

Contribution à la Commande Optimale des Machines Asynchrones

Résumé

Ce travail est consacré à la commande optimale des moteurs d'induction. L'objectif de commande est ici d'assurer la poursuite d'une trajectoire de référence de couple, en utilisant le flux comme le degré de liberté qui permet de minimiser l'énergie de la machine. Le problème est formulé comme un problème classique de commande optimale, en minimisant un critère convexe dans l'état et la commande, soumis à la restriction dynamique linéaire du flux et à une restriction algébrique de poursuite de couple.

Des solutions analytiques sont données pour le couple désiré constant, en résolvant l'équation d'Hamilton-Jacobi associée au problème. Cette solution peut être obtenue avec un filtre linéaire de premier ordre, de la norme au carré du flux. Pour des trajectoires du couple désiré variables dans le temps, le filtre donne des références sous-optimales de la norme du flux qui minimisent une limite supérieure de la fonction du coût optimal, à l'horizon infini. Cela impose l'opération de la machine à norme du flux variable dans le temps, contrairement à l'opération classique à norme du flux constante.

Les résultats de son évaluation expérimentale, pour des conditions d'opération des asservissements électriques, montrent une amélioration du rendement, en gardant des performances adéquates de poursuite de couple, flux et vitesse.

Mots-Clefs : moteur asynchrone, commande optimale nonlinéaire.

Contributions to the Optimal Control of Induction Motors

Abstract

This study is devoted to the nonlinear optimal control of induction motors. The control objective is to minimize the motor energy, ensuring torque tracking control requirements; the rotor flux is used as an additional degree of freedom for the dynamic optimisation. The problem to be considered is to find an optimal control that minimizes a convex cost function, under a linear flux dynamics and a torque tracking algebraic constraints.

Analytic solution has been obtained for constant torque references, solving the Hamilton-Jacobi equation that results from this problem. This solution can be obtained in closed-form, using a linear, first order differential equation of the squared rotor flux norm. If this differential equation is used for time-varying torque references, a suboptimal rotor flux trajectory is obtained that minimizes an upper bound of the infinite-time optimal cost function. The solutions turn out to imply non-standard time-varying flux norm operations in opposition to the classical operation with constant flux norm.

The experimental evaluation for an electrical drive application, shows that operation at varying optimal flux preserves well speed, torque and flux tracking performances, while increasing motor efficiency.

Keywords : Induction motors, optimal non-linear control.

THESE

présentée par

José Miguel RAMIREZ

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR de l'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

(arrêté ministériel du 30 Mars 1992)

Spécialité : Automatique et Productique

=====
**Contribution à la Commande Optimale
des Machines Asynchrones**
=====

Date de soutenance : le 10 Juillet 1998

Composition du Jury :

M. D. ROYE	Président
M. R. SEPULCHRE	Rapporteur
M. M. BODSON	Rapporteur
M. J. MARMOLAT	Examineur
M. D. GEORGES	Examineur
M. C. CANUDAS de WIT	Directeur de thèse

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Automatique de Grenoble

à la mémoire de ma Mère ...

à Maria, Lina, Andrea et Alejandro

Remerciements

Je voudrais d'abord exprimer ma reconnaissance aux membres du Jury de thèse, en particulier à Monsieur D. ROYE, pour en avoir accepté la présidence.

Mes plus vifs remerciements à Messieurs R. SEPULCHRE et M. BODSON, pour consacrer temps et attention au rapport de ce mémoire.

Je remercie Monsieur D. GEORGES et Monsieur J. MARMOLAT, pour examiner ce travail.

A Monsieur Carlos Canudas de Wit, Directeur de Recherche au CNRS, va ma plus profonde gratitude pour m'avoir accepté au sein de l'Equipe Robotique et pour avoir dirigé cette étude.

J'adresse mes remerciements à tout le personnel administratif et technique, du LAG pour leur constante disponibilité.

A mes amis français qui m'ont prêté secours dans la dure tâche d'écrire une mémoire en langue étrangère: Denis et Valerie, Laurence, Nicole et Jean Marie.

A mes compagnons présents et passés, j'adresse l'expression de ma plus profonde sympathie: Pablo Lischinsky, Laurence Roussel, Ange Désire, Arturo Zavala, Mata Jimenez et Ernesto Olguin-Diaz.

Avant-Propos

Le travail présenté dans cette thèse a donné lieu au Brevet: *Système de régulation de moteur asynchrone par commande orientée champ*, INPG, FRANCE.

et à un certain nombre de publications acceptées:

- Revue internationale

1. C. Canudas de Wit et J. M. Ramirez, "Optimal Torque Control for Current-fed Induction Motors", *IEEE Trans. on Automatic Control*.
2. D. Deorges, C. Canudas de Wit et J. M. Ramirez, "Nonlinear H_2 and H_∞ Optimal Controllers for Current-feed Induction Motors", *IEEE Trans. on Automatic Control*.

- Congrès internationaux

1. J. M. Ramirez et C. Canudas de Wit, "Optimal torque-flux control for induction motors: experimental evaluation", *Electrimacs Congres*, St Nazaire, FRANCE, 1996.
2. C. Canudas de Wit et J. M. Ramirez, "Optimal Torque Control for Current-fed Induction Motors", *American Control Conference*, Albuquerque, USA, 1997.
3. D. Deorges, C. Canudas de Wit et J. M. Ramirez, "Nonlinear H_2 and H_∞ Optimal Controllers for Current-feed Induction Motors", *European Control Conference*, Bruxelles, BELGIQUE, 1997.

- Ecole d'Eté:

J. M. Ramirez et C. Canudas de Wit, "Performance Evaluation of Induction Motors Under Optimal-Energy Control", Grenoble, France, 1997.

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Organisation de la mémoire	3
1.2	Intérêt de la commande optimale des Machines Asynchrones	4
1.3	La Commande Optimale des Machines Asynchrones	5
1.3.1	Maximisation du Couple	5
1.3.2	Maximisation du Rendement	7
1.3.3	Regulation optimale	12
1.4	Notre Contribution	12
1.4.1	Contribution théorique	12
1.4.2	Mise en oeuvre	13
2	Modélisation	15
2.1	Introduction	15
2.2	Hypothèses de modélisation	15
2.3	Modélisation du moteur dans les repères $a - b$	16
2.4	Modélisation des Machines Asynchrones dans le repère fixe $\alpha - \beta$	18
2.5	Modélisation des Machines Asynchrones dans le repère tournant $d - q$	19
2.6	Modèles Réduits	21
2.7	Conclusion sur la Modélisation	24
3	Fonctions de coût et formulation des problèmes	25
3.1	Introduction	25
3.2	Energie totale	26
3.2.1	Puissance active et Energie Totale	26
3.2.2	Rendement	28
3.2.3	Puissance Réactive	28
3.2.4	Facteur de Puissance	29
3.3	Fonctions de Coût et Formulation des problèmes	29
3.3.1	Energie totale	29
3.3.2	Optimisation en Cascade	30

3.3.3	La fonction de coût pour le modèle réduit	32
3.3.4	Problème d'optimisation du flux	36
3.4	Conclusion	37
4	Commande Optimale via le calcul variationnel	39
4.1	Introduction	39
4.2	Minimisation de l'énergie en régime stationnaire	41
4.2.1	Formulation du problème	41
4.2.2	Solution optimale stationnaire	41
4.2.3	Sélection des facteurs de pondération q et r	41
4.3	Bref rappel du calcul variationnel	43
4.4	Conditions pour le calcul d'un extremum minimal	47
4.5	Propriétés de l'équation d'Euler	48
4.5.1	Unicité des solutions bornées	48
4.5.2	Unicité de la solution stationnaire	49
4.6	Solutions analytiques de l'équation d'Euler	51
4.6.1	Solution pour y_d constante et $x(0) \neq x^*$	51
4.6.2	Solution Optimale Hyperbolique	53
4.7	Solutions approchées de l'équation d'Euler	55
4.8	Minimisation d'une fonctionnelle sous contraintes	59
4.8.1	Contraintes dynamiques	59
4.8.2	Contraintes dans l'espace de commande	62
4.9	Solution Numérique	64
4.9.1	Principe de la méthode d'itération dans l'espace de commande	65
4.9.2	Résultats	66
4.10	Critère avec erreur quadratique de poursuite du couple	69
4.11	Minimisation avec contraintes dans l'espace de la commande	70
4.12	Conclusion	74
5	Commande Optimale via l'équation d'Hamilton-Jacobi	77
5.1	Introduction	77
5.2	L'équation d'Hamilton-Jacobi	78
5.3	Minimisation de l'énergie via l'équation d'Hamilton-Jacobi	80
5.3.1	Solution à l'horizon T fini	82
5.3.2	Solution à l'horizon T infini	86
5.3.3	Solution OPEC	87
5.3.4	Mise en oeuvre de la solution OPEC	89
5.3.5	évaluation en Simulation	90
5.4	Régulation H_2 et H_∞	97
5.4.1	Commande nonlinéaire H_2	97
5.4.2	Commande nonlinéaire H_∞	101
5.4.3	Estimateur du flux	105

5.4.4	Résultats de Simulation	106
5.5	Conclusion	109
6	Évaluation Expérimentale	111
6.1	Introduction	111
6.2	Loi de Commande Vectorielle à Flux Orienté	112
6.2.1	Description de la loi de commande	112
6.2.2	Analyse de stabilité	114
6.3	Les Problèmes de la Mise en Oeuvre	117
6.3.1	Références	117
6.3.2	Commande des courants	118
6.3.3	Défluxage de la Machine à haute vitesse	118
6.4	Le Banc d'essais	120
6.5	Résultats expérimentaux	122
6.5.1	Commande de vitesse	123
6.5.2	Commande de couple	127
6.6	Conclusion	128
7	Conclusions	131
7.1	Bilan	131
7.2	Perspectives	132
A	Annexe	135

Chapitre 1

Introduction

1.1 Organisation de la mémoire

Cette mémoire est organisée en six chapitres structurés de la façon suivante: dans ce chapitre nous présentons le panorama général de la commande optimale de la machine asynchrone. Dans ce contexte, nous présentons la motivation et l'objectif de notre travail, le problème que nous avons traité ainsi comme notre contribution principale par rapport aux travaux précédents.

Le deuxième chapitre présente la modélisation de la machine; nous nous limiterons aux modèles que nous avons utilisés pour notre travail i.e., les modèles qui utilisent comme entrées les courants (modèle réduit) ou les tensions statoriques (modèle complet); les modèles seront présentés dans les repères les plus utilisés, soit les modèles ab , $\alpha\beta$ et dq .

Le troisième chapitre est dédié à la sélection de la fonction du coût qui s'adapte le mieux au problème de maximisation du rendement de la machine; c'est cette fonction d'U coût que nous allons minimiser dans les chapitres de la commande optimale; nous examinerons plusieurs fonctions du coût et présenterons aussi les différents problèmes de commande optimale auxquels ces fonctions du coût sont liées.

Dans les chapitres 4 et 5 nous présentons nos principaux résultats théoriques sur l'optimisation du rendement de la machine, en utilisant le calcul variationnel (chapitre 4) et l'équation d'Hamilton-Jacobi (chapitre 5); pour faciliter la lecture, nous allons présenter des rappels sur la théorie d'optimisation, là où nous l'avons considéré nécessaire.

Dans le dernier chapitre, nous présentons une validation expérimentale des résultats théoriques obtenus dans les chapitres précédents. Notre intérêt est de valider nos résultats pour des asservissements électriques où les trajectoires désirées du couple sont variables dans le temps, ce qui nous amène à l'opération de la machine avec la norme du flux variable dans le temps. Nous présentons aussi, les principaux aspects de la mise en oeuvre de la commande et les problèmes spécifiques associés à l'opération à norme du flux variable.

La mémoire s'achèvera avec le bilan de nos résultats et les perspectives pour des travaux

futurs sur les problèmes qui restent encore ouverts.

1.2 Intérêt de la commande optimale des Machines Asynchrones

Les entraînements électromagnétiques consomment un peu plus de la moitié de l'énergie électrique générée dans un pays industrialisé [46]. Les avances dans le domaine de l'électronique de puissance, les moyens de calcul et les techniques de l'automatique, ont permis aux entraînements avec des machines à courant alternatif (synchrone et asynchrone) s'imposer sur son concurrent, la machine à courant continu [46], [59], [17].

C'est par sa robustesse, coût faible, fiabilité, facilité à entretenir et par sa versatilité, avec des plages de vitesse et du couple considérables, qu'il y a un intérêt croissant pour l'utilisation de la machine asynchrone dans les entraînements électriques. Son domaine d'application est déjà très vaste; nous la trouvons dans la traction ferroviaire, la propulsion électrique des navires, le pompage, la ventilation, les machines à outil, les laminoirs, les machines à papier, et la voiture électrique entre autres. Mais la machine asynchrone n'a pas été extensivement utilisée pour la commande fine de position (servodrivés) [59] ou la machine synchrone à aimants s'impose peu à peu; entre autres, les causes de cela, sont:

1. Elle est plus difficile à commander que le moteur synchrone; en effet, il s'agit d'un système dynamique non linéaire, multivariable avec des paramètres variables dans le temps et accès partiel à l'état. Cela, et les perturbations de charge, les harmoniques de l'actionneur et les bruits de mesure, en font un problème difficile de commande.
2. Elle est moins performante en termes énergétiques que le moteur synchrone [47]. Cela vient du fait que la machine asynchrone requiert des courants statoriques tout le temps -même à couple nul- pour maintenir le flux rotorique. Ceci augmente les pertes statoriques et principalement, les pertes du rotor. On a par conséquent une augmentation de la taille du moteur pour dissiper l'échauffement additionnel; ainsi, pour le même couple et avec la même méthode de refroidissement, la machine asynchrone est au moins 25% plus grande que la machine synchrone [59].

