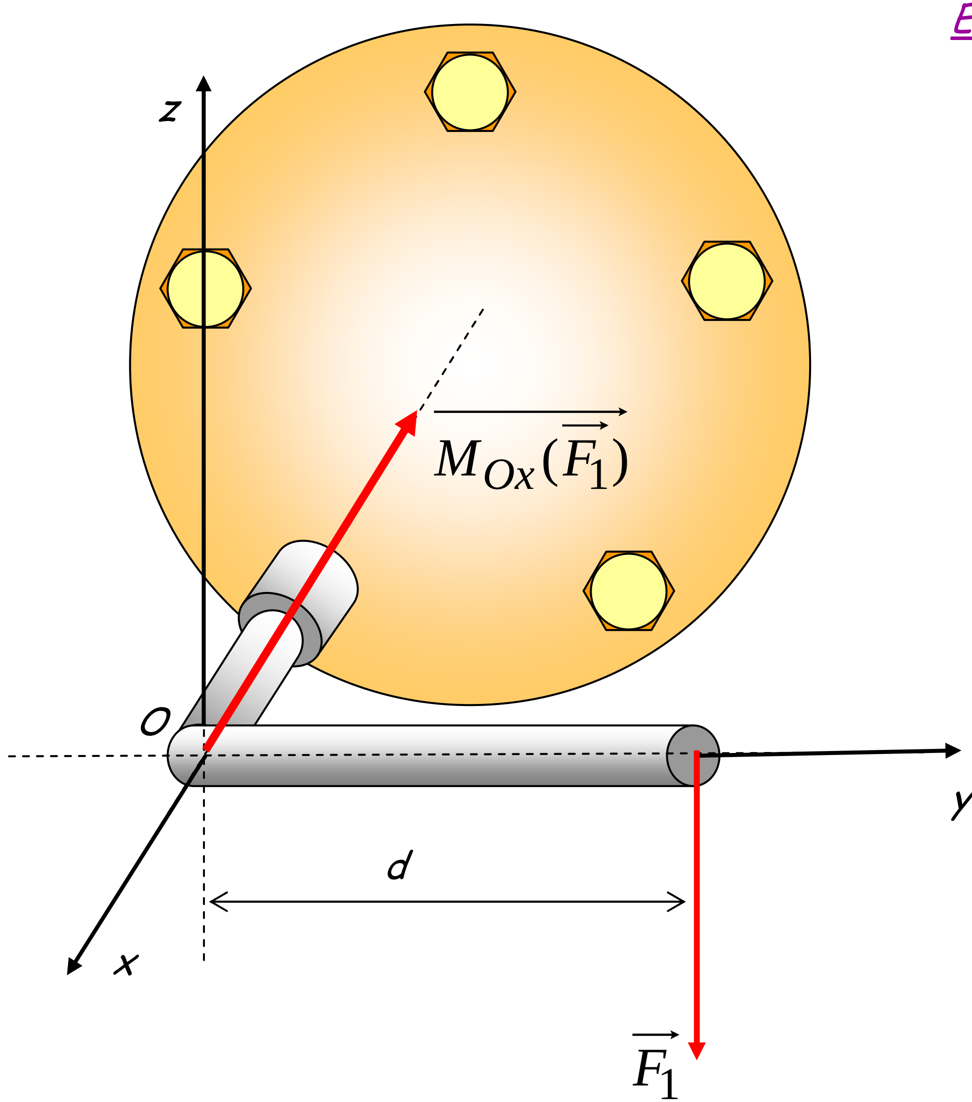
- perpendiculaire au plan déterminé par AB et la droite d'action de F donc porté par l'axe Δ
- dont le sens indique le sens de rotation imposé par la force (règle de la main droite)
- de module égal à:

$$\boxed{\left|\overrightarrow{M_\Delta(\vec{F})}\right| = F.d}$$





__Remarque:__ si la droite d'action de la force passe par l'axe de rotation,le moment de la force par rapport à l'axe est nul ($d = 0$)

