

Communications Numériques I

Module MH4 - cours 5/5

Pierre COMON

Résumé du cours 4

■ Filtres d'émission et de réception

Intérêt du filtre "Racine de cosinus sur-élevé"

■ Rappels de théorie de la décision

- **Approche bayésienne** dans le cas équipénalisé:
on décide H_j sur le domaine D_j où la proba a posteriori $\phi_j(\mathbf{x}) = P_j p_x(\mathbf{x}|H_j)$ est la plus grande, parmi toutes les $\phi_\ell(\mathbf{x})$.
- Détecteur binaire: $\frac{p_x(\mathbf{x}|H_1)}{p_x(\mathbf{x}|H_2)} \stackrel{D_1}{>} \text{seuil}$
- Probabilité d'erreur binaire

$$P_\varepsilon = Q\left(\frac{d_{12}}{2} \sqrt{\frac{2}{N_o}}\right)$$

■ Détection cohérente $\mathbf{r} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{e}$, où \mathbf{A} connue.

- Si \mathbf{e} gaussien et x scalaire:

$$x_{MAP} = \underset{u}{\text{Arg Max}} \left\{ 2u \langle \mathbf{r}, \mathbf{a} \rangle_{\Gamma_b} - |u|^2 \|\mathbf{a}\|_{\Gamma_b}^2 + 2 \log P_u \right\}$$

- Cas binaire, $x(t) \in \{s_1(t), s_2(t)\}$:

$$d_{12}^2 = E(1 - \langle s_1, s_2 \rangle)$$

Cas particuliers $\{s_1, s_2\}$: antipodaux (BPSK, PAM2), orthogonaux (BFSK), On-Off (ASK).

Probabilité d'erreur (1/5)

Détection binaire. 2 hypothèses équiprobables

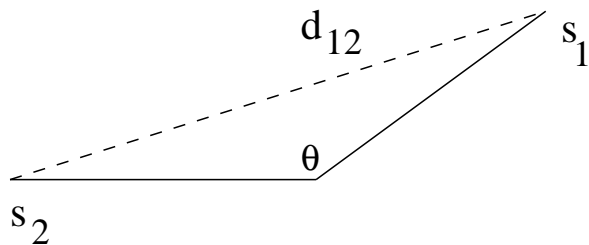
$$H_i : \mathbf{r}(t) = \mathbf{s}_i(t) + \mathbf{b}(t), \quad , i \in \{1, 2\}$$

- On admet que: $\|\mathbf{s}_i(t)\|^2 = E$, d.s.p. de $\mathbf{b}(t) = N_0/2$
- On pose $\mathbf{s}_1(t) - \mathbf{s}_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} d_{12} \mathbf{v}(t)$ et $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} E \cos \theta$
- La décision est basée sur:

$$\text{Max}_{i \in \{1,2\}} \{ 2 \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle - \|\mathbf{s}_i\|^2 \}$$

Donc une statistique suffisante est

$$z \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 \rangle = \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle$$



$$\text{on a } d_{12}^2 = 2 E (1 - \cos \theta)$$

- Sous H_1 , $z \sim \mathcal{N}(m_1, N_o/2)$, avec $m_1 = \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{v} \rangle = \frac{E - E \cos \theta}{d_{12}} = d_{12}/2$
- Probabilité d'erreur P_ε

$$P_\varepsilon = Q \left(m_1 \sqrt{\frac{2}{N_o}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2 N_o}} \right)$$

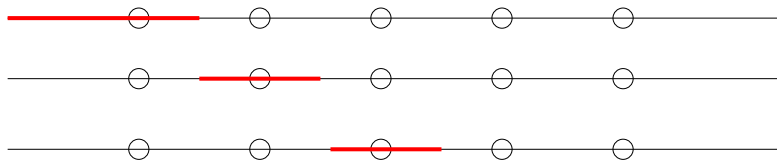
Probabilité d'erreur (2/5)

Constellations en grille (PAM, QAM, QPSK)