Il se trouve donc, que l'optimisation du rendement de la machine asynchrone est un des aspects les plus importants à considérer pour sa commande; cela à plus forte raison dans les cas où le rendement est essentiel, par exemple dans les applications embarquées comme la voiture électrique.

Il est clair que la commande vectorielle [45] est la stratégie de commande la plus répandue dans des applications industrielles à haute performance dynamique; en excluant la région d'affaiblissement du flux, la commande vectorielle maintient la norme du flux constante et égale à sa valeur nominale; dans cette situation, le rendement est maximal lorsqu'on est au point nominal; au dessous de ce point, l'excès d'énergie emmagasinée dans les inductances,

diminue inutilement le rendement de la machine. Nous notons que beaucoup des entraînements électriques travaillent en dehors du point nominal d'opération car le couple désiré change en fonction de la vitesse ou la position. D'autre part, il est possible de diminuer l'excédent d'énergie emmagasinée, en ajustant de façon appropriée le flux du rotor; nous pouvons donc, considérer d'autres modes d'opération du flux qui visent d'améliorer le rendement de la machine asynchrone et le faire rapprocher de celui de la machine synchrone.

1.3 La Commande Optimale des Machines Asynchrones

Pour la commande optimale, il y a trois fonctions importantes à considérer:

1. le critère à minimiser (ou à maximiser); il considère basiquement l'objectif général de la commande;
2. les degrés de liberté pour l'optimisation;
3. les restrictions du système et de la commande.

Quant à la machine asynchrone, ces variables dépendent beaucoup de l'application à considérer en particulier; par exemple, pour des applications à haute performance dynamique, l'intérêt porte plutôt sur la maximisation du couple en respectant les restrictions dynamiques de la machine et des restrictions des courants et des tensions maximaux admissibles que sur l'optimisation du rendement. Au contraire, dans des application embarquées, c'est la minimisation des pertes le critère le plus important à considérer.

Quel que soit le problème à résoudre, c'est le flux de la machine un degré de liberté à considérer pour l'optimisation; l'exemple plus connu de sont utilisation, est celui de l'affaiblissement du flux en régime de survitesse; dans certains cas, il est possible de considérer d'autres variables additionnelles pour l'optimisation; par exemple, pour le démarrage de la machine à énergie totale minimale, dans un intervalle du temps donné, la trajectoire de vitesse est un autre degré de liberté.

D'autre part, il faut prendre en compte que dans certains cas, les courants statoriques peuvent être considérés comme les variables de commande. Évidemment, les restrictions pour l'optimisation dépendront du choix des degrés de liberté et des commandes.

Pour la commande optimale de la machine asynchrone, ce sont les problèmes de **maximisation du couple** et de **maximisation du rendement** les plus traités dans la littérature. C'est sur ces problèmes que nous faisons ensuite l'état.

1.3.1 Maximisation du Couple

La maximisation du couple pour la machine asynchrone, est un problème de commande optimale en temps minimal sous contraintes de l'état et de la commande. Pour une classe assez large

des problèmes de commande en vitesse,¹ l'objectif est de trouver les tensions statoriques (la commande) optimales qui permettent de passer en temps minimal, d'une vitesse initiale donnée à une vitesse finale spécifiée, en respectant les restrictions dynamiques de la machine, des contraintes dans les courants statoriques (une partie de l'état) et des contraintes sur les tensions statoriques; l'état initial est donné, l'état final est libre en exceptant la vitesse .

C'est un problème très difficile à résoudre analytiquement pour les régimes dynamiques; la plupart des travaux que nous connaissons se restreint au cas statique pour la conception de la commande optimale. En ce cas, le problème se simplifie à trouver le flux qui maximise le couple en respectant les contraintes des courants et des tensions.

Pour respecter les restrictions de tension, la stratégie plus connue est le défluxage à haute vitesse [35, 45], cette stratégie -héritée de la commande des machines à courant continu- a pour objectif de pouvoir attendre une vitesse désirée (supérieure à la nominale) en régime stationnaire, en satisfaisant une limite maximale des tensions statoriques de commande; nous la présenterons plus en détail dans la section 6.3.3 de notre Thèse. Plusieurs auteurs ont proposé des méthodes heuristiques approximatives pour augmenter le couple maximal dans la région de sur vitesse [77, 81]. Dans [39] une méthode graphique a été utilisée qui considère aussi des restrictions des courants; dans [82] il est utilisé des circuits équivalents de la machine pour analyser les limites de couple à différentes plages de vitesse.

La série de travaux de Bodson *et al.* attaquent le problème de maximisation du couple, d'une manière plus rigoureuse; dans [12, 13, 16, 60] les auteurs présentent les restrictions algébriques qui assurent des limites dans les normes de tension et courant pour le fonctionnement de la machine en régime stationnaire; ces équations sont résolues hors-ligne en utilisant la méthode numérique de Newton Raphson. Dans [15, 61] les auteurs ont étendu leur travail pour prendre en compte la saturation en utilisant le modèle proposé en [31]; la mise en oeuvre est faite pour une application à haute performance dynamique, en filtrant la référence optimale de courant dans l'axe d , avec un filtre qui représente la dynamique du flux rotorique. On a du mal à comprendre la maximisation du couple pour un régime dynamique, sans prendre en compte la dynamique du flux; la commande utilisée [13, 14] est du type linéarisante entrée-sortie pour le modèle réduit du moteur avec observation du flux; la stabilité de la commande n'est pas démontrée.

Dans [81] il est proposé une méthode qu'utilise l'énergie emmagasinée dans les inductances pour obtenir des couples transitoires de grande magnitude, en respectant les limites des courants; la méthode est heuristique, considère la saturation mais est applicable seulement au démarrage de la machine.

Ojo *et al.* [62] ont considéré un critère pondéré pour maximiser le couple et le rendement, en considérant les contraintes des courants et tensions; la solution est numérique et seulement pour le régime stationnaire.

Dans notre travail, nous n'avons pas considéré explicitement la maximisation du couple; nous avons considéré des limites pour la norme des courants dans le problème de maximisation du rendement (voir section 4.11); nous avons obtenu les conditions nécessaires d'optimalité,

¹on peut considérer aussi des problèmes similaires pour la commande en position

mais la solution est numérique. Pour respecter les limites des tensions statoriques, nous avons intégré à notre commande, la stratégie de défluxage classique à haute vitesse (voir section 6.3.3).

La maximisation du couple avec contrainte des courants et tensions, en prenant en compte la restriction dynamique du flux, est à notre avis, un problème ouvert.

1.3.2 Maximisation du Rendement

La maximisation du rendement de la machine s'obtient en minimisant l'énergie consommée dans un intervalle du temps donné. Dans un entraînement électrique, nous avons deux types d'énergie:

- l'énergie stockée:
 - dans les inductances (magnétique),
 - dans l'inertie (mécanique);
- l'énergie dissipée:
 - par l'effet Joule dans les résistances,
 - par hystérésis et courants de Foucault dans le noyau,
 - et par le frottement mécanique.

Nous remarquons donc que la minimisation de l'énergie totale de la machine asynchrone inclut l'énergie dissipée (pertes) et **l'énergie emmagasinée**.

La maximisation du rendement pour la machine asynchrone, est un problème de commande optimale à horizon d'optimisation donné, sous contraintes dynamiques d'état. Pour une classe assez large des problèmes de commande en vitesse,² l'objectif est de trouver les tensions statoriques optimales qui minimisent l'énergie totale consommée par la machine dans un intervalle de temps donné, en amenant la vitesse de sa condition initiale (donnée), à une vitesse finale spécifiée, ceci en respectant les restrictions dynamiques de la machine³. L'état initial de la machine et l'intervalle de temps sont spécifiés, l'état final est libre en excluant la vitesse.

Ce problème est difficile à résoudre analytiquement, car il s'agit de trouver deux commandes qui minimisent une fonction de coût non quadratique en l'état, avec cinq restrictions dynamiques. **L'objectif principal de notre travail est de trouver une solution sous-optimale analytique de ce problème.**

Les Pertes de la Machine Asynchrone

Les pertes mécaniques varient linéairement (frottement) et quadratiquement (ventilation) en fonction de la vitesse. Par contre, la représentation des pertes électriques et magnétiques s'avère beaucoup plus difficile, surtout si on considère une distribution non-sinusoidale du flux

²on peut considérer aussi des problèmes similaires pour la commande en position

³il est possible aussi de considérer des contraintes additionnelles sur l'état et la commande

d'entrefer, les effets des encoches et l'effet de peau dans les conducteurs [44]. Plusieurs modèles des pertes ont été proposés et utilisés dans la littérature. Dans [44, 24, 64], les auteurs prennent en compte les pertes Joule des enroulements statoriques et rotoriques et les pertes du fer, modélisées à partir du schéma classique équivalent de la machine; dans ce schéma électrique, les paramètres électriques de la machine sont constants et les pertes fer sont modélisées de façon globale via une résistance en parallèle avec l'inductance de magnétisation. Mais les modèles des pertes peuvent être très sophistiqués si on considère les pertes supplémentaires dans les conducteurs et dans les matériaux magnétiques dues aux harmoniques de courants et de flux et à l'effet de peau qui augmente les résistances et en conséquence, les pertes Joule. Plusieurs auteurs ont traité ce sujet; Hosinger [32] a ajouté des résistances en parallèle (fonction des fréquences du stator et du glissement) avec les inductances de fuite du stator et du rotor, pour améliorer la représentation vis-à-vis des harmoniques des courants; il considère aussi séparément les pertes par hystérésis (proportionnelles à la fréquence) et les pertes par courants de Foucault (proportionnelles au carré de la fréquence) pour les pertes fer. Alger [3] a proposé une chaîne de circuits équivalents pour considérer plusieurs harmoniques simultanément. Le même auteur a proposé dans [2] des formules empiriques pour prendre en compte l'effet de peau dans la résistance et l'inductance de fuite du rotor. Dans [10] les auteurs présentent une étude expérimentale comparative entre les modèles: circuit classique équivalent, et les modèles proposés par Hosinger et Alger [3, 32]. Les modèles donnent de bons résultats pour les signaux sinusoïdaux mais ils sur-estiment (modèle classique et d'Hosinger) ou sous estiment les pertes (le modèle d'Alger) pour les signaux avec des harmoniques.

Dans le cadre de notre travail, nous avons considéré un modèle simplifié des pertes, qui prend en compte les pertes Joule statoriques et rotoriques avec les résistances constantes, et les pertes fer fonction de la fréquence d'alimentation et de la norme au carré du flux d'entrefer [48, 54], voir la section 3.2.1.

État de l'art sur l'optimisation du rendement des Machines asynchrones

On peut considérer deux méthodes pour minimiser les pertes de la machine asynchrone:

1. Par la conception même de la machine et l'alimentation, en considérant des matériaux plus performants, en réduisant les harmoniques de tension et de courant du convertisseur, etc.,
2. en sélectionnant de façon optimale la commande du moteur.

Par la suite, nous nous adresserons à la deuxième méthode; celle-ci, a été traitée via trois approches:

- **Heuristique:** Plusieurs travaux basés sur l'expérience personnelle des ingénieurs ou sur des règles intuitives, ont été reportées dans la littérature. Dans [58] Nola a présenté un contrôleur de tension pour un moteur monophasé qui varie le flux d'entrefer en fonction de la charge. Après cela, plusieurs auteurs (voir [64], [43], [52], entre autres) ont cherché les

points d'opération en régime stationnaire, qui améliorent le rendement de la machine; les analyses ont montré qu'en général le flux ou la vitesse de glissement, doivent s'adapter en fonction du point de fonctionnement de la machine. Par exemple, en utilisant un modèle pour le régime stationnaire, qui inclut la saturation, les pertes dues aux harmoniques et l'effet de peau, Kirschen [43] a déduit la possibilité d'améliorer le rendement en agissant sur le flux; il a proposé, une méthode heuristique [41, 42] pour varier en ligne le flux en fonction de la puissance totale d'entrée (supposée mesurable), pour une commande du type vectorielle; la méthode converge lentement, ce qui la rend seulement applicable pour les régimes stationnaires; d'autre part, la variation par morceaux de la référence du flux, affecte la performance du couple. Dans [37, 38] la même idée a été utilisée avec des commandes linéarisantes pour découpler le couple et le flux et ainsi éviter la dégradation de performance en couple. En [76] il a été proposé un algorithme de logique floue pour l'optimisation en ligne; la convergence est aussi très lente. Dans [64] et [24] il est utilisé une idée similaire pour imposer une vitesse de glissement optimale, pour un schéma de commande U/f [45].

Tous ces méthodes utilisent la mesure de la puissance d'entrée; comme elles sont basées en règles heuristiques, les méthodes doivent être appliquées cas par cas; ils ont l'avantage de pouvoir atteindre l'optimum global du régime stationnaire, mais il n'existe pas de garantie de convergence pour n'importe quelle condition d'opération.

- **Numerique:** Toutes les méthodes discutées ci-dessus utilisent le modèle stationnaire de la machine. Pour des régimes dynamiques, il est possible d'utiliser des méthodes d'optimisation dynamique, pour trouver des trajectoires optimales du flux et de la vitesse qui minimisent l'énergie totale de la machine [48], [6]. Dans [48] il est utilisé la programmation dynamique [9] pour le calcul -hors-ligne- de la solution optimale. Les auteurs considèrent des contraintes dans la commande et l'état; les conditions frontières sont imposées pour la vitesse et la position, le flux initial⁴ et final sont supposés libres. Plusieurs modes d'opération sont testés: accélération, freinage, inversion de sens et retour à la condition initiale. Le modèle des pertes est celui de [54] et la commande qui rend invariants les trajectoires est de type vectorielle indirecte [55]. Il y a deux conclusions de cet article que nous avons constatés dans notre travail:

1. les pertes sont beaucoup plus importantes pendant le mode d'accélération (il faut fournir à la machine, d'énergie mécanique et magnétique),
2. les améliorations du rendement sont importantes (pour le cycle choisi, l'amélioration du rendement va jusqu'à 20% par rapport à celui de l'opération à flux constant), sauf si il existe des périodes courtes d'accélération (des variations rapides du couple).

