

Communications Numériques I

TNS4 - cours 2/5

Pierre COMON

Résumé du cours 1

■ Signal transmis (en bande porteuse)

$$\begin{aligned}x(t) &= x_c(t) \cos 2\pi f_o t - x_s(t) \sin 2\pi f_o t \\ &= a(t) \cos[2\pi f_o t + \phi(t)]\end{aligned}$$

■ Enveloppe complexe (en bande de base)

Si $X(f)$ est passe-bande:

$$\begin{aligned}\tilde{X}(f) &= \sqrt{2} U_+(f + f_o) X(f + f_o) \\ \Leftrightarrow \tilde{x}(t) &= x_c(t) + jx_s(t)\end{aligned}$$

■ Relation (en bande porteuse)

$$x(t) = \Re\{\tilde{x}(t) e^{2\pi j f_o t}\}$$

■ Transmission

$$y(t) = c(t) \star x(t) \Leftrightarrow \tilde{y}(t) = c^{\text{E}}(t) \star \tilde{x}(t)$$

où c^{E} est le canal équivalent: $C^{\text{E}}(f) = U_+(f + f_o) C(f + f_o) = \tilde{C}(f)/\sqrt{2}$

Terminologie

- **Modulation numérique:** associe une suite discrète de symboles, u_k , à une forme d'onde, $x(t)$.
- **Valence:** nombre M de symboles
- **Débit symbole:** $R_s = 1/T$, en Baud/s
- **Débit d'information:** $R_b = \frac{1}{T} \log_2 M$, en Bit/s
- **Mémoire L d'une modulation:**
Sur l'intervalle $t \in [T, (k+1)T]$, la sortie $x(t)$ dépend de $\{u_{k-L}, \dots, u_{k-1}, u_k\}$. Alors:

- on peut donc définir un état interne du modulateur:

$$S_k = \{u_{k-L}, \dots, u_{k-1}\}$$

- un modulateur invariant dans le temps s'écrit:

$$x(t) = \sum_k b(t - kT; u_k, S_k)$$

où $b(\cdot)$ ne dépend pas de k .

Modulations numériques linéaires

- Définition de linéarité: $x(t)$ associé à la suite $\{u_k, 1 \leq k \leq K\}$ est la superposition des $x(t)$ associés à chaque symbole u_k .

Modulations linéaires invariantes dans le temps:

- En bande porteuse:

$$x(t) = \sum_k \sqrt{2} \cos(2\pi f_o t) g_c(t - kT) x_c(u_k) - \sqrt{2} \sin(2\pi f_o t) g_s(t - kT) x_s(u_k)$$

- En bande de base:

$$\tilde{x}(t) = \sum_k g_c(t - kT) x_c(u_k) + j g_s(t - kT) x_s(u_k)$$

- Exemples: $u_k \in \{1, \dots, M\}$

- PAM (Pulse Amplitude Modulation):

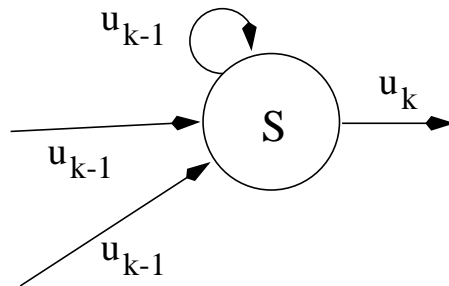
$$\tilde{x}(t) = \sum_k g(t - kT) (2u_k - 1 - M)$$

- PSK (Phase Shift Keying):

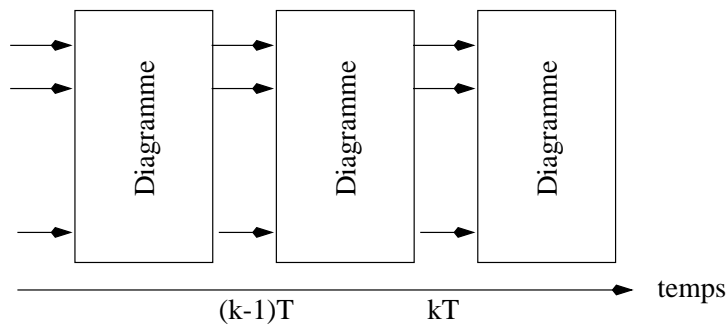
$$\tilde{x}(t) = \sum_k g(t - kT) e^{2j\pi u_k/M}$$

Modulations numériques

- Etats en nombre fini: $\leq M^L$ états
- Diagramme de transition entre états:
graphe(états=noeuds, arêtes orientées=transitions)
 - Labellisation possible des arêtes par (u, S) , si modulation invariante avec k .