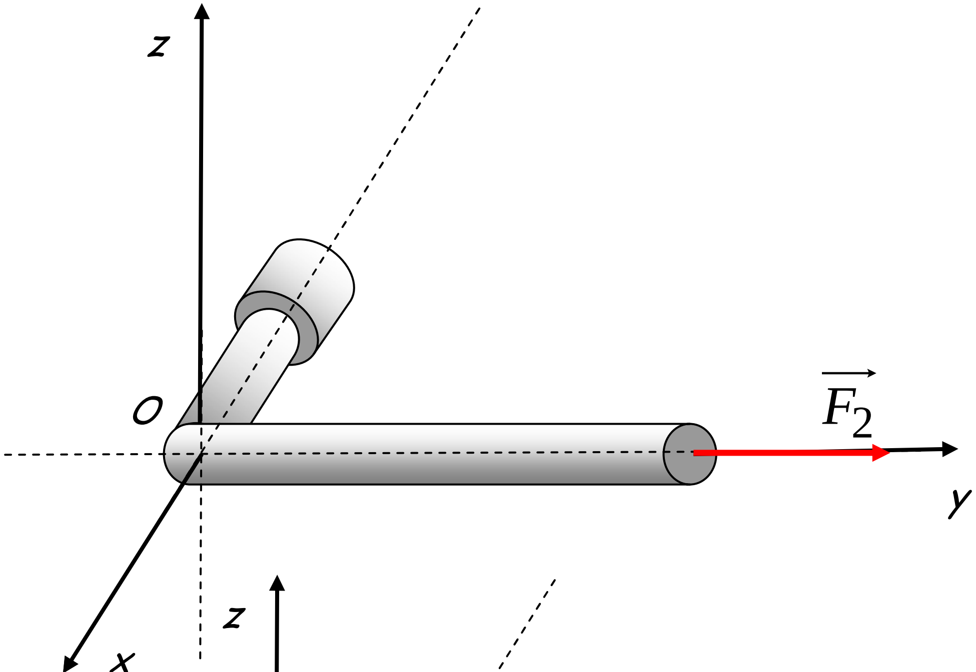


Exemple: serrage d'un boulon

CAS N° 1: F_1 suivant - Oz

$$\left|\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_1})}\right| = F_1 d$$

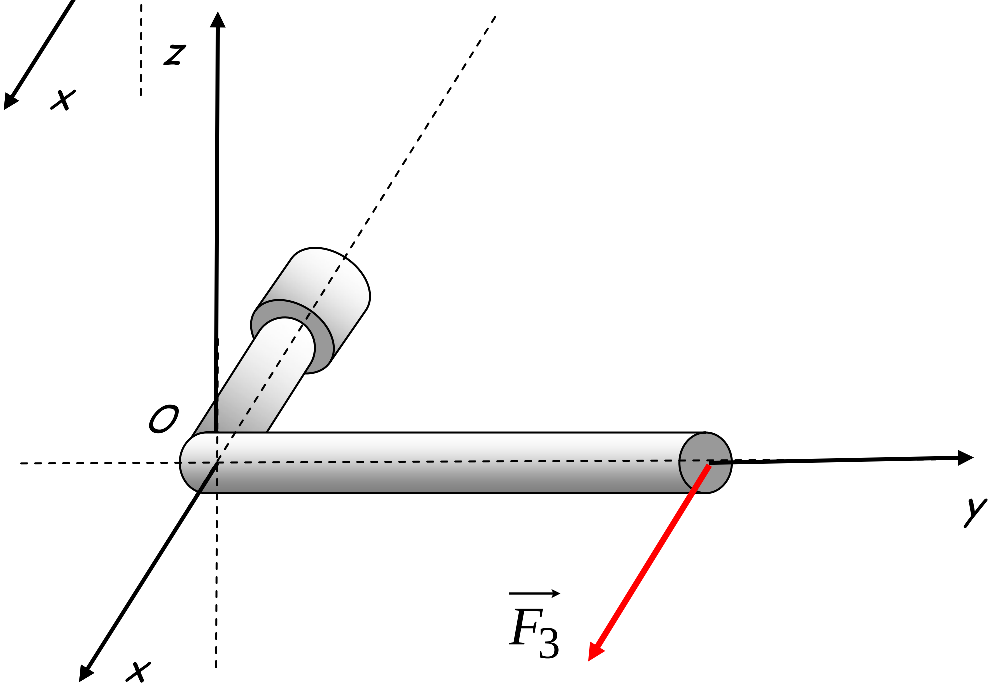
$\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_1})}$ dirigé suivant - Ox