Les mêmes auteurs présentent quelques pages après dans la même revue, un étude [48] de dimensionnement du moteur et du choix de la trajectoire de vitesse, à partir des résultats

⁴supposer le flux initial libre pour l'optimisation, oblige à prefluxer la machine à la valeur obtenue par l'optimisation, ce qui n'est pas pratique; il est plus réaliste et pratique, de considérer tout l'état initial donné, comme cela se fait d'habitude pour la commande optimale de ce genre de problème

de l'optimisation dynamique; dans cet article, les auteurs proposent pour la première fois, une technique pour obtenir des trajectoires de la norme du flux qui **s'approchent** de la trajectoire optimale. Comme la trajectoire de vitesse est périodique, la trajectoire résultante du flux optimal est aussi périodique; les auteurs proposent donc, une approximation en considérant les deux premiers termes du développement en série de Fourier. Aucune analyse de sous-optimalité est donnée pour la méthode proposée. Dans [6] il est proposé aussi, une méthode heuristique qui rassemble la simplicité de la solution optimale stationnaire analytique obtenue dans [73], avec les résultats de l'optimisation via la programmation dynamique.

Les méthodes numériques exigent beaucoup de temps de calcul et la connaissance à priori des trajectoires du couple; ils ne sont donc pas envisageables pour des applications comme la voiture électrique ou la régulation de vitesse avec couple inconnu de charge ou la trajectoire du couple n'est pas connue en avance.

- **Analytique:** Les solutions analytiques du problème d'optimisation ont l'avantage de pouvoir être utilisées directement en temps réel, car c'est une équation qui donne la trajectoire optimale de la commande. En plus, elles s'adaptent plus facilement aux applications avec couple méconnu en avance. Par contre, elles sont moins robustes que les méthodes heuristiques, car normalement elles dépendent des paramètres du moteur; d'un autre côté, elles utilisent souvent des hypothèses simplificatrices, qui les rendent sous-optimales. Ces mésavantages peuvent être atténués, en ajoutant des mécanismes d'adaptation de paramètres et/ou des algorithmes heuristiques comme ceux que nous avons mentionné au-dessus. Pour atteindre le maximum de performances, elles sont incontournables.

C'est dans l'approche analytique que se place notre travail. La plupart des travaux précédents, ont été sur le calcul analytique des points d'opération optimaux en régime stationnaire. Dans [44] une équation est donnée pour la fréquence optimale de glissement qui minimise seulement les pertes Joule de la machine. Dans [73] il est considéré additionally, l'énergie magnétique emmagasinée dans la machine; tout l'état optimal de la machine est calculé rigoureusement; il a été obtenu que pour l'opération optimale, la norme du flux est proportionnelle à la racine carré du couple, ceci implique, une fréquence de glissement constante et que le courant dans l'axe d varie de façon proportionnelle au courant dans l'axe q [19]. Des résultats expérimentaux ont été présentés en [51] et [74]; dans ces articles il est considéré un critère pondéré de l'énergie magnétique et les pertes Joule; ceci permet de choisir les facteurs de pondération de telle manière que le flux optimal coïncide avec le flux nominal de la machine, au point nominal de fonctionnement. Ceci est important, car la machine est désignée comme étant optimale, au point nominal.

En négligeant les inductances de fuite, Garcia *et al.* ont calculé dans [28] une solution optimale stationnaire qui considère les pertes fer, modélisées celles-ci par une résistance équivalente constante; dans ce cas, la norme du flux est fonction de la vitesse et le couple, i.e. le facteur de proportionnalité entre les courants dans les axes d et q est une fonction non-linéaire de la vitesse. Un résultat similaire avec une résistance équivalente fonction

de la vitesse a été rapporté dans [49], ce résultat est validé seulement en simulation. Dans ces deux derniers travaux, il n'est pas garanti qu'au point nominal, l'état de la machine coïncide avec celui spécifié par le constructeur.

Pour le régime dynamique, les contributions ont démarré avec les travaux de Seleme [72, 79] qui précèdent cette thèse. Dans [72] il a été considéré comme degré de liberté la fréquence de glissement;⁵ la fonction du coût, minimise l'intégral de l'énergie magnétique du moteur; le modèle utilisé est d'ordre complet dans les axes dq . Le problème a été posé comme un problème de calcul variationnel, les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité ont été données. Une solution approchée a été aussi proposée, elle consiste à maintenir constante la vitesse de glissement et égal à sa valeur constante optimale du régime stationnaire; une comparaison a été faite avec une solution numérique obtenue via la programmation dynamique, pour certaines trajectoires lisses du couple. Une loi de commande basée sur la passivité [57, 63] a été choisie pour rendre invariante la référence optimale de l'état; cette commande a besoin de la mesure des dérivés d'accélération (Jerk en Anglais).

C'est là o se situe le point de départ de cette thèse.

En parallèle aux travaux cités précédemment, il y a eu plusieurs articles sur une application particulière: le véhicule électrique. Pour sa simplicité, sa robustesse, et son faible coût, le moteur asynchrone est un candidat bien placé pour être utilisé dans ce genre d'application. Young *et al.* [83] ont proposé un algorithme pour minimiser les pertes pendant la phase d'accélération; Galler [27] a développé un autre algorithme pour minimiser les pertes en utilisant la fréquence et la magnitude de la tension, pour une trajectoire spécifique de la voiture. Fetz [25], a traité le problème du rendement en régime stationnaire d'une machine asynchrone de 25 kW, utilisée pour les véhicules électriques. L'optimisation (heuristique) est pour le régime stationnaire et considère la saturation; elle donne les courants optimaux qui maximisent le couple et selon les auteurs, qui maximisent aussi le rendement⁶. L'optimisation est utilisée pour des régimes dynamiques, en utilisant des filtres supplémentaires pour la référence du flux. Des algorithmes de synchronisation pour le défluxage et la protection de sur-courants, sont aussi présentés. Récemment Barbier *et al.* ont présenté un étude [7] pour l'optimisation globale de l'entraînement électrique; l'évaluation est basée sur la modélisation globale de tout le système. L'optimisation seulement minimise les pertes Joule du stator en régime stationnaire. Les résultat montrent que pour le cycle urbain EUROPE (voir section 5.3.5) l'autonomie peut être augmentée jusqu'à 29% de celle obtenue avec la commande à flux constant.

⁵le problème a été ramené via un changement de coordonnées dans une nouvelle coordonnée nommée y ; en effet, il est facile de vérifier que y est proportionnel à la norme du flux x , qui a été utilisé dans le cadre de cette thèse

⁶le flux qui maximise le couple pour une norme des courants spécifiés, a une loi de variation proportionnelle à la racine carrée du couple, mais le facteur de proportion n'est pas le même que celui obtenu en maximisant le rendement

1.3.3 Régulation optimale

Dans le cadre de notre travail, nous avons traité le problème de la régulation optimale du flux, autour du point optimal stationnaire. Nous présentons ici quelques travaux de régulation optimale pour la machine asynchrone, qui ont été publiés précédemment. Dans [26] un retour complet d'état nonlinéaire est proposé en utilisant une fonction de Lyapunov, pour un modèle bilinéaire de la machine; il est montré que la commande minimise un critère quadratique de l'état et la commande. Murata *et al.* [53] ont proposé une commande LQ pour le modèle linéarisé en dq de la machine. Pour le même modèle, dans [22] sont proposés une boucle interne LQR linéarisante et un contrôleur PI externe pour la vitesse. YU [84] a proposé un contrôleur LQR/LTR [4] de position en utilisant le modèle réduit et linéarisé du moteur. Tous ces travaux assument l'accès total de l'état pour la conception de la commande.

1.4 Notre Contribution

Nous avons des contributions sur les aspects théoriques et de mise en oeuvre de la commande optimale de la machine asynchrone.

1.4.1 Contribution théorique

Etant donnée la complexité du problème d'optimisation du rendement du moteur, d'abord nous l'avons reformulé en utilisant le modèle réduit [18]. Nous sommes arrivés au problème de minimiser une fonction du coût non quadratique dans l'état, variable dans le temps et avec une restriction dynamique linéaire, la dynamique du flux. Nous avons établi les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour ce problème via le calcul variationnel [18]. Ces conditions disent que la solution optimale doit satisfaire l'équation d'Euler; mais cette équation est nonlinéaire, de deuxième ordre, variable dans le temps et avec des valeurs limites en deux points. Nous nous sommes donc consacré à étudier ces propriétés; nous montrons que cette équation a: au plus, une solution bornée asymptotique; une et seulement une solution stationnaire pour le couple désiré constante et la condition initiale égale à l'optimale laquelle est donnée analytiquement, et qu'elle a une et seulement une solution asymptotique (qui a été calculée analytiquement), pour le couple désiré constante et n'importe quelle condition initiale; à notre connaissance, cette solution est la première solution dynamique du problème de commande optimale du moteur.

Nous avons aussi obtenu les conditions nécessaires d'optimalité sans utiliser la contrainte forte de poursuite de couple: couple du moteur égale au couple désiré et nous avons calculé les conditions nécessaires d'optimalité en considérant des limites pour les courants.

Pour des trajectoires désirées du couple variables dans le temps et méconnues à l'avance, nous avons d'abord proposé une solution qui se rapproche de la solution optimale pour des signaux de couple désiré sans composants de haute fréquence [18]; mais si la densité spectrale du signal du couple désiré a des fréquences élevées, la solution peut être plus coûteuse en termes énergétiques, que l'opération à flux constant.

Nous avons changé de stratégie et nous avons attaqué le problème avec l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi; la connaissance du problème nous a permis de trouver une solution de cette équation pour le couple désiré constant [69]. Cette solution a des caractéristiques très intéressantes:

- Pour des trajectoires du couple désiré variables dans le temps, elle donne *en ligne* des références *sous-optimales* de la norme du flux qui minimisent une limite supérieure de la fonction du coût optimal à l'horizon infini. C'est la première solution approchée du problème dynamique d'optimisation, qui donne un *critère analytique de sous-optimalité*.
- Elle améliore la solution approchée du fait qu'elle considère intrinsèquement la restriction dynamique du flux, cela la rend *moins sensible* aux fréquences élevées du couple désiré.
- Pour le couple désiré constant sur un horizon infini, elle donne les trajectoires asymptotiques *optimales* de la norme du flux pour n'importe quelle condition initiale et finale du flux.
- Elle est directement paramétrisable en termes des données de la machine. En plus, par sa simplicité, elle ne requiert pas de puissance de calcul élevée. Cela la rend donc *compatible* avec d'autres schémas de commande.

Cette solution sous-optimale, constitue la contribution plus importante de notre travail.

En collaboration avec D. Georges, nous avons utilisé aussi l'équation d'Hamilton-Jacobi pour obtenir deux lois de commande pour la régulation optimale autour de la solution optimale stationnaire, au sens H_2 et H_∞ [30]. Ces lois de commande assurent l'objectif de régulation du couple et la stabilité interne de la dynamique du flux en boucle fermée.

1.4.2 Mise en oeuvre

Nous avons testé les stratégies que nous avons proposées, en simulation et en expérimentation, dans des différentes conditions d'opération et nous les avons comparé entre elles et avec la commande classique à flux constant. Avec l'aide du projet PRC/GDR 'Commande des Machines Electriques' nous avons fait des expériences à Nantes pour évaluer expérimentalement la solution approchée et la comparée avec le fonctionnement de la machine pendant le démarrage [68]. Pour rendre invariantes les références, nous avons conçu une loi de commande du type vectorielle qui est asymptotiquement stable, avec stabilité interne des états [70]. Á Grenoble, nous avons validé expérimentalement l'amélioration du rendement de la machine en utilisant la commande sous-optimale. L'évaluation a été faite pour différentes conditions d'opération d'asservissements électriques industrielles.

Nous avons proposé des solutions aux principaux problèmes de la mise en oeuvre: limitation de la référence du flux pour éviter des références nulles et dans la région de saturation; filtrage des références pour assurer les conditions de différentiabilité imposées pour l'optimisation; nous

avons aussi proposé une stratégie qui permet des changements sans sauts entre les références sous-optimales et d'affaiblissement du flux, en évitant ainsi la saturation de tension de l'onduleur à haute vitesse.

Comme nous avons utilisé le modèle réduit pour l'optimisation, nous avons adopté une structure de commande en cascade avec une commande interne des courants à haut gain, une commande au milieu pour la poursuite du couple et du flux et une commande externe de vitesse.

Nous avons constaté que la stratégie de commande sous-optimale améliore le rendement du moteur, en gardant des performances adéquates de poursuite de couple, flux et vitesse.

Chapitre 2

Modélisation

2.1 Introduction

Pour la synthèse de la commande, il est nécessaire de définir un modèle de la machine, celui-ci doit être obtenu à l'aide des lois physiques électriques, électromagnétiques et mécaniques.

Il existe une grande variété de modèles de la machine asynchrone selon l'état, les entrées, les sorties et les repères choisis pour sa représentation; dans ce chapitre nous nous limiterons aux modèles que nous avons utilisés pour notre travail; ce sont les modèles qui utilisent comme entrées les courants (modèle réduit) ou les tensions statoriques (modèle complet), comme état, le vecteur du flux rotorique et le vecteur des courants statoriques; comme sorties, nous considérons le couple moteur et la norme du flux pour la partie électrique, et la vitesse pour la partie mécanique. Tous ces modèles seront présentés dans les repères les plus utilisés, soit les modèles ab , $\alpha\beta$ et dq .