- Treillis:
déplieement du diagramme de transition en fonction du temps.



Exemple: On-Off($M = 2, L = 2$)

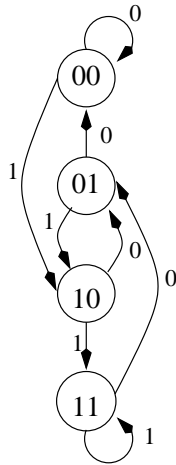
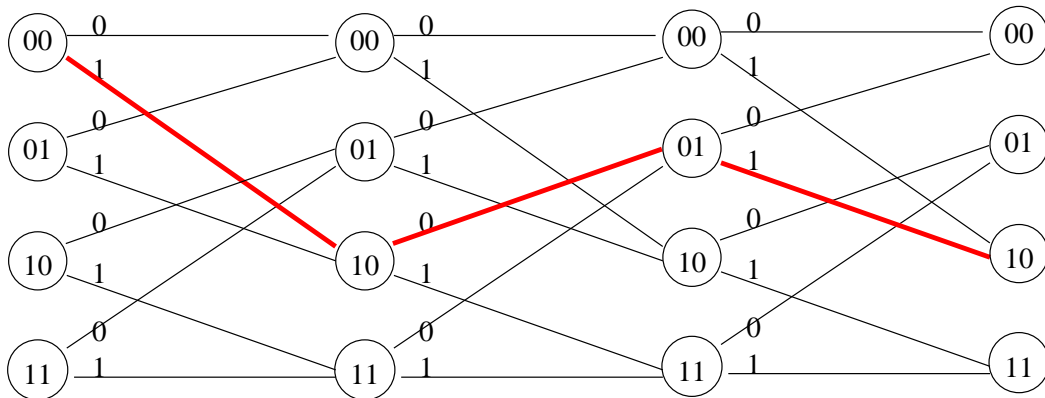


Diagramme de transition

$$S = (u_{k-1} u_{k-2})$$



sequence : 0 0 1 0 1

Trellis

Systèmes multi-antennes

- Nombre d'antennes à l'émission: P
- Nombre d'antennes à la réception: K
- Relation entrée-sortie du canal:

$$y_n(t) = \sum_{p=1}^P C_{np}(t) \star x_p(t) \Leftrightarrow \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \star \mathbf{x}(t)$$

Pour chaque t , $\mathbf{y}(t)$ est de dimension K , et $\mathbf{x}(t)$ de dimension P .

- Produit scalaire L^2 :

$$\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \rangle = \sum_p \langle f_p(t), g_p(t) \rangle$$

En particulier:

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_p \int_t |x_p(t)|^2 dt$$

Autres caractéristiques

Pour une modulation linéaire invariante dans le temps,

$$\mathbf{x}(t) = \sum_k \mathbf{s}(t - kT; u_k),$$

- Energie émise pour un symbole u (limitation nécessaire):

$$\mathcal{E}(u) = \|\mathbf{s}(t; u)\|^2$$

- Energie moyenne par symbole:

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{M} \sum_u \mathcal{E}(u)$$

- Energie moyenne par bit:

$$\mathcal{E}_b = \frac{1}{\log_2 M} \mathcal{E}_s$$

- Puissance moyenne:

$$P = R_s \mathcal{E}_s = R_b \mathcal{E}_b$$

- Ensemble des symboles

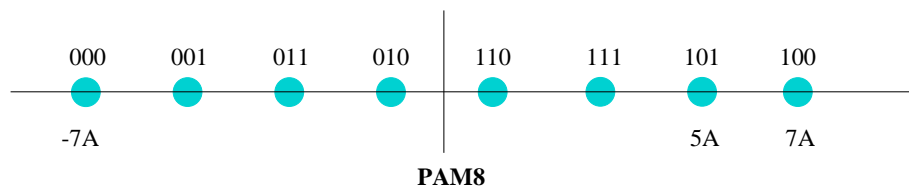
symboles réels: modulation dite 1-dimensionnelle

symboles complexes: modulation dite 2-dimensionnelle

(rien à voir avec P et K)