CAS N° 2: F_2 suivant *Oy*

$$\left|\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_2})}\right| = 0$$

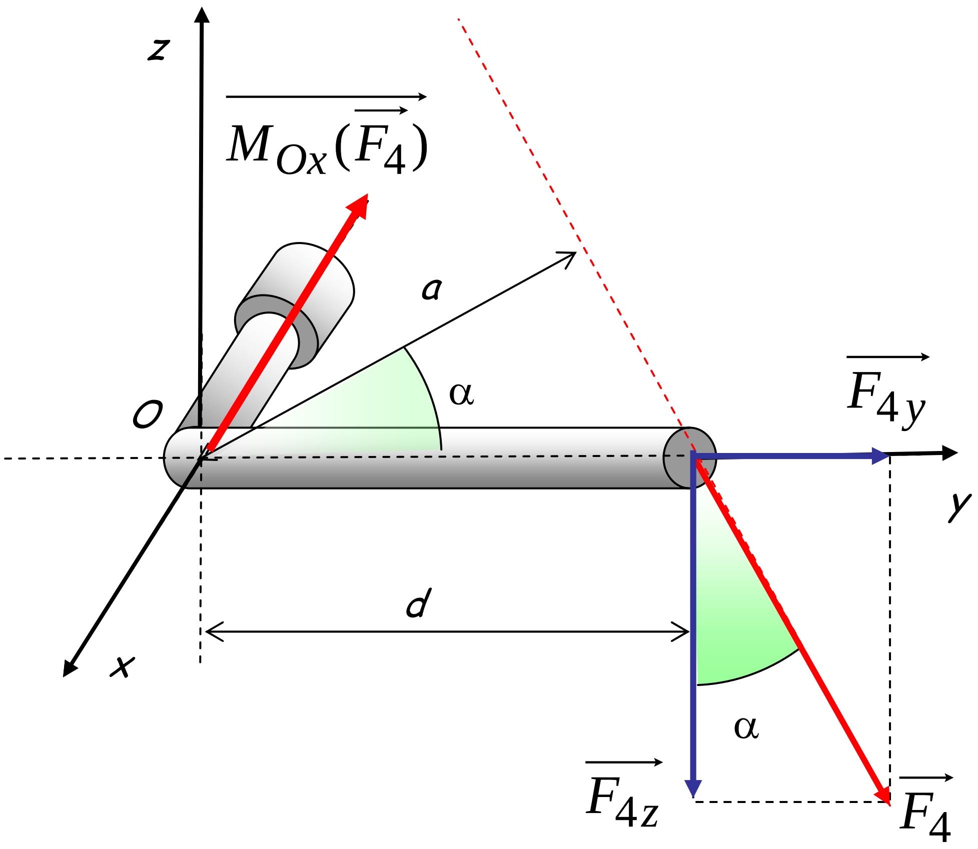
$\overrightarrow{F_2}$ passe par l'axe



CAS N° 3: F_3 suivant *Ox*

$$\left|\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_3})}\right| = 0$$

$\overrightarrow{F_3}$ n'est pas perpendiculaire à l'axe mais parallèle à l'axe



CAS N° 4: F_4 avec:
- une composante suivant – Oz
- une composante suivant Oy

$$\boxed{\begin{aligned}\left|\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_4})}\right| &= F_4 a \\ &= F_4 d\cos\alpha\end{aligned}}$$

$$\boxed{\left|\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_4})}\right| = F_{4z} d}$$

Seule la composante suivant –Oz intervient

$$\overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{F_{4y}} + \overrightarrow{F_{4z}}$$

$$\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_4})} = \underbrace{\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_{4y}})}}_{\substack{=0 \\ \text{(Cas n°2)}}} + \underbrace{\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_{4z}})}}_{\text{Cas n°1}}$$

$$\boxed{\left|\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_4})}\right| = \left|\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_{4z}})}\right|}$$

COUPLE DE FORCES

$$\left|\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_1})}\right| = F_1 \frac{L}{2} = F\,\frac{L}{2}$$

$\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_1})}$ dirigé suivant Ox

$$\left|\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_2})}\right| = F_2 \frac{L}{2} = F\,\frac{L}{2}$$