Nous présentons d'abord le modèle dans les repères 'naturelles' de la machine, les repères ab . Ensuite, les autres modèles équivalents s'obtiendront par rotation.

2.2 Hypothèses de modélisation

Les modèles que nous avons utilisé pour notre étude, sont ceux qui admettent la transformation de Park. La modélisation de la machine asynchrone repose donc sur les mêmes hypothèses simplificatrices des modèles de Park, à savoir:

Hypothèse 2.1 *La machine est supposée symétrique et équilibrée* △

Hypothèse 2.2 *L'induction dans l'entrefer est sinusoïdale* △

Hypothèse 2.3 *Le circuit magnétique est non saturé* △

Hypothèse 2.4 *La perméabilité magnétique du noyau est infinie; les pertes ferromagnétiques sont négligeables* △

Hypothèse 2.5 *On ne considère ni l'effet de peau, ni les effets des encoches* △

L'hypothèse 2.4 est la plus restrictive vis-à-vis de l'optimisation du rendement du moteur car ces pertes deviennent très importantes à haute vitesse. Les seules pertes modélisées sont donc les pertes Joule dans les enroulements électriques. Nous allons évoquer ce point plus en détail ultérieurement dans ce mémoire.

2.3 Modélisation du moteur dans les repères $a - b$

L'hypothèse 2.1 permet de transformer la machine triphasée originale en une machine diphasée équivalente du point de vue électrique et magnétique, dans laquelle on a deux jeux d'enroulements à axes orthogonaux: des axes fixes pour le stator et des axes mobiles pour le rotor, lesquels tournent à la vitesse angulaire rotorique ω , (Figure 2.1). Dans ces repères, les

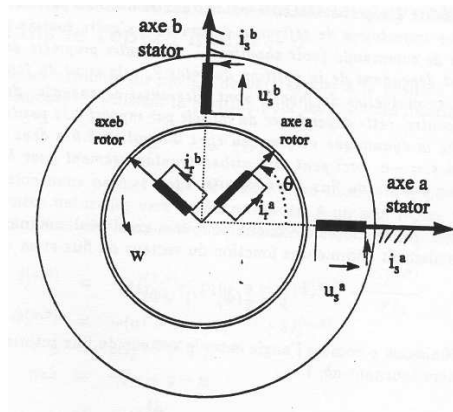


Figure 2.1: Les repères ab .

équations de tensions sont [20]:

$$U_s^{(a,b)} = R_s I_s^{(a,b)} + \dot{\Phi}_s^{(a,b)} \quad (2.1)$$

$$(2.2)$$

R_s, R_r désignent les résistances du stator et du rotor, $U_s^{(a,b)} = [u_s^a \ u_s^b]^T \in \mathcal{R}^2$ est le vecteur des tensions statoriques (les variables de commande), $I_s^{(a,b)} = [i_s^a \ i_s^b]^T \in \mathcal{R}^2$, $I_r^{(a,b)} = [i_r^a \ i_r^b]^T \in \mathcal{R}^2$, sont les vecteurs des courants statoriques et rotoriques, $\Phi_s^{(a,b)} = [\phi_s^a \ \phi_s^b]^T \in \mathcal{R}^2$, $\Phi_r^{(a,b)} = [\phi_r^a \ \phi_r^b]^T \in \mathcal{R}^2$ sont les vecteurs des flux statoriques et rotoriques; le flux s'expriment sous la forme:

$$\Phi_s^{(a,b)} = L_s I_s^{(a,b)} + L_{sr} U^T(v\theta) I_r^{(a,b)} \quad (2.3)$$

$$\Phi_r^{(a,b)} = L_{sr} U(v\theta) I_s^{(a,b)} + L_r I_r^{(a,b)} \quad (2.4)$$

o L_s, L_r et L_{sr} sont les inductances statorique, rotorique et mutuelle respectivement; $U(\cdot)$ est la matrice de rotation:

$$U(\cdot) = \begin{bmatrix} \cos(\cdot) & \sin(\cdot) \\ -\sin(\cdot) & \cos(\cdot) \end{bmatrix}$$

En considérant à $I_s^{(a,b)}$ et $\Phi_r^{(a,b)}$ comme les états du système, les équations qui représentent la dynamique électrique du moteur, sont:

$$\dot{I}_s^{(a,b)} = -\gamma I_s^{(a,b)} + \eta(aI - v\omega J)U^T(v\theta)\Phi_r^{(a,b)} + \frac{U_s^{(a,b)}}{\sigma L_s} \quad (2.5)$$

$$\dot{\Phi}_r^{(a,b)} = -a\Phi_r^{(a,b)} + bU(v\theta)I_s^{(a,b)} \quad (2.6)$$

Le couple électrique [20] et les équations mécaniques, s'expriment par :

$$y = c(I_s^{(a,b)})^T U^T(v\theta) J \Phi_r^{(a,b)} \quad (2.7)$$

$$m\dot{\omega} = -f\omega + y - y_l \quad (2.8)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (2.9)$$

Où:

θ est la position du rotor, y est le couple électrique et y_l est le couple (inconnu) de charge.

Les constantes $\gamma, \sigma, \eta, a, b$ et c sont fonctions des paramètres électriques du moteur, voir l'annexe A pour les définitions de ces constantes et des paramètres électriques et mécaniques; I et J sont les matrices 2×2 identité et antisymétrique, respectivement:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad J = -J^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

Remarque 2.1 Dans ce modèle, les différentes grandeurs de la commande et de l'état électrique sont sinusoïdales; la conception d'une loi de commande à partir de ce modèle, pose des problèmes d'implantation à cause de la sensibilité des grandeurs sinusoïdales aux retards; en particulier, la poursuite des trajectoires de référence de courants s'avère comme un problème difficile de commande (voir chapitre 6). Une autre propriété du modèle est qu'il est dépendant de la position du rotor θ ; cela vient du fait que les inductances mutuelles du modèle sont elles aussi dépendentes de la rotation θ ; par contre, cette dépendance du modèle par rapport à la position du rotor, simplifie la dynamique du flux; en effet, l'équation 2.6 a deux valeurs propres en $s = -a$, ceci peut être utilisé avantageusement pour la conception des observateurs du flux (voir chapitre 6).

Notez que le couple électrique peut être exprimé d'une manière équivalente seulement comme une fonction du vecteur du flux et sa dérivée: [67]:

$$y = \frac{c}{b} (\dot{\Phi}_r^{(a,b)})^T J \Phi_r^{(a,b)} \quad (2.10)$$

Définissons ρ comme l'angle entre le vecteur du flux rotorique et l'axe a du repère tournant ab , *i.e.* :

$$\rho := \arctan\left(\frac{\phi_r^b}{\phi_r^a}\right)$$

En dérivant cette expression et en utilisant (2.10), on obtient la propriété suivante du modèle ab [23]:

Propriété 2.1 *Le couple électrique y est proportionnel au produit de la norme au carré du flux rotorique pour la vitesse angulaire de glissement $\dot{\rho}$:*

$$y = \frac{c}{b} \|\Phi_r^{(a,b)}\|^2 \dot{\rho} \quad (2.11)$$

◁

En général cette propriété est valide pour les autres représentations de la machine obtenues en utilisant les hypothèses du modèle de Park, données dans la section 2.2. L'équation (2.11) montre aussi que le point $\|\Phi_r^{(a,b)}\| = 0$ est une singularité de la machine; pour l'éviter nous faisons l'hypothèse suivante:

Hypothèse 2.6 *La norme du flux est positive:*

$$x = \|\Phi_r^{(a,b)}\| > 0 \quad (2.12)$$

△

Cette hypothèse nous restreint le domaine de validité du modèle mais évite le passage par le point singulière $x = 0$.

2.4 Modélisation des Machines Asynchrones dans le repère fixe $\alpha - \beta$

La dépendance explicite du modèle ab par rapport à la position du rotor peut être éliminée en utilisant la rotation pour les variables rotoriques:

$$\Phi_r^{(\alpha,\beta)} = U^T(\nu\theta) \Phi_r^{(a,b)} \quad (2.13)$$

2.5. MODÉLISATION DES MACHINES ASYNCHRONES DANS LE REPÈRE TOURNANT $D-Q$

Cette rotation nous permet donc de passer d'un modèle à double repère de coordonnées naturelles vers un autre modèle à un seul repère fixe; les équations qui décrivent la dynamique du système dans ce repère sont:

$$\dot{I}_s^{(\alpha,\beta)} = -\gamma I_s^{(\alpha,\beta)} + \eta(aI - v\omega J)\Phi_r^{(\alpha,\beta)} + \frac{U_s^{(\alpha,\beta)}}{\sigma L_s} \quad (2.14)$$

$$\dot{\Phi}_r^{(\alpha,\beta)} = -(aI - v\omega J)\Phi_r^{(\alpha,\beta)} + bI_s^{(\alpha,\beta)} \quad (2.15)$$

$$y = c(I_s^{(\alpha,\beta)})^T J \Phi_r^{(\alpha,\beta)} \quad (2.16)$$

$$m\dot{\omega} = -f\omega + y - y_l \quad (2.17)$$

où $U_s^{(\alpha,\beta)} := [u_\alpha, u_\beta]^T = U_s^{(a,b)}$.

Remarque 2.2 Dans la littérature, il n'existe pas de définition standard pour les modèles $a-b$ et $\alpha-\beta$; on trouve des auteurs qui nomment modèles $a-b$ ceux à un seul repère fixe et modèles $\alpha-\beta$ ceux à deux repères.

Remarque 2.3 De même comme pour le modèle ab , l'état électrique et la commande $U_s^{(\alpha,\beta)}$, sont des grandeurs sinusoïdales; maintenant, le modèle ne dépend pas explicitement de la position du rotor mais la dynamique du flux est fonction de la vitesse; en effet, cette dynamique a une paire de pôles complexes conjugués $s_{1-2} = -a \pm jv\omega$ lesquels deviennent peu amortis à haute vitesse. L'intégration directe de l'équation (2.15) peut donc devenir instable à faible période d'échantillonnage [78].

2.5 Modélisation des Machines Asynchrones dans le repère tournant $d-q$

À partir du modèle $\alpha\beta$, nous pouvons obtenir une nouvelle représentation avec des grandeurs continues en régime stationnaire (modèle dq), en utilisant la rotation de repère:

$$\begin{bmatrix} I_s^{(d,q)} \\ \Phi_r^{(d,q)} \end{bmatrix} := T(\theta_a) \begin{bmatrix} I_s^{(\alpha,\beta)} \\ \Phi_r^{(\alpha,\beta)} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$T(\theta_a) := \text{diag}\{U(\theta_a), U(\theta_a)\} \in \mathcal{R}^{4 \times 4}, \quad (2.19)$$

dans le repère dq , les axes tournent à la vitesse angulaire électrique de la tension d'alimentation $\omega_a := \dot{\theta}_a$ et sont orientés selon la direction du flux rotorique ¹ (voir figure 2.2):

$$\theta_a := \rho + v\theta \quad (2.20)$$

En appliquant cette transformation au système d'équations (2.14)-(2.16) on obtient la

¹d'autres choix sont possibles, par exemple, dans la direction du vecteur du flux statorique

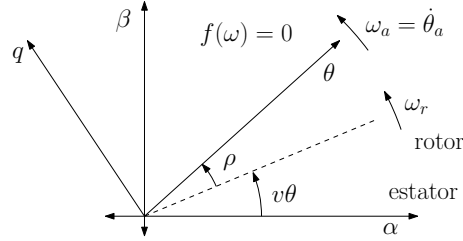


Figure 2.2: Représentation vectorielle des repères $\alpha\beta$ (fixe) et dq (tournant).

représentation de la machine dans le repère dq :

$$\dot{I}_s^{(d,q)} = -(\gamma I + \omega_a J) I_s^{(d,q)} + \eta(aI - v\omega J) \Phi_r^{(d,q)} + \frac{U_s^{(d,q)}}{\sigma L_s} \quad (2.21)$$

$$\dot{\Phi}_r^{(d,q)} = -(aI + (\omega_a - v\omega)J) \Phi_r^{(d,q)} + bI_s^{(d,q)} \quad (2.22)$$

$$y = c(I_s^{(d,q)})^T J \Phi_r^{(d,q)} \quad (2.23)$$

$$m\dot{\omega} = -f\omega + y - y_l \quad (2.24)$$

où $U_s^{(d,q)} := [u_s^d, u_s^q]^T = U(\theta_a)U_s^{(\alpha,\beta)}$ et $\omega_a = \dot{\theta} + v\omega$.

Propriété 2.2 La puissance électrique instantanée P :

$$P = (U_s^{(\alpha,\beta)})^T I_s^{(\alpha,\beta)} \quad (2.25)$$

$$= (U^T(\theta_a)U_s^{(d,q)})^T U^T(\theta_a)I_s^{(d,q)} \quad (2.26)$$

$$= (U_s^{(d,q)})^T U(\theta_a)U^T(\theta_a)I_s^{(d,q)} \quad (2.27)$$

$$= (U_s^{(d,q)})^T I_s^{(d,q)}, \quad (2.28)$$

est conservée sous cette transformation, par conséquent, l'énergie du système $E = \int P dt$ est invariante par rapport à cette transformation.

Remarque 2.4 Le modèle dq permet de travailler directement sur des grandeurs continues en régime permanent, il est alors possible de déterminer le point d'équilibre électrique du moteur par la résolution du système d'équations (2.21)-(2.22) avec $\dot{I}_s^{(d,q)} = 0$ et $\dot{\Phi}_r^{(d,q)} = 0$.