Constellation

- Dimension de l'espace de constellation:
dimension N de l'espace fonctionnel réel généré par les $\mathbf{s}(t; u)$
 - Par exemple $u = u_c + j u_s$
 - $N > 2$ si large bande (e.g. OFDM, CDMA)
- Définition
Ensemble des M symboles $s(u_k)$ représentés dans \mathbb{R}^N
Alors, nécessairement $N \leq M$
- Distance inter-symbole minimale: $d_{\min} = \text{Min}_{u \neq u'} \|s(u) - s(u')\|$
(utile pour calculer la probabilité d'erreur)
- Exemple
Si $\mathbf{s}(t; u) = g(t) s(u)$, alors $N = 1$.
 - Cas de la modulation PAM-M: $\tilde{x}(t) = A \sum_k g(t - kT) u_k$,
 $u = 2m - 1 - M, 1 \leq m \leq M \Rightarrow u \in \{-M + 1, \dots, M - 1\}$



Modulation QAM-M

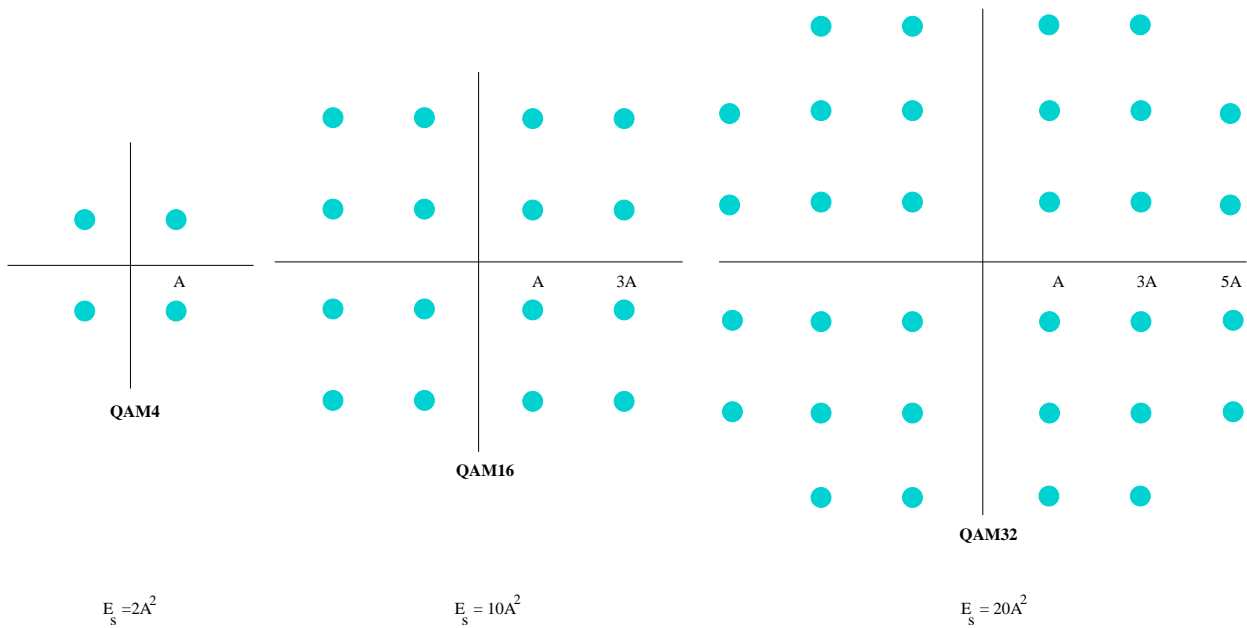
Quadrature Amplitude Modulation

- \sqrt{M} valeurs sur \Re et $\Im \Leftrightarrow M$ symboles.
- En bande porteuse:

$$x(t) = A \sum_k g(t - kT) \left[u_k^c \sqrt{2} \cos 2\pi f_o t - u_k^s \sqrt{2} \sin 2\pi f_o t \right]$$

- En bande de base: $\tilde{x} = A \sum_k g(t - kT) [u_k^c + ju_k^s]$
- Distance et énergie:

$$d_{\min} = 2A, \quad E_1 = 2A^2, \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_s = \frac{2}{3}(M-1)A^2$$