■ PAM- M

On a M zones d'erreur élémentaires: $M - 2$ bilatères, et 2 monolatères $\Leftrightarrow 2M - 2$ erreurs monolatères:

$$P_\varepsilon = 2(M - 1) \frac{1}{M} Q(\eta), \quad \eta = \sqrt{\frac{2 E_1}{N_o}} = \sqrt{\frac{6 E_s}{(M^2 - 1) N_o}}$$



■ QAM- M avec $M = 2^K$ et K pair

On se ramène à un PAM- \sqrt{M} . On note P_c = probabilité de décision correcte. Alors

$$P_c^{QAM}(M) = \left(1 - P_\varepsilon^{PAM}(\sqrt{M})\right)^2$$

D'où la proba d'erreur:

$$P_\varepsilon = 1 - \left(1 - 2(\sqrt{M} - 1) \frac{1}{\sqrt{M}} Q(\eta)\right)^2 \approx 4Q(\eta) - 4Q(\eta)^2$$

$$\eta = \sqrt{\frac{d^2}{2 N_o}} = \sqrt{\frac{3 E_s}{(M - 1) N_o}}$$

Probabilité d'erreur (3/5)

Méthodologie

- On calcule la probabilité de bonne détection dans des demi-espaces E_i délimités par des hyperplans, puis on les intersecte:

$$Pr(x \in D) = Pr(x \in E_1 \cap E_2 \cap \dots E_n)$$

puis on en déduit la probabilité d'erreur pour la décision D sous l'hypothèse H :

$$Pr(x \in \bar{D}) = 1 - Pr(x \in D)$$

- Ou bien on calcule la probabilité d'erreur

$$Pr(x \in \bar{D}) = Pr(x \in \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2 \cup \dots \bar{E}_n)$$

puis on applique la borne de l'union

$$P_\varepsilon \leq \sum_i Pr(x \in \bar{E}_i)$$

On a égalité si $\bar{E}_i \cap \bar{E}_j = \emptyset$

- Pour une borne inférieure, on peut utiliser

$$\max_j Pr(x \in \bar{E}_j) \leq Pr(x \in \bigcup_j \bar{E}_j) \stackrel{\text{def}}{=} Pr(x \in \bar{D})$$

- La probabilité d'erreur totale est la somme des probabilités d'erreur de chaque décision D_k , pondérée par les probabilités d'apparition des hypothèses H_k :

$$P_\varepsilon = \sum_k Pr(H_k) Pr(x \in \bar{D}_k)$$

Probabilité d'erreur (4/5)

Approximations

■ Bornes larges

Pour un symbole i :

$$\text{Max}_j Q\left(\frac{d_{ij}}{2\sigma}\right) \leq P_{\varepsilon i} \leq \sum_{j \neq i} Q\left(\frac{d_{ij}}{2\sigma}\right)$$

Pour la probabilité d'erreur totale si M symboles équiprobables:

$$\frac{L}{M} Q \leq \frac{1}{M} \sum_j \text{Max}_j Q \leq P_{\varepsilon}$$

où L = nb de symboles ayant un voisin (au moins) à distance d_{min} ,

$$P_{\varepsilon} \leq \frac{1}{M} \sum_i \sum_{j \neq i} Q\left(\frac{d_{ij}}{2\sigma}\right) \leq (M-1) Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$$

Ces bornes générales ne sont pas serrées, et on peut souvent faire mieux.

■ Approximation:

$$P_{\varepsilon} \approx \frac{2U}{M} Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$$

où $U \stackrel{\text{def}}{=} \text{nb de paires de symboles à distance } d_{min}$.

■ Autres approximations courantes:

$$Q^2(\eta) \ll Q(\eta)$$

$$M \gg 1.$$

Probabilité d'erreur (5/5)

Exemples

Pour alléger, on note $Q = Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$

- QAM16: $M = 16, L = 16$, et $U = 24 \Rightarrow$

$$Q \leq P_\varepsilon \approx \frac{48}{16} Q = 3Q \leq 15Q$$

- PSK8: $M = 8, L = 8$, et $U = 8 \Rightarrow$

$$Q \leq P_\varepsilon \approx 2Q \leq 7Q$$

- PSK- M :

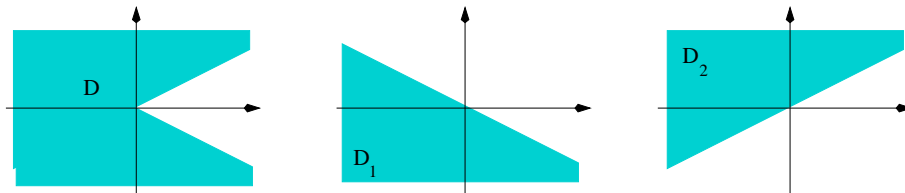
$$Q \leq P_\varepsilon \approx 2Q \leq (M - 1)Q$$

Plus M est grand, meilleure est l'approximation.