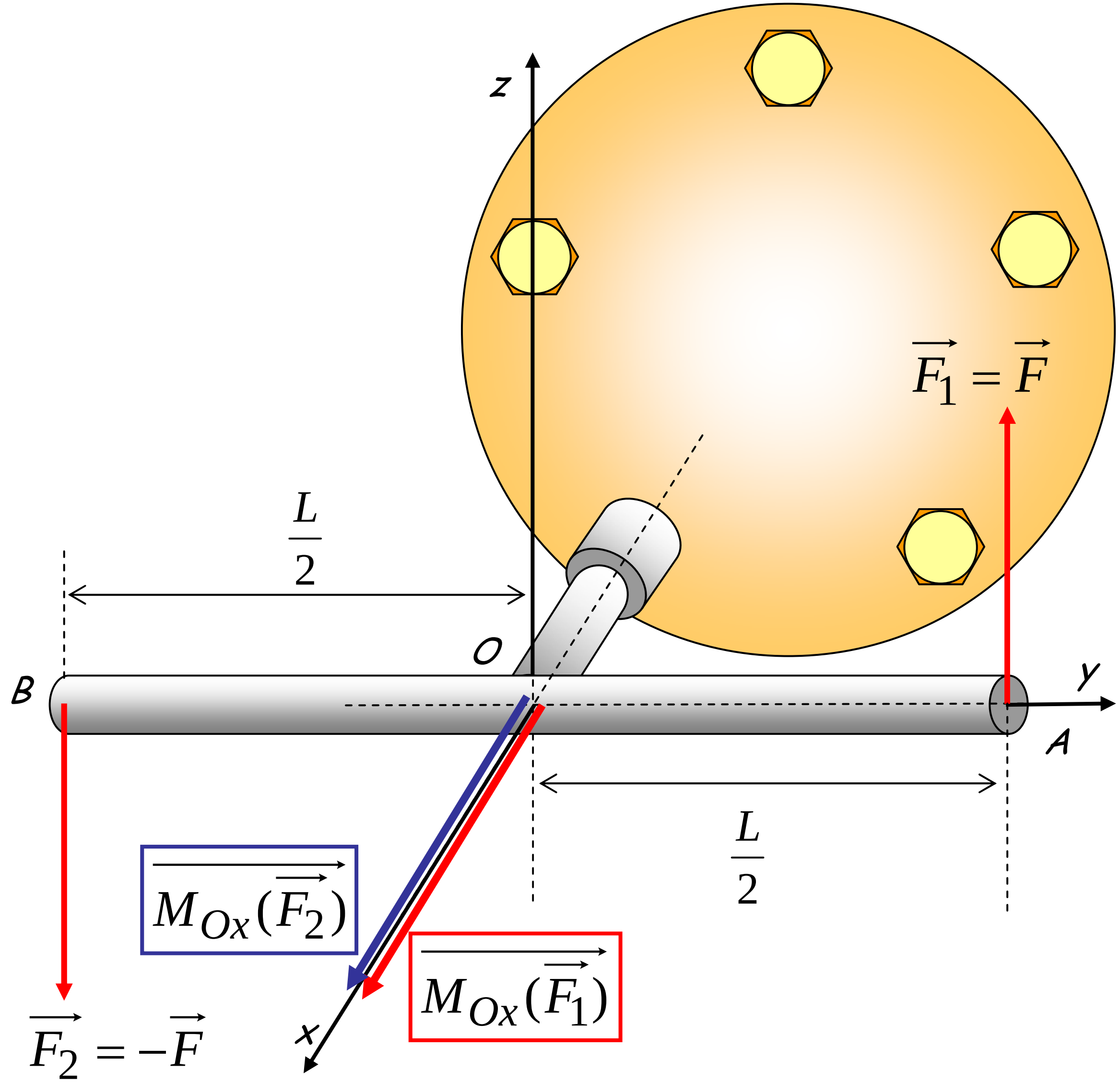
$\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_2})}$ dirigé suivant Ox