Modulation PSK– M

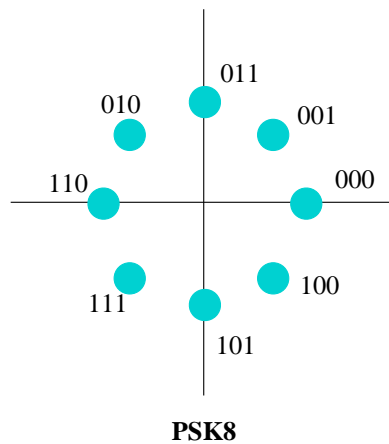
Phase Shift Keying

- M valeurs équi-réparties sur le cercle de rayon A ,
d'argument $\phi(u) = 2\frac{\pi}{M}u$, $u \in \{0, 1, \dots, M-1\}$.
- En bande porteuse:

$$x(t) = A \sum_k g(t - kT) \sqrt{2} \cos(2\pi f_o t + \phi(u_k))$$

- En bande de base: $\tilde{x} = A \sum_k g(t - kT) e^{j\phi(u_k)}$
- Distance et énergie:

$$d_{\min} = 2A \sin \frac{\pi}{M}, \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_s = A^2$$



Modulation différentielle

Differential Phase Shift Keying (DPSK)

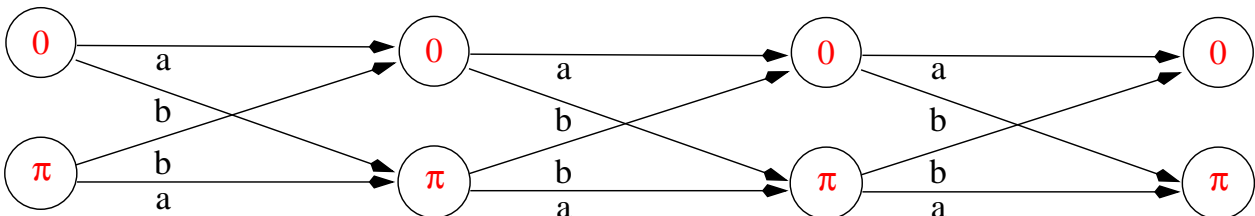
- Motivation: phase absolue de la porteuse difficile à poursuivre
- Solution: le symbole u_k encode le saut de phase
- Conséquence: mémoire (infinie) dans la modulation
Etat interne S_k : phase absolue modulo 2π .
- Signal échantillonné en sortie du démodulateur:

$$y_k = e^{j(\theta_k - \varphi)} \Rightarrow \langle y_{k-1}, y_k \rangle = e^{j(\theta_k - \theta_{k-1})}$$

φ inconnue disparaît, reste la partie utile $u_k = \theta_k - \theta_{k-1}$.

- Treillis pour DBPSK

Deux symboles a et b associés aux phases $\phi(a) = 0$ et $\phi(b) = \pi$.