- PSK- M par application directe de la borne de l'union:

$$P_\varepsilon \leq 2Q$$

→ bien meilleur: c'est une borne supérieure



En effet,

$$\begin{aligned} Pr(\mathbf{x} \in \mathcal{D}) &= Pr(\mathbf{x} \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \\ &= Pr(\mathbf{x} \in \mathcal{D}_1) + Pr(\mathbf{x} \in \mathcal{D}_2) - Pr(\mathbf{x} \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2) \\ &\leq Pr(\mathbf{x} \in \mathcal{D}_1) + Pr(\mathbf{x} \in \mathcal{D}_2) = 2Q \end{aligned}$$

Détection binaire avec phase inconnue

Contexte

- On émet un message $\tilde{x}(t) = x_c(t) + j x_s(t)$ sur une porteuse $\cos \omega_o t$.
- Le canal introduit un retard d'arrivée τ qui est mal estimé. Si l'erreur d'estimation est telle que $\omega_o \tau = O(1)$, alors la phase de la porteuse est perdue
- Par contre, il est très fréquent que $g(t + \tau) \approx g(t)$, car $\tau \ll T$.
- Donc, dans un canal à bruit additif, on admet que l'enveloppe complexe du signal reçu s'écrit:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) e^{j\phi} + \tilde{b}(t)$$

- Dans le pire des cas, la phase ϕ est modélisée comme une variable aléatoire uniforme dans $[0, 2\pi]$.
- Dans d'autres cas, on pourra supposer que $\phi \ll 1$, et faire un développement limité...

Détection incohérente, signaux orthogonaux

On suppose que:

- L'énergie E de $\tilde{x}(t)$ est la même pour tous les symboles
- Les symboles sont équiprobables
- Sous l'hypothèse H_i , l'enveloppe complexe du signal transmis est $\tilde{x}(t) = \tilde{s}_i(t)$, où les $s_i(t)$ sont orthogonaux (*e.g.* modulation **FSK**)
- Le bruit est additif blanc gaussien, et la phase ϕ uniforme

Sous ces hypothèses, la base de KL est formée des $\{s_i(t)\}$. On construit donc les sorties des filtres adaptés:

$$\begin{aligned} y_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{s}_1(t), \tilde{y}(t) \rangle \stackrel{H_1}{=} E e^{j\phi} + \tilde{b}_1 \\ y_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{s}_2(t), \tilde{y}(t) \rangle \stackrel{H_1}{=} \tilde{b}_2 \end{aligned}$$

On pose $\tilde{y}_1 = y_{1c} + j y_{1s}$ et $\tilde{y}_2 = y_{2c} + j y_{2s}$. Alors sous H_1 :

$$\begin{aligned} p(y_1, y_2 | H_1, \phi) &= \\ &(2\pi\sigma^2)^{-2} \cdot \exp \left[-\frac{(y_{1c} - E \cos \phi)^2 + (y_{1s} - E \sin \phi)^2 - y_{2c}^2 - y_{2s}^2}{2\sigma^2} \right] \\ \Rightarrow p(y_1, y_2 | H_1) &= C + \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \exp \left[-\frac{E(y_{1c} \cos \phi + y_{1s} \sin \phi)}{2\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

Détecteur optimal:

$$\begin{aligned} I_0 \left(\frac{E\sqrt{y_{1c}^2 + y_{1s}^2}}{\sigma^2} \right) &\stackrel{D_1}{>} I_0 \left(\frac{E\sqrt{y_{2c}^2 + y_{2s}^2}}{\sigma^2} \right) \\ \Leftrightarrow |y_1|^2 &\stackrel{D_1}{>} |y_2|^2 \end{aligned}$$

Détection incohérente, modulation On-Off

Le détecteur optimal est maintenant $|y|^2 \stackrel{D_1}{>} \alpha$, car $s_0(t) = 0$.
 \Rightarrow il n'y a qu'un seul filtre adapté.