Résultante des forces

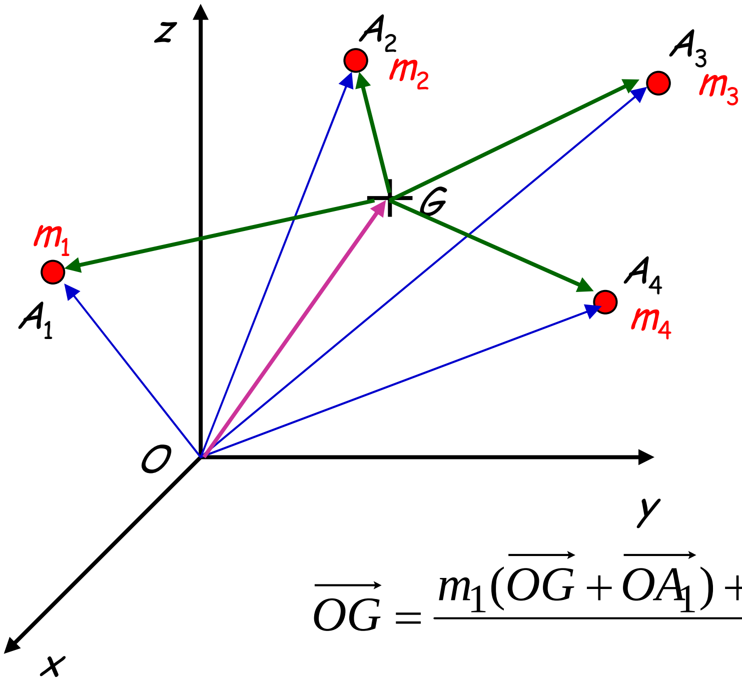
$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 0$$

Moment résultant (**COUPLE**)

$$\left|\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_1})}\right| + \left|\overrightarrow{M_{Ox}(\overrightarrow{F_2})}\right| = F \cdot L$$



L'application d'un couple à un solide a généralement pour effet de le mettre en rotation



$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + m_3\overrightarrow{OA_3} + m_4\overrightarrow{OA_4}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_1}$$
$$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_2}$$
$$\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_3}$$
$$\overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_4}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA_1}) + m_2(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA_2}) + m_3(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA_3}) + m_4(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA_4})}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\overrightarrow{OG}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} + \frac{m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} + m_3\overrightarrow{GA_3} + m_4\overrightarrow{GA_4}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG} + \frac{m_1\overrightarrow{GA_1}) + m_2\overrightarrow{GA_2} + m_3\overrightarrow{GA_3} + m_4\overrightarrow{GA_4}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$0 = \frac{m_1\overrightarrow{GA_1}) + m_2\overrightarrow{GA_2} + m_3\overrightarrow{GA_3} + m_4\overrightarrow{GA_4}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

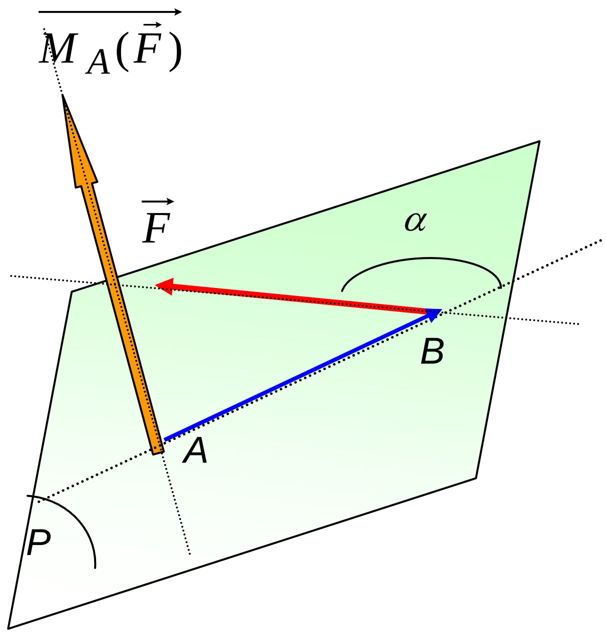
$$\boxed{m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} + m_3\overrightarrow{GA_3} + m_4\overrightarrow{GA_4} = 0}$$

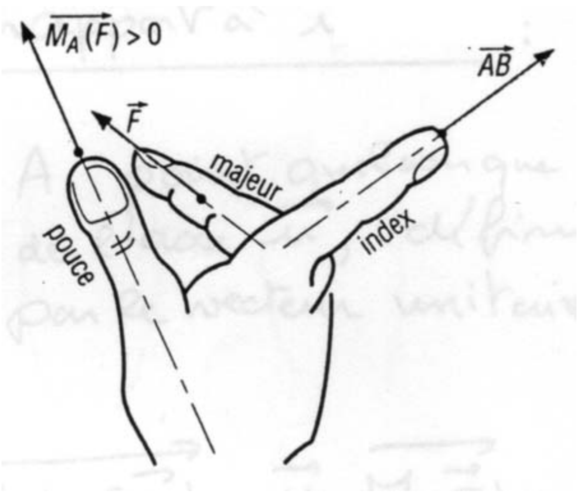
ANNEXE
ANNEXE ANNEXE ANNEXE ANNEXE ANNEXE

3. MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT

Force $\vec{F}$ Point d'application: *B*.