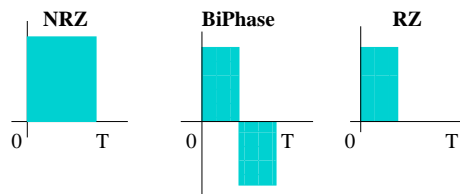


Modulation $\pi/4$ -DQPSK

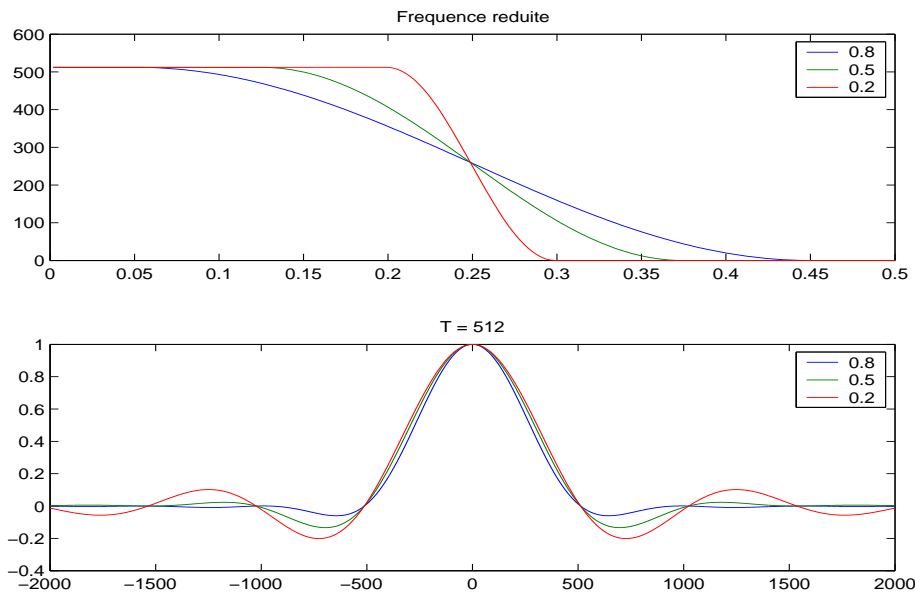
- Symboles $u_k \in \{-3, -1, 1, 3\}$ (PAM4)
- Codage différentiel: $\Delta\theta_k = u_k \frac{\pi}{4}$
- Conséquences:
 - La phase absolue change à chaque fois de $\pm\frac{\pi}{4}$ ou $\pm\frac{3\pi}{4}$
 - Donc la phase absolue prend 8 valeurs, bien que $M = 4$
 - Les trajectoires de phase (bien que dépendant des formes d'onde) ne passent pas par l'origine \Rightarrow moins sensible aux NL des amplificateurs en bande porteuse.
- Peut être vue comme une PSK-8 avec des transitions interdites

Forme d'ondes

- Importantes pour l'occupation spectrale et l'Interférence entre symboles (ISI)
- Définissent les trajectoires de l'enveloppe dans le plan complexe.
- NRZ: bande plus faible que RZ, mais difficultés pour synchronisation rythme symbole



- Cosinus sur-élevé: compromis temps-fréquence

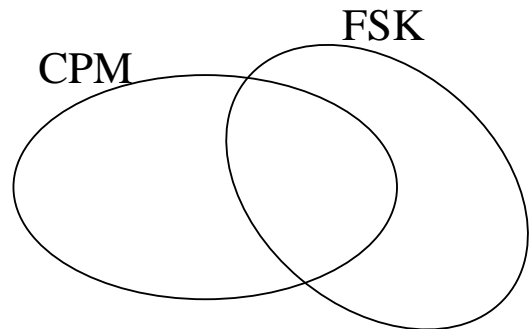


Enveloppe constante

- Motivation: on ne souffre pas des NL des amplificateurs de puissance si puissance émise est constante
- PSK: sauts de phase \Rightarrow baisses de puissance pendant transitions
- Exemple type: modulation de fréquence (FSK)

$$x(t) = \sqrt{2} \cos \left(2\pi f_o t + 2\pi f_d \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right)$$

- $m(\tau) = \sum_k x_k g_d(\tau - kT)$
 - Fréquence instantanée: $f_o + f_d m(t)$
 - Forme d'onde
 - Full response*: support de $g_d = [0 T]$
 - Partial response*: support plus long que T
 - Modulation non linéaire
- CPM: Continuous Phase Modulation



Phase continue (CPM, CPFSK)

Full Response CP-FSK

- On prend g_d constante sur $[0, T]$, et $f_d m(t) = x_k \frac{h}{2T}$.
 \Rightarrow Si x_k est PAM, fréquences séparées de h/T .
- Or, deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de fréquence pure f_1 et f_2 sont orthogonaux si $\text{sinc}(\pi(f_1 - f_2)T) = 0 \Leftrightarrow (f_1 - f_2)T$ entier.

Mais s'ils sont en phase, orthogonalité ssi

$$\text{sinc}(\pi(f_1 - f_2)T) \cos(\pi(f_1 - f_2)T) = 0$$

$\Leftrightarrow 2(f_1 - f_2)T$ entier \Rightarrow l'écart minimum est $1/2T$, atteint pour $h = 0.5$.