Modélisation: En sortie du filtre adapté, on se ramène au problème de détection:

$$\begin{aligned} H_0 : & \quad y = b \\ H_1 : & \quad y = m e^{j\phi} + b \end{aligned}$$

avec $b \sim \mathcal{N}^c(0, \sigma^2)$.

- Si ϕ inconnue, on construit

$$z = |y|^2$$

et on teste

$$z \stackrel{D_1}{>} \alpha$$

Cette variable-test suit une loi du $\sigma^2 \chi^2_2(m^2/\sigma^2)$.

La loi de la variable \sqrt{z} est la loi de *Rice*.

- Si ϕ était connue, on construirait la statistique suffisante

$$z = \Re\{y e^{-j\phi}\}$$

et on testerait

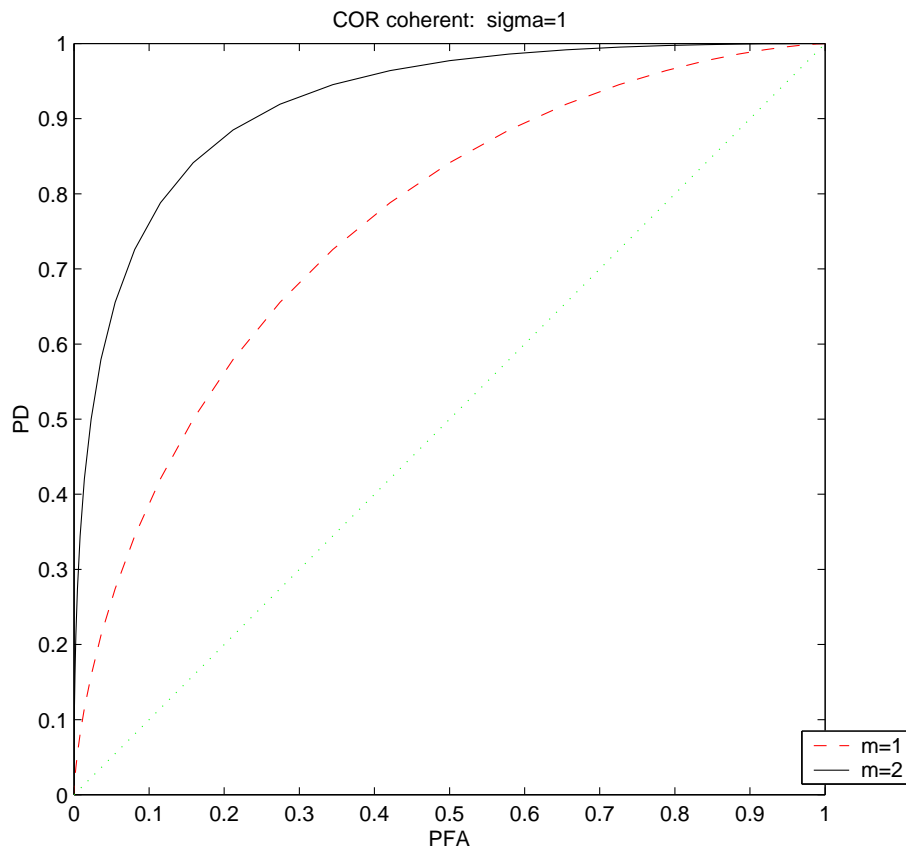
$$z \stackrel{D_1}{>} \eta$$

Cette variable-test suit une loi gaussienne.