Moment vectoriel par rapport à un point A: $\boxed{\overrightarrow{M_A(\vec{F})} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}}$ Produit vectoriel



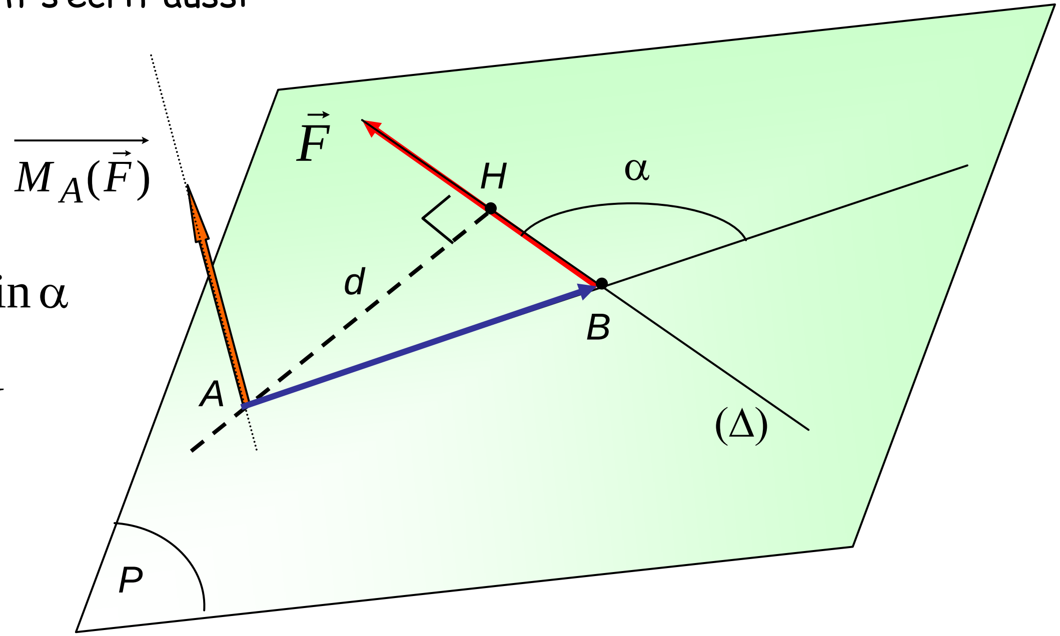


$\overrightarrow{M_A(\vec{F})}$ perpendiculaire au plan (*P*) déterminé par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la force $\vec{F}$
Sa direction est donnée par la règle des trois doigts de la main droite. Elle permet de connaître le sens dans lequel va s'effectuer la rotation du solide

Module $\boxed{\left|\overrightarrow{M_A(\vec{F})}\right| = AB \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \sin\alpha}$ UNITE: Newton.mètre (N.m)

ANNEXE ANNEXE ANNEXE ANNEXE ANNEXE ANNEXE

Le module du moment s'écrit aussi



$$\left|\overrightarrow{M_A(\vec{F})}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot AB \cdot \sin\alpha$$

$$\left|\overrightarrow{M_A(\vec{F})}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot AH$$

$$\boxed{\left|\overrightarrow{M_A(\vec{F})}\right| = F.d}$$

Le module du moment vectoriel est égal au produit du module de la force par la distance du point *A* à la droite d'action de la force.

Expression analytique du vecteur moment

$$\overrightarrow{AB} = \begin{cases} r_x \\ r_y \\ r_z \end{cases} \qquad \vec{F} = \begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \end{cases} \qquad \overrightarrow{M_A(\vec{F})} = \begin{cases} r_y F_z - r_z F_y \\ r_z F_x - r_x F_z \\ r_x F_y - r_y F_x \end{cases}$$