Remarque 2.5 Il est possible aussi de passer directement du modèle ab au modèle dq , en utilisant la transformation:

$$\begin{bmatrix} I_s^{(d,q)} \\ \Phi_r^{(d,q)} \end{bmatrix} := T(\theta_a, \theta) \begin{bmatrix} I_s^{(a,b)} \\ \Phi_r^{(a,b)} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$T(\theta_a, \theta) := \text{diag}\{U(\theta_a), U(\theta_a - v\theta)\} \in \mathcal{R}^{4 \times 4} \quad (2.30)$$

En plus, comme dans le modèle $\alpha\beta$, l'axe d est confondu avec l'axe a de l'enroulement statorique, on peut donc passer directement du modèle dq au modèle $\alpha\beta$, en faisant $\omega_a = 0$ en (2.21) et (2.22).

Remarque 2.6 Les lois de commande conçues en utilisant le modèle dq ont besoin de la reconstruction de la position angulaire du flux ρ . Cela peut donner moins de robustesse aux ces lois de commande qu'aux lois de commande dans les repères statoriques fixes ab ou $\alpha\beta$.

Si le repère d est orienté dans la direction du flux, la composante du flux dans l'axe q est nulle: $\phi_r^q = \dot{\phi}_r^q = 0$; ce qui permet d'écrire (2.22) et (2.23) en termes de la norme du flux $x = \sqrt{(\Phi_r^{(d,q)})^T \Phi_r^{(d,q)}} > 0$, le glissement $\dot{\rho}$ et les courants statoriques:

$$\dot{x} = -ax + bi_s^d; \quad (2.31)$$

$$\dot{\rho} = \frac{by}{cx^2} \quad (2.32)$$

$$y = cx i_s^q. \quad (2.33)$$

Nous retrouvons en (2.32) la propriété 2.1 du modèle de Park du moteur. Les équations (2.31) et (2.32) sont une représentation en coordonnées polaires (magnitude et angle) de la dynamique du flux en coordonnées rectangulaires ab , (2.6).

Remarque 2.7 Les équations (2.31) et (2.33) suggèrent de commander les courants de telle manière qu'on agisse d'une façon découplée sur le couple et le flux:

- La composante i_s^d imposant la norme du flux, et
- La composante i_s^q imposant le couple y

Ceci c'est l'idée de base de la commande vectorielle à flux orienté [45].

2.6 Modèles Réduits

On obtient une notable simplification et pour la commande et pour l'optimisation, si l'on considère les courants statoriques comme les variables de commande du système; dans cette section nous dérivons le modèle réduit du moteur dans le repère dq ; cette analyse peut se faire aussi dans les autres repères (voir [69] pour la même dérivation dans les repères ab).

Nous considérons une boucle interne de courants statoriques à haut gain:

$$U_s^{(d,q)} = \frac{\sigma L_s}{\epsilon} (U - I_s^{(d,q)}),$$

où $0 < \epsilon \ll 1$ et U est une nouvelle commande; à partir de cette commande nous allons obtenir le modèle réduit en utilisant la théorie des perturbations singulières [36].

Avec cette commande, l'équation (2.21) devient:

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{I}_s^{(d,q)} &= \epsilon \left[-(\gamma I + (\omega + \dot{\rho})J)I_s^{(d,q)} + \eta(aI - v\omega J)\Phi_r^{(d,q)} \right] + U - I_s^{(d,q)} \\ &= g(t, \Phi_r^{(d,q)}, \omega, I_s^{(d,q)}, \epsilon) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_r^{(d,q)} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(aI + \dot{\rho}J) & 0 \\ \frac{c}{m}(I_s^{(d,q)})^T J & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_r^{(d,q)} \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bI_s^{(d,q)} \\ -y_l/m \end{bmatrix} \\ &= f(t, \Phi_r^{(d,q)}, \omega, I_s^{(d,q)}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Les équations (2.34), (2.35) correspondent à un système dans la forme standard pour l'analyse par perturbations singulières [36]; $\epsilon = 0$ dans (2.34), donne les racines réelles isolées: $g(t, \Phi_r^{(d,q)}, \omega, I_s^{(d,q)}, 0) = 0$, alors: $I_s^{(d,q)} = U$. Ces racines substitués dans (2.35) donnent le modèle réduit:

$$\dot{\Phi}_r^{(d,q)} = -(aI + \dot{\rho}J)\Phi_r^{(d,q)} + bU \quad (2.36)$$

$$m\dot{\omega} = -f\omega + cU^T J\Phi_r^{(d,q)} - y_l \quad (2.37)$$

Ce modèle est nommé dans la littérature, le modèle réduit asservi en courants; il ne prend pas en compte la dynamique tension-courant (eq. 2.21) en considérant le vecteur des courants statoriques comme les commandes du système.

Nous pouvons approcher les réponses du modèle (2.34), (2.35) en termes des réponses du modèle réduit (2.36), (2.37) dans un horizon fini $[0, T]$, en utilisant le Théorème de Tikhonov (Théorème 9.1 en [36]); pour cela, nous devons d'abord vérifier les conditions de ce Théorème:

Conditions (1):

- (a) f , g et ces premières dérivées partielles par rapport à ces arguments, sont continues et bornées.
- (b) Le jacobien $\frac{\partial g}{\partial I_s^{(d,q)}}(t, \Phi_r^{(d,q)}, \omega, I_s^{(d,q)}, 0)$ et ces premières dérivées partielles par rapport à ces arguments, sont continues et bornées.
- (c) Le jacobien du modèle réduit et ces premières dérivées partielles par rapport à ces arguments, sont continues et bornées.

△

Il est facile de vérifier que f et g sont continues et bornées; quant à ces premières dérivées partielles, elles sont continues et bornées si \dot{U} et \dot{y}_l sont bornées ce que nous supposons comme une hypothèse;

Comme $\frac{\partial g}{\partial I_s^{(d,q)}}(t, \Phi_r^{(d,q)}, \omega, I_s^{(d,q)}, 0) = I$ est constante, la condition $1 - b$ est satisfaite; finalement, comme le jacobien du modèle réduit est indépendant de $\Phi_r^{(d,q)}$ et ω , la condition $1 - c$

est aussi satisfaite.

Condition (2): Le modèle réduit a une seule solution: $\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_r(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix}$, définie en $[0, T]$, et telle que: $\left\| \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_r(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix} \right\| \leq c_1 < c, \forall t \in [0, T]$. \triangle

Les solutions du modèle réduit (2.36)-(2.37), $\forall t \in [0, T]$ sont:

$$\bar{\Phi}_r(t) = e^{At} \Phi_r(0)^{(d,q)} + b \int_0^t e^{A(t-\lambda)} U(\lambda) d\lambda; \quad A = -aI - \rho J \quad (2.38)$$

$$\bar{\omega}(t) = e^{-\frac{t}{m}t} \omega(0) + \frac{c}{m} \int_0^t e^{-\frac{t}{m}(t-\lambda)} (U^T(\lambda) J \bar{\Phi}_r(\lambda) - y_l) d\lambda \quad (2.39)$$

pour U et y_l bornées, elles sont donc, uniques et bornées.

Condition (3): Le modèle de couche frontière (boundary layer model) est globalement exponentiellement stable. \triangle

Le modèle de couche frontière est:

$$\frac{dY_I}{d\tau} = g(t, \Phi_r^{(d,q)}, \omega, Y_I + U, 0) \quad (2.40)$$

$$= -Y_I, \quad Y_I(0) = I_s(0)^{(d,q)} - U(0) \quad (2.41)$$

où $Y_I = I_s^{(d,q)} - U$ et $\tau = \frac{t-t_0}{\epsilon}$; la réponse de ce modèle est:

$$Y_I(\tau) = e^{-\tau} Y_I(0)$$

Evidemment, l'origine du modèle de couche frontière est globalement exponentiellement stable.

Toutes les conditions du Théorème de Tikhonov sont vérifiées, alors, nous pouvons approcher les réponses du modèle à perturbations singulières (2.34), (2.35) en termes des réponses $Y_I(\tau)$ du modèle de couche frontière, et des solutions: $\bar{\Phi}_r(t)$, $\bar{\omega}(t)$ du modèle réduit, ce qui donne:

$$\Phi_r^{(d,q)}(t) - \bar{\Phi}_r(t) = \mathcal{O}(\epsilon) \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.42)$$

$$\omega(t) - \bar{\omega}(t) = \mathcal{O}(\epsilon) \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.43)$$

$$I_s^{(d,q)}(t) - U(t) - (I_s^{(d,q)}(0) - U(0))e^{-\frac{t}{\epsilon}} = \mathcal{O}(\epsilon) \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.44)$$

On peut noter que $I_s(t)$ a deux échelles de temps: un transitoire rapide $Y_I(0)e^{-\frac{t}{\epsilon}}$ et l'état quasi-stationnaire $U(t)$ tandis que $\Phi_r^{(d,q)}$ et ω ont des transitoires rapides d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$ et sont fondamentalement des états quasi-stationnaires.

Remarque 2.8 Nous pouvons étendre l'intervalle $[0, T]$ à l'infini si nous concevons une loi de commande U , telle que l'origine du modèle réduit en boucle fermée, soit exponentiellement stable. Voir par exemple, [18] pour une commande de ce genre.

Le modèle réduit (2.36)-(2.37) est équivalent au modèle (2.31)-(2.33), c'est-à-dire:

$$\dot{x} = -ax + bu_1 \quad (2.45)$$

$$\dot{\rho} = \frac{b}{x}u_2 \quad (2.46)$$

$$y = cxu_2 \quad (2.47)$$

$$m\dot{\omega} = -f\omega + cxu_2 - y_l \quad (2.48)$$

Celui-ci est le modèle que nous retiendrons pour la minimisation de l'énergie du moteur dans les prochains chapitres.

2.7 Conclusion sur la Modélisation

Dans ce chapitre nous nous sommes attachés à présenter les différents modèles de la machine asynchrone sous une forme propice pour la suite de cet étude. Tout en particulier, le modèle réduit (2.45)-(2.48) se présente très adéquat pour l'étude ultérieure du problème de poursuite de couple à énergie minimale, car il montre d'une manière simple les principales variables du problème:

- Les commandes: Les courants statoriques
- La sortie: Le couple (ou la vitesse)
- Le degré de liberté: Le flux, exprimé en termes de sa norme et sa position angulaire.
- Les contraintes: Le couple à fournir et la restriction dynamique du flux

C'est pour tout cela que nous avons adopté ce modèle pour les chapitres d'optimisation.

D'autre part, pour l'implantation, il faut obtenir la loi de commande dans un repère fixe; nous allons donc, calculer dans le chapitre 6 la loi de commande pour la poursuite de couple avec minimisation de l'énergie, en utilisant le modèle ab .

Quelle que soit la représentation de la machine, il faut prendre en compte l'existence des variations importantes des résistances et des inductances au cours du fonctionnement, elles sont dues à la variation de la température et à la saturation magnétique, respectivement. Cela et l'indisponibilité de mesures du flux est l'un des principaux problèmes de la commande des machines asynchrones.

Chapitre 3

Fonctions de coût et formulation des problèmes

3.1 Introduction

Notre travail vise à améliorer le rendement de la machine en gardant de très hautes performances dynamiques. La maximisation du rendement de la machine s'obtient en minimisant l'énergie consommée (les pertes) dans un intervalle du temps donné. Pour traiter ce problème d'optimisation dans le cadre de la commande optimale, nous devons sélectionner une fonction mathématique à minimiser - la fonction de coût - qui représente 'le mieux' l'énergie totale du moteur; c'est cette fonction de coût que nous allons minimiser dans les chapitres de la commande optimale en respectant des exigences de poursuite de couple.

Pour l'optimisation, ce sont les concepteurs de la commande qui sélectionnent la fonction de coût; ce choix est vital pour le succès de l'optimisation car, entre autres aspects, une bonne fonction de coût doit:

- représenter la mesure de performance du type de problème de commande optimale à traiter: temps minimal, poursuite, régulation, minimisation de l'énergie, etc.
- dès que possible, avoir un sens physique.
- être suffisamment simple pour que le problème de la commande optimale soit traitable numériquement ou analytiquement.

Comme la fonction de coût doit être en correspondance directe avec le problème de commande, nous allons présenter dans ce chapitre, d'une part les fonctions de coût, d'autre part les problèmes de commande optimale auxquelles ces fonctions sont liées. Evidemment, les problèmes

que nous allons considérer sont liés à la minimisation de l'énergie du moteur; c'est pour cela que nous présentons d'abord, le calcul de l'énergie totale du moteur et ensuite, le problème général de minimisation de l'énergie totale du moteur en considérant le modèle complet.

Ce problème est difficile à résoudre analytiquement, car il s'agit de trouver deux commandes qui minimisent une fonction de coût non quadratique en l'état, avec cinq restrictions dynamiques. L'objectif principal de notre travail est de trouver au moins une solution sous-optimale analytique de ce problème. Pour cela, nous avons simplifié le problème, en séparant d'abord la partie mécanique et la partie électrique, et en simplifiant ce dernière avec le modèle réduit.

3.2 Energie totale

Dans cette section nous présentons le calcul des Puissances Actives et Réactives instantanées (voir [1] pour les définitions) ainsi que le calcul de l'énergie total du moteur; ceci permettra de choisir et de comparer les différentes fonctions de coût dans la section suivante.

Nous allons utiliser le modèle dq complet présenté dans la section 2.5; les résultats seront aussi valables pour les modèles ab et $\alpha\beta$ en raison de la propriété 2.2 d'invariance de l'énergie par rapport aux rotations.