Cohérent vs. incohérent (1/2)

Cohérent

$$P_D = Q\left(\frac{\eta - m}{\sigma}\right)$$
$$P_{FA} = Q\left(\frac{\eta}{\sigma}\right)$$
$$m = \sqrt{E}, \quad \sigma = \sqrt{N_o/2}$$



$$P_D = f(P_{FA})$$

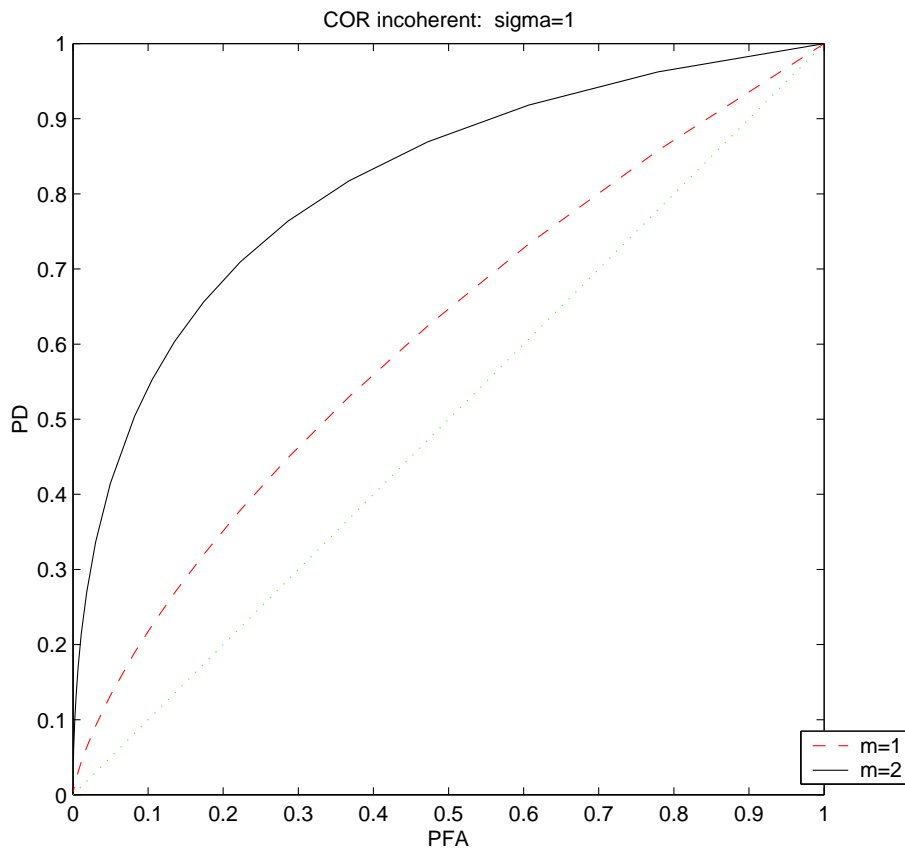
Cohérent vs. incohérent (2/2)

Incohérent si $N = 2$ (2 degrés de liberté: loi de Rice)

$$P_D = Q_1\left(\frac{m}{\sigma}, \frac{\alpha}{\sigma}\right)$$

$$P_{FA} = Q_1\left(0, \frac{\alpha}{\sigma}\right) = 1 - \gamma\left(1; \frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right) = e^{-\alpha^2/2\sigma^2}$$

$$m = \sqrt{E}, \quad \sigma = \sqrt{N_o/2}$$



$$P_D = f(P_{FA})$$

NB: *Par exemple, applicable à la modulation On-Off*

Détection incohérente, signaux On-Off

Plus général: bruit coloré

$$H_0 : \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}(t), \quad H_1 : \mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(t) e^{j\phi} + \mathbf{b}(t)$$

- la détection incohérente est basée sur l'énergie de la sortie $y(t) = h \star \mathbf{r}(t)$ d'un filtre de réception $h(t)$ (on ignore la phase):

$$z = \int_0^T |y(t)|^2 dt$$

- En utilisant une base de Karhunen-Loeve de noyau $\mathbf{\Gamma}_b$, z s'écrit $z = \sum_{i=1}^{2N} |y_i|^2$, où les y_i sont gaussiens et décorrelés, de moyenne non nulle s_i .
- La variable z suit une loi du χ^2 à $2N$ degrés de liberté. $2N \approx 2BT$, si $2B$ est la bande du filtre h
- On a alors les probabilités d'erreur du détecteur $z \stackrel{D_1}{>} \alpha$:

$$P_{ND} = 1 - Q_N \left(\sqrt{\frac{2E}{N_o}}, \sqrt{\frac{2\alpha}{N_o}} \right)$$

$$P_{FA} = Q_N \left(0, \sqrt{\frac{2\alpha}{N_o}} \right)$$

que l'on peut comparer (défavorablement) à la détection cohérente.