- La variation de phase est linéaire dans CP-FSK

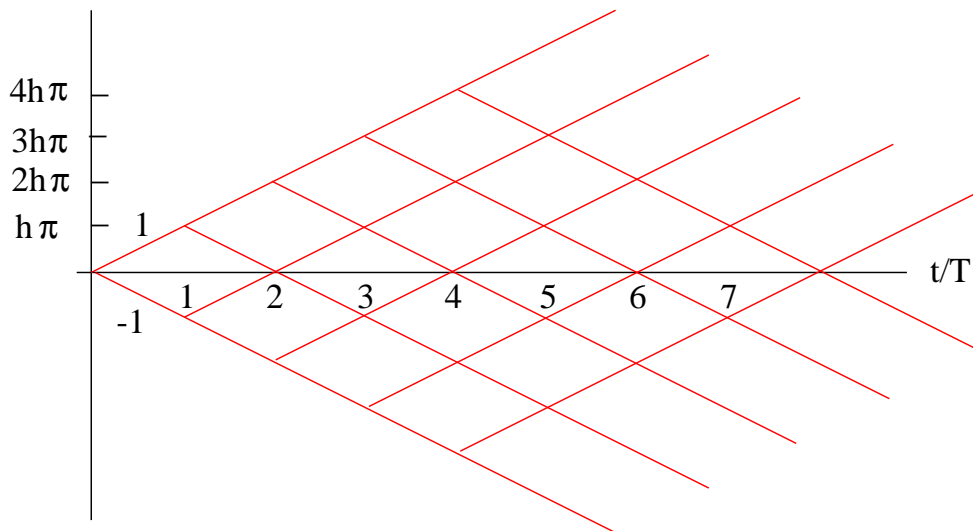


Diagramme des phases CP-FSK

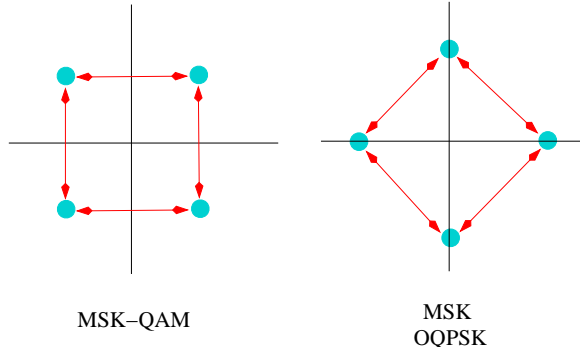
Modulation avec Offset

- Ici, $g_c(t)$ et $g_s(t)$ sont différentes:

$$g_c(t) = g(t - T/2), \quad \text{et} \quad g_s(t) = g(t)$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = \sum_k x_c(u_k)g(t - kT - T/2) + jx_s(u_k)g(t - kT)$$

- Propriété: discontinuités réduites (sauts sur \Re et \Im décallés)
- Peut s'appliquer aux constellations en grille, comme QPSK ou QAM



Modulation a saut minimal (MSK)

Deux formes possibles:

- cas particulier (linéaire) de CP-FSK, avec $f_d = 1/4T$, et donc un écart en fréquence de $\pm 1/4T$.

$$x(t) = \sqrt{2} \cos 2\pi \left(f_o t + \int^t m(\tau) d\tau \right),$$
$$m(\tau) = \frac{1}{4T} \sum_k u_k g(t - kT), \quad u_k \in \{-1, +1\}$$