3.2.1 Puissance active et Energie Totale

La puissance active instantanée est:

$$P_a := (U_s^{(d,q)})^T I_s^{(d,q)} \quad (3.1)$$

$$= \sigma L_s ((\dot{I}_s^{(d,q)})^T I_s^{(d,q)} + \gamma (I_s^{(d,q)})^T I_s^{(d,q)} - \eta a (\Phi_r^{(d,q)})^T I_s^{(d,q)} - \eta v \omega (\Phi_r^{(d,q)})^T J I_s^{(d,q)}) \quad (3.2)$$

Les courants rotoriques peuvent s'exprimer comme:

$$I_r^{(d,q)} = \frac{1}{L_r} (\Phi_r^{(d,q)} - L_{sr} I_s^{(d,q)}) \quad (3.3)$$

En utilisant (2.22), (2.23) et (3.3) nous pouvons exprimer (3.2) de la façon suivante:

$$P_a = \sigma L_s (\dot{I}_s^{(d,q)})^T I_s^{(d,q)} + \frac{1}{L_r} (\dot{\Phi}_r^{(d,q)})^T \Phi_r^{(d,q)} + R_s (I_s^{(d,q)})^T I_s^{(d,q)} + R_r (I_r^{(d,q)})^T I_r^{(d,q)} + \omega y \quad (3.4)$$

$$P_a = \frac{d}{dt} \mathcal{M} + P_j + P_m \quad (3.5)$$

Où:

$$\mathcal{M} := \frac{\sigma L_s}{2} (I_s^{(d,q)})^T I_s^{(d,q)} + \frac{1}{2L_r} (\Phi_r^{(d,q)})^T \Phi_r^{(d,q)} \quad (3.6)$$

est l'énergie magnétique emmagasinée dans les inductances de la machine,

$$P_j := R_s(I_s^{(d,q)})^T I_s^{(d,q)} + R_r(I_r^{(d,q)})^T I_r^{(d,q)} \quad (3.7)$$

est la puissance électrique dissipée dans les enroulements de la machine (les pertes Joule),

$$P_m := \omega y \quad (3.8)$$

$$= \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\omega^2) + f\omega^2 + \omega y_l \quad (3.9)$$

est la puissance mécanique fournie au rotor du moteur.

Nous avons remarqué que le modèle de Park ne prend pas en compte les pertes fer du noyau (dues aux courants de Foucault et à l'hystérésis), néanmoins, ces pertes peuvent s'exprimer comme une fonction de la fréquence d'excitation ω_a et du flux d'entrefer Φ_e [48]:

$$P_f = \frac{3}{2} (k_h |\omega_a| + k_f \omega_a^2) \Phi_e^T \Phi_e \quad (3.10)$$

Cet expression peut être ramenée en termes d'état de la machine, en rapprochant la norme du flux d'entrefer à la norme du flux rotorique:

$$\Phi_e^T \Phi_e = \frac{L_{sr}^2}{L_r^2} \Phi_r^T \Phi_r \quad (3.11)$$

Nous avons, donc:

$$P_f = \frac{3L_{sr}^2}{2L_r^2} (k_h |\omega_a| + k_f \omega_a^2) \Phi_r^T \Phi_r \quad (3.12)$$

La puissance totale du moteur P_t en prenant en compte les pertes fer est:

$$P_t = P_a + P_f \quad (3.13)$$

Remarque 3.1 En régime stationnaire $\frac{d}{dt}\mathcal{M} = 0$ donc, la puissance totale en régime stationnaire devient:

$$P_{re} = P_J + P_f + P_m \quad (3.14)$$

En intégrant la puissance totale (3.13) sur un intervalle du temps $[0, T]$ nous obtenons l'énergie totale E consommée par la machine dans cet intervalle:

$$\begin{aligned} E &:= \mathcal{M}(T) - \mathcal{M}(0) \\ &+ \int_0^T P_j dt \\ &+ \int_0^T P_f dt \\ &+ \frac{m}{2} (\omega(T)^2 - \omega(0)^2) + \int_0^T (f\omega^2 + \omega y_l) dt \end{aligned} \quad (3.15)$$

L'énergie totale est la somme:

- du changement d'énergie magnétique emmagasinée dans les enroulements de la machine
- du changement d'énergie cinétique des masses tournantes
- de l'énergie dissipée par les pertes Joule dans les enroulements
- de l'énergie dissipée par les pertes fer dans le noyau
- de l'énergie dissipée par le frottement du rotor
- de l'énergie fournie à la charge mécanique

3.2.2 Rendement

Le rendement est un indice qui quantifie la performance de la conversion d'énergie dans la machine; en régime stationnaire, il est défini par:

$$\eta_{re} = \frac{P_m}{P_t} = \frac{P_m}{P_J + P_f + P_m} \quad (3.16)$$

En régime dynamique, il est défini en termes des énergies dans un intervalle de temps donné T ,

$$\eta_{rd} = \frac{\int_0^T P_m dt}{E} = \frac{\int_0^T P_m dt}{\int_0^T P_j dt + \int_0^T P_f dt + \int_0^T P_m dt} \quad (3.17)$$

D'après (3.16) et (3.17) il est clair qu'en minimisant les pertes électriques (pertes Joule et fer) pour une trajectoire donnée (car si la trajectoire de vitesse est arbitraire, elle devient un degré supplémentaire pour la minimisation), nous maximisons le rendement du moteur.

3.2.3 Puissance Réactive

La puissance réactive instantanée est:

$$Q := (U_s^{(d,q)})^T J I_s^{(d,q)} \quad (3.18)$$

$$= \sigma L_s ((\dot{I}_s^{(d,q)})^T I_s^{(d,q)} + \gamma (I_s^{(d,q)})^T I_s^{(d,q)} - \eta a (\Phi_r^{(d,q)})^T I_s^{(d,q)} - \eta v \omega (\Phi_r^{(d,q)})^T J I_s^{(d,q)}) \quad (3.19)$$

o J est la matrice 2×2 antisymétrique. En considérant (2.22), (2.23), (2.32) et (3.6) nous pouvons exprimer la puissance réactive de la façon suivante:

$$Q = \sigma L_s (\dot{I}_s^{(d,q)})^T I_s^{(d,q)} + \frac{v\omega}{R_r} (\dot{\Phi}_r^{(d,q)})^T \Phi_r^{(d,q)} + 2\omega_a \mathcal{M} \quad (3.20)$$

Remarque 3.2 En régime stationnaire, la puissance réactive devient:

$$Q_{re} = 2\omega_a \mathcal{M} \quad (3.21)$$

L'expression (3.21) met en évidence le lien étroit qui existe entre la puissance réactive et l'énergie magnétique emmagasinée dans la machine.

3.2.4 Facteur de Puissance

Nous utiliserons la définition classique du facteur de puissance $F.P$, c'est-à-dire, la relation entre la puissance active totale et la puissance apparente, en régime stationnaire:

$$F.P := \frac{P_{re}}{\sqrt{P_{re}^2 + Q_{re}^2}} \quad (3.22)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Q_{re}}{P_{re}}\right)^2}} \quad (3.23)$$

Remarque 3.3 Si on considère seulement les pertes Joule du rotor (on néglige les pertes Joule statoriques et les pertes fer), le facteur de puissance, peut s'exprimer par:

$$F.P = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{M}{y}\right)^2}} \quad (3.24)$$

Cela implique que pour maximiser le facteur de puissance du moteur nous devons minimiser la relation: $\frac{M}{y}$; pour des trajectoires du couple y données, alors la minimisation de l'énergie magnétique du moteur, améliore le facteur de puissance de la machine.

D'après (3.16), (3.17) et (3.24) nous pouvons conclure pour cette section, qu'en minimisant l'énergie électromagnétique E_{em} :

$$E_{em} = \mathcal{M} + \int_0^T \{P_j + P_f\} dt \quad (3.25)$$

nous maximisons le rendement et améliorons le facteur de puissance du moteur.

3.3 Fonctions de Coût et Formulation des problèmes

3.3.1 Energie totale

D'après (3.15) nous pouvons considérer comme fonction de coût à minimiser, l'énergie totale du moteur: $J_t = E$ et en utilisant le modèle complet, considérer le problème suivant de minimisation de l'énergie du moteur:

Problème 3.1 Trouver la commande optimale $U_s^{(d,q)*} = [u_s^{d*}, u_s^{q*}]^T \forall t \in [0, T]$, qui minimise:

$$J_t = \mathcal{M}(T) + \int_0^T \left\{ r_t (U_s^{(d,q)})^T U_s^{(d,q)} + q_t (P_j + P_f + f\omega^2 + \omega y_t) \right\} dt \quad (3.26)$$

$$= \mathcal{M}(I_s^{(d,q)}(T), \Phi_r^{(d,q)}(T)) + \int_0^T L_t(y_t, I_s^{(d,q)}, \Phi_r^{(d,q)}, \omega, U_s^{(d,q)}) dt \quad (3.27)$$

En respectant les restrictions dynamiques du moteur:

$$\dot{I}_s^{(d,q)} = -(\gamma I + \omega_a J) I_s^{(d,q)} + \eta(aI - v\omega J) \Phi_r^{(d,q)} + \frac{U_s^{(d,q)}}{\sigma L_s} \quad (3.28)$$

$$\dot{\Phi}_r^{(d,q)} = -(aI + (\omega_a - v\omega)J) \Phi_r^{(d,q)} + bI_s^{(d,q)} \quad (3.29)$$

$$m\dot{\omega} = -f\omega + c(I_s^{(d,q)})^T J \Phi_r^{(d,q)} - y_l \quad (3.30)$$

avec,

a) $y_l(t) \in C^2$, connu $\forall t \in [0, T]$

b) T , l'état initial: $I_s^{(d,q)}(0), \Phi_r^{(d,q)}(0), \omega(0)$ et la vitesse finale: $\omega(T)$ donnés.

c) L'état électrique final: $I_s^{(d,q)}(T), \Phi_r^{(d,q)}(T)$ libre

r_t et q_t sont des facteurs de pondération de la fonction de coût. ◁

Il s'agit d'une fonction de coût qui minimise la somme pondérée de la commande $U_s^{(d,q)}$ et l'énergie totale du moteur; la pondération de la commande est nécessaire pour garantir des solutions bornées.

Dans ce problème, pour un certain intervalle de temps donné, nous voulons passer d'un point de fonctionnement spécifié de la machine vers un autre, en minimisant la fonction J_t pendant cet intervalle. Il faut noter que dans la fonction de coût, nous ne prenons en compte ni les termes de l'énergie cinétique initiale et finale ni l'énergie magnétique initiale, car ces termes sont définis par l'état initial de la machine et par la vitesse finale.

Ici, T et $\omega(T)$ peuvent être libres selon le problème particulier à considérer; pour $\omega(T)$ libre, il faudrait ajouter l'énergie cinétique finale: $\frac{m}{2}\omega(T)^2$ à la fonction de coût J_t . Si nous prenons: $\omega(0) = 0$ et $\omega(T) = \omega_d \neq 0$, nous avons le *problème de démarrage optimal de la machine*.

Ce problème avec 5 états et 2 commandes n'est pas facile à résoudre analytiquement; mais nous pouvons le simplifier en considérant que dans la plus part des applications, la vitesse du rotor est déjà définie par la référence d'une boucle externe de contrôle de vitesse ce qui définit l'énergie mécanique et qu'alors, il n'est pas nécessaire de la prendre en compte pour l'optimisation.

Si ce n'est pas le cas, nous pouvons de tout façon, décomposer le problème en considérant séparément la partie mécanique et la partie électrique comme nous le présentons par la suite.

3.3.2 Optimisation en Cascade

Dans un premier temps nous considérons le problème de la commande optimale pour la partie mécanique:

Problème 3.2 Trouver la commande optimale $y^* \forall t \in [0, T]$, qui minimise:

$$J_m = \int_0^T \{r_\omega y^2 + q_\omega (f\omega^2 + \omega y_i)\} dt \quad (3.31)$$

En respectant la restriction dynamique:

$$m\dot{\omega} = -f\omega + y - y_i \quad (3.32)$$

avec,

- a) $y_i(t) \in C^2$, connu $\forall t \in [0, T]$
- b) $T, \omega(0), \omega(T)$ donnés.

◁

Il s'agit d'une fonction de coût qui minimise la somme pondérée de la commande y et l'énergie mécanique du système. Ce problème et ces variantes ($T, \omega(T)$ libres) on les trouve souvent traités dans la littérature de la commande optimale pour des couples de charge spécifiques; par exemple, si on ne considère pas le couple de charge ou s'il est proportionnel à la vitesse, nous avons le problème de la commande optimale d'un système linéaire avec critère intégral quadratique pour lequel il existe des solutions analytiques [5], [40].

En utilisant soit des techniques analytiques, soit des techniques numériques, la solution de ce problème définit la trajectoire désirée de couple $y_d = y^*$ qui devient une contrainte pour le problème suivant de minimisation de la partie électrique:

Problème 3.3 Trouver la commande optimale $U_s^{(d,q)*} = [u_s^{d*}, u_s^{q*}]^T \forall t \in [0, T]$, qui minimise:

$$J_e = \mathcal{M}(T) + \int_0^T \left\{ r_e (U_s^{(d,q)})^T U_s^{(d,q)} + q_e (P_j + P_f) \right\} dt \quad (3.33)$$

$$= \mathcal{M}(I_s^{(d,q)}(T), x(T)) + \int_0^T L_e(\omega, y_d, I_s^{(d,q)}, x, U_s^{(d,q)}) dt \quad (3.34)$$

En respectant les restrictions dynamiques du moteur:

$$\dot{I}_s^{(d,q)} = -(\gamma I + (v\omega + \frac{by_d}{cx^2})J)I_s^{(d,q)} + \eta x \begin{bmatrix} a \\ -v\omega \end{bmatrix} + \frac{U_s^{(d,q)}}{\sigma L_s} \quad (3.35)$$

$$\dot{x} = -ax + bi_s^d \quad (3.36)$$

$$y = y_d = cx i_s^q \quad (3.37)$$

avec,

- a) $y_d(t) \in C^2$, $\omega(t) \in C^3$ connus $\forall t \in [0, T]$

- b) $T, x(0), I_s^{(d,q)}(0)$ donnés.
 c) $I_s^{(d,q)}(T), x(T)$ libres

◁

Ici, nous avons utilisé la représentation ‘polaire’ (2.31)-(2.33) pour la dynamique du flux, mais grâce à la propriété 2.1, nous avons pu exprimer la restriction du glissement (2.46) en termes de la restriction de couple (3.37); nous avons donc trois restrictions dynamiques pour l’état, et une restriction algébrique pour le couple y .