Détection totalement incohérente: signal aléatoire

On fait cette hypothèse quand le signal est totalement inconnu.

Détection binaire en bruit blanc gaussien $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$:

$$H_0 : \mathbf{y}(t) = \mathbf{b}(t), \quad H_1 : \mathbf{y}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t)$$

- Si $\mathbf{s}(t)$ est aléatoire blanc gaussien $\mathcal{N}(0, \rho \sigma^2)$, ou de distribution inconnue, le récepteur basé sur la détection de l'énergie est approprié
- On construit le récepteur $z = \|\mathbf{r}\|^2$
- Si \mathbf{s} indépendant de \mathbf{b} , alors z suit une loi du chi-deux centrale
- **Détecteur optimal:**

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(\mathbf{y}|H_1)}{p(\mathbf{y}|H_0)} = \prod_{t=1}^T \frac{\sigma}{\sqrt{1+\rho}\sigma} \frac{\exp\left(-\frac{y(t)^2}{2\sigma^2(1+\rho)}\right)}{\exp\left(-\frac{y(t)^2}{2\sigma^2}\right)} \stackrel{D_1}{>} \eta$$
$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^T y(t)^2 \stackrel{D_1}{>} \alpha$$

- **Probabilités d'erreur:**

$$P_{ND} = 1 - Q_{T/2} \left(0; \frac{\alpha}{\sqrt{1+\rho}\sigma} \right) = \gamma \left(\frac{T}{2}; \frac{\alpha^2}{2(1+\rho)\sigma^2} \right)$$
$$P_{FA} = Q_{T/2} \left(0; \frac{\alpha}{\sigma} \right) = 1 - \gamma \left(\frac{T}{2}; \frac{\alpha^2}{2\sigma^2} \right)$$

Canaux spéculaires

Dans le modèle spéculaire (souvent adopté), la réponse du canal est formée d'un nombre fini de trajets:

$$h(t) = \sum_{i=1}^p A_i \delta(t - \tau_i)$$

où A_i et τ_i sont des variables aléatoires.

■ Canal de Rayleigh

$$y(t) = A s(t) \sqrt{2} \cos[\omega_o t + \phi] + b(t)$$

où A suit une loi de Rayleigh et ϕ est uniforme.

■ Canal de Rice

$$y(t) = s(t) \sqrt{2} \cos[\omega_o t] + A s(t) \sqrt{2} \cos[\omega_o t + \tau + \phi] + b(t)$$

où τ est déterministe, A_2 Rayleigh et ϕ uniforme..

- NB: A est Rayleigh avec ϕ uniforme ssi \Im et \Re sont gaussiennes décorréelées.

Bibliographie

References

- [1] S. BENEDETTO, E. BIGLIERI, V. CASTELLANI, *Digital Transmission Theory*, Prentice-Hall, 1987.
- [2] E. BIGLIERI, D. DIVSALAR, P. J. McLANE, M. K. SIMON, *Introduction to Trellis-Coded modulation with applications*, Macmillan Publishing Company, 1991.
- [3] H. MEYR, M. MOENECLAEY, S. A. FECHTEL, *Digital communication receivers : synchronization, channel estimation, and signal processing*, Wiley, 1998.
- [4] R. L. PETERSON, R. E. ZIEMER, D. E. BORTH, *Introduction to Spread Spectrum Communications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [5] J. G. PROAKIS, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 1995, 3rd edition.
- [6] T. S. RAPPAPORT, *Wireless Communications, principles and Practice*, Prentice Hall, 1996.
- [7] G. L. STÜBER, *Principles of Mobile Communications*, Kluwer, 1996.
- [8] H. L. VAN TREES, *Detection, Estimation, and Modulation Theory*, Wiley, 1968.