- Cas particulier de OQPSK avec $h = 1/2$, une période symbole double, et

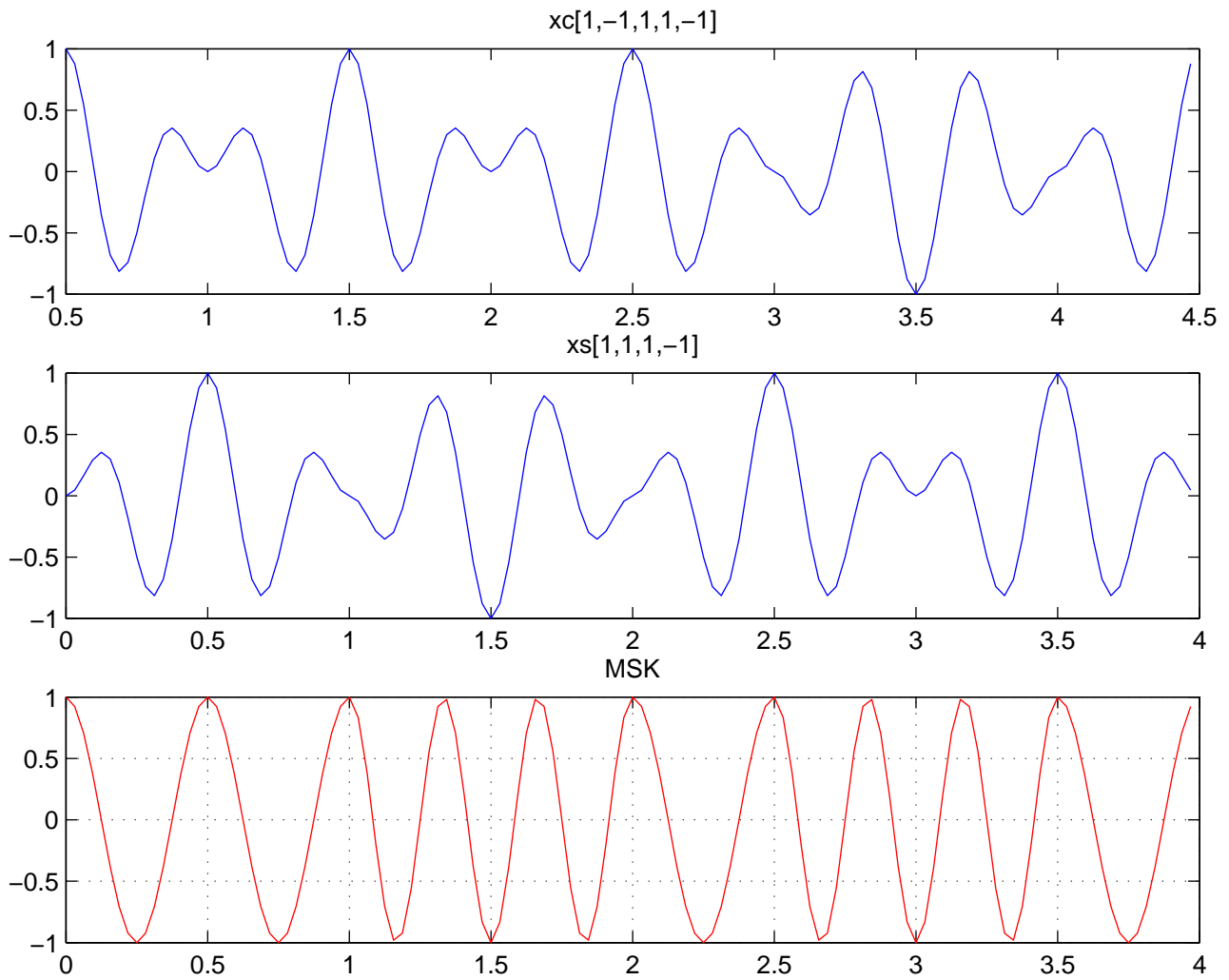
$$g_c(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \cos \pi t / 2T, \quad t \in [T, 3T]$$
$$g_s(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \sin \pi t / 2T, \quad t \in [0, 2T]$$

- Les 2 définitions donnent des treillis différents
- Les 2 définitions donnent la même propriété en bande de base

$$x_{k+1} = x_k e^{j\pi u(k)/2} = u(k) j x_k$$

En particulier, $x_{k+1}^2 = -x_k^2$.

Porteuse modulée MSK



Modulations à bande large

- OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing):
plusieurs porteuses sont utilisées en même temps sur un même canal
- DS-CDMA (Direct Sequence - Code Division Multiple Access)

$$\tilde{x}(t) = a(t) \cdot u(t), \quad \begin{cases} u(t) = \sum_k u_k g(t - kT) : \text{sequence symbole} \\ a(t) = \sum_\ell a_\ell h(t - \ell T/G) : \text{sequence d'etalement} \end{cases}$$

$a(t)$: séquence pseudo-aléatoire, càd un “Pseudo Noise” (PN) connu.

DSSS: Direct Sequence Spread Spectrum

- Europe: UMTS (Universal Mobile Telecommunications System)
Modulation QPSK pour u . $G \gg 1$ variable suivant le débit.
- FH-CDMA (Frequency Hopped - Code Division Multiple Access):
on saute d'une porteuse l'autre de façon pseudo-aléatoire

Modulations dans quelques standards

Standard	Modulation numérique
Modem V34 33.6kb/s	QAM-1664
DECT	GFSK
GSM	GMSK
DCS1800	GMSK
IS54	$\pi/4$ -DQPSK
IS95	DSSS + QPSK
UMTS (3G)	DSSS + QPSK
802.11b (wifi)	DSSS + QPSK
802.11a (wifi5)	OFDM
802.11g	OFDM