Remarque 3.4 *Nous ne pouvons pas garantir que l’optimum du problème 3.1 correspond à la somme des optimums des sous-problèmes 3.2 et 3.3. Pour une décomposition rigoureuse nous pouvons utiliser des techniques issues de l’analyse fonctionnelle, voir par exemple [11], ceci reste comme une perspective intéressante à développer ultérieurement.*

3.3.3 La fonction de coût pour le modèle réduit

Maintenant, nous simplifions davantage le problème, en considérant les courants statoriques comme des variables de commande; nous redéfinons donc la fonction de coût et utilisons le modèle réduit pour représenter la dynamique du moteur; ceci nous amène au problème simplifié suivant:

Problème 3.4 *Trouver la commande optimale $U^* = [u_1^*, u_2^*]^T \forall t \in [0, T]$, qui minimise:*

$$J_r = \int_0^T \{U^T R U + q x^2\} dt \quad (3.38)$$

$$= \int_0^T L(x, U) dt \quad (3.39)$$

$R = \text{diag}\{r_1, r_2\} > 0, q > 0$; En respectant les restrictions:

$$\dot{x} = -ax + bu_1 \quad (3.40)$$

$$y = y_d(t) = cxu_2 \quad (3.41)$$

avec,

- a) $y_d(t) \in C^2$, connu $\forall t \in [0, T]$
 b) $T, x(0), x(T)$, donnés.

◁

Nous pouvons substituer la contrainte algébrique (3.41), dans la fonction de coût et poser le problème équivalent:

Problème 3.5 *Trouver la commande optimale $u_1^* \forall t \in [0, T]$, qui minimise:*

$$J_r = \int_0^T \left\{ r_1 u_1^2 + r_2 \frac{y_d(t)^2}{c^2 x^2} + q x^2 \right\} dt \quad (3.42)$$

$$= \int_0^T L(y_d(t), x, u_1) dt \quad (3.43)$$

En respectant la restriction dynamique du flux:

$$\dot{x} = -ax + bu_1 \quad (3.44)$$

$$(3.45)$$

avec,

a) $y_d(t) \in C^2$, connu $\forall t \in [0, T]$

b) $T, x(0), x(T)$, donnés.

◁

Alors, nous avons un problème d'optimisation avec un état x , des conditions aux frontières imposées, une seule commande u_1 et une fonction de coût dépendant du temps et non quadratique en l'état; nous remarquons que dans cette formulation, l'état x est strictement positif.

Avant de continuer avec d'autres fonctions de coût et problèmes associés, une discussion sur la signification physique de la fonction (3.38) et le lien entre les problèmes à énergie totale 3.1 et simplifiée 3.4, s'impose.

Interprétation du critère J_r

Le critère (3.38) consiste en l'intégrale de la somme pondérée:

- de l'énergie magnétique instantanée du moteur (3.6),

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \left(\sigma L_s U^T U + \frac{1}{L_r} x^2 \right) \quad (3.46)$$

- des pertes Joule dans les enroulements de la machine,

$$P_J = \frac{1}{2} \left((R_s + R_r \frac{L_{sr}^2}{L_r^2}) U^T U - \frac{R_r}{L_r^2} x^2 - \frac{1}{L_r} \frac{d}{dt} \{x^2\} \right) \quad (3.47)$$

- du majorant des pertes fer du noyau,

$$Max\{P_f\} = \frac{3L_{sr}^2}{2L_r^2} Max \left\{ \left(k_h \left(|v\omega + \frac{by_d}{cx^2}| \right) + k_f \left(v\omega + \frac{by_d}{cx^2} \right)^2 \right) x^2 \right\} \quad (3.48)$$

C'est-à-dire:

$$J_r = \int_0^T \{ \alpha_1 \mathcal{M} + \alpha_2 P_J + \alpha_3 Max\{P_f\} \} dt; \alpha_i \geq 0 \quad (3.49)$$

Comme l'intégrale du dernière terme des pertes Joule dépend seulement des valeurs initiales et finales du flux:

$$\frac{1}{2L_r} \int_0^T \frac{d}{dt} \{x^2\} dt = \frac{1}{2L_r} (x(T)^2 - x(0)^2) \quad (3.50)$$

lesquelles sont données par le problème, alors il n'est pas nécessaire de les prendre en compte pour l'optimisation, nous prenons, donc:

$$\bar{P}_J = \frac{1}{2} \left((R_s + R_r \frac{L_{sr}^2}{L_r^2}) U^T U - \frac{R_r}{L_r^2} x^2 \right) \quad (3.51)$$

les pertes fer peuvent être majorées de la façon suivante:

$$Max\{P_f\} = \alpha_3 \frac{3L_{sr}^2}{2L_r^2} Max \left\{ k_h \left(|v\omega x^2 + \frac{by_d}{c}| \right) + k_f \left(v^2 \omega^2 x^2 + 2 \frac{vb}{c} \omega y_d + \frac{b^2 y_d^2}{c^2 x^2} \right) \right\} \quad (3.52)$$

$$= \alpha_3 \frac{3L_{sr}^2}{2L_r^2} Max \left\{ (k_h v |\omega| + k_f v^2 \omega^2) x^2 + k_f \frac{b^2 y_d^2}{c^2 x^2} \right\} \quad (3.53)$$

Dans (3.53) nous n'avons pas considéré les termes: $k_h \frac{b|y_d|}{c}$ et $k_f 2 \frac{vb}{c} \omega y_d$ car il sont définis à l'avance et n'affectent pas l'optimisation; comme $u_2 = \frac{y_d}{cx}$ nous avons:

$$Max\{P_f\} = \alpha_3 \frac{3L_{sr}^2}{2L_r^2} Max \left\{ (k_h v |\omega| + k_f v^2 \omega^2) x^2 + k_f b^2 u_2^2 \right\} \quad (3.54)$$

$$= q_f x^2 + r_f u_2^2 \quad (3.55)$$

Où: $q_f = \alpha_3 \frac{3L_{sr}^2}{2L_r^2} (k_h v \omega_{max} + k_f v^2 \omega_{max}^2)$, $r_f = \alpha_3 \frac{3L_{sr}^2}{2L_r^2} k_f b^2$.

Remarque 3.5 Pour majorer les pertes fer, nous supposons que la vitesse du rotor est bornée: $\omega < \omega_{max}$, ce qui devra être garanti pour la commande externe en vitesse.

En utilisant (3.46), (3.51) et (3.55), nous obtenons:

$$J_r = \int_0^T L(x, U) dt \quad (3.56)$$

$$L(x, U) = \left(\frac{\alpha_1 \sigma L_s}{2} + \frac{\alpha_2}{2} \left(R_s + R_r \frac{L_{sr}^2}{L_r^2} \right) \right) U^T U + r_f u_2^2 + \left(\frac{\alpha_1}{2L_r} - \frac{\alpha_2 R_r}{2L_r^2} + q_f \right) x^2 \quad (3.57)$$

$$L(x, U) = r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + q x^2 \quad (3.58)$$

avec:

$$r_1 = \alpha_1 \frac{\sigma L_s}{2} + \alpha_2 \frac{1}{2} \left(R_s + R_r \frac{L_{sr}^2}{L_r^2} \right) \quad (3.59)$$

$$r_2 = r_1 + r_f \quad (3.60)$$

$$q = \alpha_1 \frac{1}{2L_r} - \alpha_2 \frac{R_r}{2L_r^2} + q_f \quad (3.61)$$

Les facteurs de pondération α_i sont choisis de tel façon que: $q > 0$.

La fonction de coût L est convexe en U et x et correspond à une somme pondérée d'énergie et de pertes de la machine.

Comparaison des problèmes à énergie électrique totale et simplifiée

Maintenant nous analysons le lien entre le problème qui minimise l'énergie électrique réelle du moteur 3.3 et le problème simplifié 3.4. En comparant ces problèmes, nous remarquons deux différences importantes:

- 1) Le problème 3.3 minimise l'énergie magnétique via le coût finale $\mathcal{M}(T)$ en laissant l'état final $x(T)$ libre; par contre, 3.4 minimise l'intégrale de l'énergie magnétique pendant tout l'intervalle $[0, T]$ et impose l'état finale $x(T)$.

Cette différence n'est pas fondamentale, car l'énergie magnétique est une fonction convexe positive de l'état, alors en minimisant son intégrale, nous la minimisons elle-même. Bien sur, il faut faire attention au choix des facteurs de pondération et à l'état final $x(T)$, pour obtenir les mêmes solutions optimales; nous ajusterons ces paramètres de façon à obtenir les solutions stationnaires (courants statoriques et flux rotorique) du problème 3.4 égales aux solutions optimales stationnaires du problème 3.3, évaluées au point nominal de fonctionnement de la machine (voir section 4.2).

- 2) Le problème 3.3 minimise les pertes fer en prenant en compte sa dépendance de la vitesse, pendant que le problème 3.4 minimise une limite supérieure de ces pertes, indépendant de la vitesse.

Cette différence est beaucoup plus importante, car elle rend indépendantes les solutions du problème de la vitesse. Malgré cela, nous minimisons une limite supérieure des pertes fer: $P_f \leq \text{Max}\{P_f\}$, nous pouvons donc conclure:

$$\min_U J_t \leq \min_U J_r \quad (3.62)$$

Le problème 3.4 donne donc une solution sous-optimale au problème 3.3.

Remarque 3.6 Pour le problème 3.4 nous pouvons prendre $\alpha_3 = 0$ et minimiser l'énergie électrique totale du modèle de Park (les pertes Joule et l'énergie magnétique); ce problème donne donc des solutions optimaux au problème de minimisation de l'énergie totale du modèle de Park.

Remarque 3.7 Les termes des pertes fer qu'intéressent à l'optimisation sont:

$$\bar{P}_f = \alpha_3 \frac{3L_{sr}^2}{2L_r^2} \left((k_h v |\omega| + k_f v^2 \omega^2) x^2 + k_f \frac{b^2 y_d^2}{c^2 x^2} \right) \quad (3.63)$$

donc, la prise en compte de ces termes nous donne une fonction du coût J_r avec le facteur de pondération q fonction de la vitesse: $q(\omega) = k_1 + k_2 |\omega| + k_3 \omega^2$.

3.3.4 Problème d'optimisation du flux

Les problèmes 3.4 et 3.5 visent à trouver la commande optimale U^* . Notons que pour le modèle réduit, cette commande est seulement fonction du couple et de l'état optimal x^* :

$$u_1^* = \frac{1}{b}(\dot{x}^*) + ax^* \quad (3.64)$$

$$u_2^* = \frac{y_d(t)}{cx^*} \quad (3.65)$$

D'autre part, la fonction de coût (3.38) peut être majorée par:

$$J_r \leq J = \int_0^T \{ru^T u + qx^2\} dt \quad (3.66)$$

Avec: $r = r_2 > r_1$.

En intégrant les contraintes, nous pouvons donc reformuler le problème 3.5 en fonction du flux:

Problème 3.6 Trouver la trajectoire du flux optimale $x^* \forall t \in (0, T)$, qui minimise:

$$J = \int_0^T \left\{ \frac{r}{b^2} (\dot{x} + ax)^2 + \frac{ry_d^2}{c^2 x^2} + qx^2 \right\} dt \quad (3.67)$$

$$= \int_0^T L(y_d(t), x, \dot{x}) dt \quad (3.68)$$

avec,

- a) $y_d(t) \in C^2$, connu $\forall t \in [0, T]$
- b) $T, x(0), x(T)$, donnés.

◁

C'est ce problème que nous essayerons de résoudre via le calcul variationnel, au chapitre suivant.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les fonctions de coût et ses problèmes associés, pour la commande optimale de la machine asynchrone.

Nous avons présenté les mesures de performance énergétique les plus importantes:

- Le rendement
- Le facteur de puissance

Nous avons montré, qu'en minimisant l'énergie magnétique et les pertes de la machine, nous maximisons le rendement et améliorons le facteur de puissance du moteur. De plus, il est possible de minimiser cette énergie, en minimisant une fonction de coût convexe en l'état et la commande du modèle réduit du moteur. En effet, ce critère minimise l'intégrale de la somme pondérée de l'énergie magnétique instantanée du moteur, les pertes Joule dans les enroulements de la machine et un majorant des pertes fer du noyau. Il donne donc des solutions sous-optimales par rapport au problème initial de minimisation de l'énergie magnétique et les pertes du moteur.

La simplification du problème de minimisation de l'énergie en utilisant le modèle réduit nous amène à résoudre un problème d'optimisation avec un état x , des conditions aux frontières imposées, une seule commande u_1 et une fonction de coût dépendant du temps et non quadratique en l'état. C'est ce problème que nous essayerons de résoudre dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Commande Optimale via le calcul variationnel

4.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le problème de minimisation de l'énergie totale du moteur peut se ramener en:

Problème 4.1 *Trouver la trajectoire du flux optimale $x^* > 0 \forall t \in (0, T)$, qui minimise la fonction de coût:*

$$J = \int_0^T \left\{ \frac{r}{b^2} (\dot{x} + ax)^2 + \frac{ry_d^2}{c^2 x^2} + qx^2 \right\} dt \quad (4.1)$$

$$= \int_0^T L(y_d(t), x, \dot{x}) dt \quad (4.2)$$

étant données la trajectoire de référence du couple $y_d(t)$ (deux fois différentiable), les conditions aux frontières $x(0), x(T)$ et l'intervalle du temps T (fixe). ◁

Une fois calculée la trajectoire du flux optimale $x^*(t)$, la commande optimale $U^*(t)$ est calculée en utilisant les équations:

$$u_1^* = \frac{1}{b}(\dot{x}^*) + ax^* \quad (4.3)$$

$$u_2^* = \frac{y_d(t)}{cx^*} \quad (4.4)$$

Nous devons choisir judicieusement les conditions aux frontières $x(0), x(T)$; pour cela, nous considérons des trajectoires de couple avec: $\dot{y}_d(t) = 0$ en $t = 0$ et $t = T$, c'est-à-dire celles qui vont

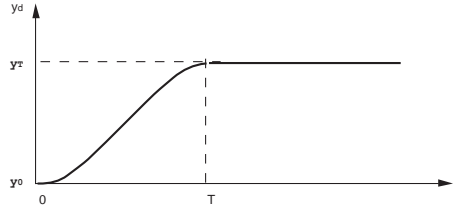


Figure 4.1: Trajectoire du couple désirée entre deux régimes stationnaires.

d'un régime stationnaire vers un autre (voir Figure 4.1), et supposons que nous connaissons les flux optimaux x_0^* , x_T^* des régimes stationnaires pour $t \leq 0$ et $t \geq T$; alors nous pouvons choisir les conditions aux frontières $x(0), x(T)$ égales aux solutions optimales des régimes stationnaires: $x(0) = x_0^*$ et $x(T) = x_T^*$. Nous devons donc d'abord résoudre le cas statique pour obtenir les conditions aux frontières $x(0), x(T)$. Ce cas sera traité dans la section suivante. Après un bref rappel sur le calcul variationnel (section 4.3), nous obtiendrons les conditions nécessaires et suffisantes pour le calcul de la trajectoire optimale $x^*(t)$ (section 4.4). Ces conditions nous amènent à résoudre un problème d'intégration d'une équation différentielle non-linéaire de deuxième ordre -l'équation d'Euler- avec une seule condition dans chaque frontière ($x(0)$ et $x(T)$, c'est-à-dire, avec des valeurs limites en deux points (**the two-point boundary-value problem** en anglais). Nous consacrerons une section à l'étude des propriétés de l'équation d'Euler (section 4.5) et nous présenterons quelques solutions analytiques de ce problème dans la section 4.6; cela ne sera que pour des cas très spécifiques; pour le calcul des solutions plus générales, nous pouvons utiliser des méthodes numériques hors-ligne, si la trajectoire désirée du couple $y_d(t)$ est connue à l'avance dans tout l'intervalle $[0, T]$. Si cela n'est pas le cas, nous pouvons utiliser des solutions approchées du problème; quelques unes seront présentées dans la section 4.7.

L'approche variationnel s'appuie sur des conditions de différentiabilité de la commande; mais dans les problèmes de commande optimale, la commande admissible peut être continue par morceaux et avoir un domaine admissible borné. Pour ce genre de problèmes, le principe du minimum de Pontriaguine nous donne des conditions nécessaires pour le calcul de la commande optimale; ce principe avec l'approche Hamiltonien, seront brièvement rappelés dans la section 4.8. L'approche Hamiltonien sera utilisée pour le calcul des solutions numériques dans la section 4.9 et pour obtenir les conditions nécessaires qui donnent la commande optimale d'un problème de minimisation qui utilise une fonction du coût avec erreur quadratique de poursuite de couple (section 4.10); ce problème est une extension du problème 4.1 car il ne considère pas la contrainte forte: $y = y_d(t)$. Finalement, dans la section 4.11 nous utiliserons le principe du minimum pour établir les conditions nécessaires qui permettent le calcul de la commande optimale U^* , en respectant des limites maximales pour les courants statoriques, i_s^d et i_s^q .

4.2 Minimisation de l'énergie en régime stationnaire

4.2.1 Formulation du problème

En régime stationnaire ($\dot{y}_d(t) = 0$, $\dot{x}(t) = 0$) la fonction du coût (4.2) dépend seulement de x ; alors le problème de minimisation se simplifie à:

Problème 4.2 *Etant donné le couple désiré y_d constant, trouver le flux optimal stationnaire x^* , qui minimise:*

$$L(x) = \left(\frac{ra^2}{b^2} + q\right)x^2 + \frac{ry_d^2}{c^2x^2} \quad (4.5)$$

◁

4.2.2 Solution optimale stationnaire

Pour résoudre ce problème, nous faisons appel aux outils du calcul différentiel; le flux optimal x^* s'obtient en résolvant:

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x} = 2\left(\frac{ra^2}{b^2} + q\right)x^* - 2\frac{ry_d^2}{c^2(x^*)^3} = 0$$

alors,

$$x^* = \pm \left(\frac{b^2}{c^2\left(a^2 + \frac{q}{r}b^2\right)}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{|y_d|}$$

la seule solution admissible est:

$$x^* = \beta \sqrt{|y_d|}, \quad \beta = \left(\frac{b^2}{c^2\left(a^2 + \frac{q}{r}b^2\right)}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.6)$$

Il faut noter que $L(x^*)$ est un minimum car $\frac{\partial^2 L(x^*)}{\partial x^2} > 0$, $\forall x > 0$.

4.2.3 Sélection des facteurs de pondération q et r

Nous observons que le flux optimal stationnaire x^* est fonction du couple désiré (donné), des paramètres du moteur a, b, c et du ratio $\frac{q}{r}$; q et r étant les facteurs de pondération de la fonction du coût $L = rU^T U + qx^2$.

En général la machine asynchrone est conçue pour être optimale au point nominal de fonctionnement; alors, nous pouvons choisir le ratio $\frac{q}{r}$ de façon à faire coïncider le flux nominal x_n au couple nominal y_n :

$$y = y_n \Rightarrow x = x_n$$

on a par conséquent:

$$\beta = \frac{x_n}{\sqrt{y_n}} \quad (4.7)$$

$$\frac{q}{r} = \frac{y_n^2}{c^2 x_n^4} - \frac{a^2}{b^2} \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{L_{sr}^2} (L_r^2 y_n^2 - 1). \quad (4.9)$$

Nous notons qu'étant donné le ratio $\frac{q}{r}$, le facteur r peut être vu comme 'un facteur d'échelle' de la fonction du coût: $L = r(U^T U + \frac{q}{r} x^2)$. Son choix donc, n'affecte pas l'optimisation (au sens du problème 4.1), car il donne seulement l'ordre de grandeur de L .

Nous finissons cette section en comparant les coûts énergétiques du fonctionnement à flux optimal stationnaire et à flux nominal constant. Le coût optimal L^* en régime stationnaire varie linéairement en fonction du couple:

$$L^* = \left(\frac{ra^2}{b^2} + q\right)(x^*)^2 + \frac{ry_d^2}{c^2(x^*)^2} \quad (4.10)$$

$$L^* = \left(\left(\frac{ra^2}{b^2} + q\right)\beta^2 + \frac{r}{c^2\beta^2}\right)|y_d|. \quad (4.11)$$

Pour l'opération classique à flux nominal constant indépendant du couple, la fonction du coût $L(x_n)$ est:

$$L(x_n) = \left(\frac{ra^2}{b^2} + q\right)x_n^2 + \frac{r}{c^2 x_n^2} y_d^2 \quad (4.12)$$

La Figure 4.2 montre les coûts L^* et $L(x_n)$ normalisés en fonction du couple désiré y_d normalisé. Au point nominal de fonctionnement on obtient le même coût pour les deux régimes d'opération (flux optimal et flux constant) mais en dehors de ce point, le coût de l'opération à flux optimal x^* est toujours inférieur à celui de l'opération à flux nominal. En ajustant donc le niveau du flux en régime stationnaire selon (4.6) nous avons une réduction importante de l'énergie consommée par le moteur.

Remarque 4.1 La commande optimale U^* en régime stationnaire est:

$$U^* = \begin{cases} u_1^* = \frac{a}{b} x^* = \frac{a}{b} \beta \sqrt{|y_d|} \\ u_2^* = \frac{y_d}{cx^*} = \frac{1}{c\beta} \sqrt{|y_d|} \end{cases} \quad (4.13)$$

nous avons donc,

$$u_1^* = \left(\frac{ac}{b}\beta^2\right)u_2^* \quad (4.14)$$

C'est-à-dire, que l'opération à flux optimal x^* , impose i_s^d proportionnel à i_s^q en régime stationnaire.

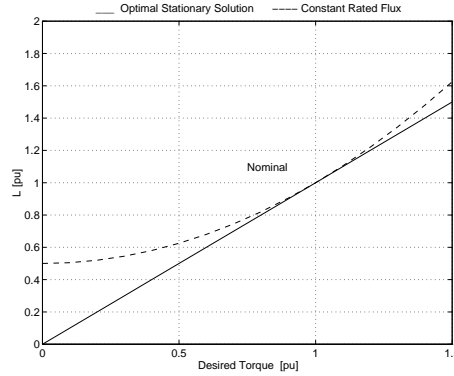


Figure 4.2: Fonctions du coût L [p.u.] en régime stationnaire pour l'opération à flux optimal x^* et à flux nominale contant x_n vs. le couple désiré [p.u].

4.3 Bref rappel du calcul variationnel

Dans ce section nous présentons un bref rappel de la théorie du calcul variationnel; nous présentons seulement les aspects directement associés à la solution du problème 4.1; le lecteur sera renvoyé aux textes classiques de la commande optimale pour les démonstrations des théorèmes.

Dans le problème 4.1 l'objectif est trouver une fonction x^* qui minimise le critère J ; ce critère est une *fonctionnelle*:

Définition 4.1 Une fonctionnelle J est une application qui associe à chaque fonction $x \in \Omega$ un seul nombre réel, $J : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$. \diamond

Le domaine Ω de la fonctionnelle est une classe des fonctions. Autrement dit, une fonctionnelle est 'une fonction d'une fonction'.

Nous allons prendre par la suite la fonctionnelle:

$$J = \int_0^T L(t, x, \dot{x}) dt \quad (4.15)$$

avec le domaine:

$$\Omega = \{x \in \mathcal{R}^+ - \{0\}\} \quad (4.16)$$

ce qui correspond à la structure de la fonction du coût donnée en (4.2).

Les définitions suivantes nous permettrons de définir le minimum d'une fonctionnelle.

Définition 4.2 δx est une variation faible de x s'il existe deux petits nombres ε_1 et ε_2 tels que: $\|x - \delta x\| < \varepsilon_1$ et $\|\dot{x} - \delta\dot{x}\| < \varepsilon_2, \forall t \in [0, T]$. \diamond

Définition 4.3 Considérons une fonction x et sa variation faible δx . Si x et $x + \delta x$ sont des fonctions pour lesquelles J est définie, alors l'incrément de J est:

$$\Delta J(x, \delta x) := J(x + \delta x) - J(x) \quad (4.17)$$

 \diamond

Définition 4.4 Une fonctionnelle J avec un domaine Ω a un extremum relatif en x^* s'il existe un petit nombre $\varepsilon > 0$ tel que: ΔJ a le même signe $\forall x \in \Omega$ qui satisfait: $\|x - x^*\| < \varepsilon$. x^* est dit un extremal; $J(x^*)$ est dit un extremum. \diamond

Définition 4.5 Si $\Delta J = J(x) - J(x^*) \geq 0$ alors $J(x^*)$ est dit un minimum (faible) relatif. \diamond

Définition 4.6 Si $\Delta J \geq 0$ est satisfaite pour un ε arbitrairement large, alors $J(x^*)$ est dit un minimum (faible) global. \diamond

En changeant le sens des inégalités se définissent de la même manière les Maximums.

Nous pouvons obtenir des conditions pour calculer x^* en développant $\Delta J(x, \delta x)$ en séries de Taylor autour de x ; pour cela, nous supposons:

Hypothèse 4.1 $L(t, x, \dot{x})$ est deux fois différentiable par rapport à chacun de ses arguments. \triangle

Alors:

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J(x, \delta x) + \delta^2 J(x, \delta x) + g_1(x, \delta x) \|\delta x\|^2 + \dots \quad (4.18)$$

Définition 4.7 $\delta J(x, \delta x)$ est dite la première variation de J ; $\delta^2 J(x, \delta x)$ est dite la deuxième variation de J . \diamond

En considérant la fonctionnelle (4.15) et $x(0), x(T)$ spécifiés (ce qui implique: $\delta x(0) = \delta x(T) = 0$), le calcul de la première variation de J donne [40]:

$$\delta J(x, \delta x) = \int_0^T \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}) \right] \right\} \delta x dt \quad (4.19)$$

Nous supposons que les fonctions qui appartiennent à Ω ne sont restreintes par aucune contrainte; nous pouvons donc utiliser le **Théorème fondamental du calcul variationnel**:

Théorème 4.1 Si x^* est un extremal alors $\delta J(x^*, \delta x) = 0$. \square

Alors,

$$\delta J(x^*, \delta x) = \int_0^T \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}(t, x^*, \dot{x}^*) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) \right] \right\} \delta x dt = 0 \quad (4.20)$$

Finalement nous utilisons le Lemme suivant:

Lemme 4.1 *Si une fonction $f(t)$ est continue et $\int_0^T f(t)\delta x(t)dt = 0 \forall \delta x(t)$ continue sur $[0, T]$ alors $f(t) = 0 \forall t \in [0, T]$. \square*

En appliquant ce Lemme à (4.20), nous obtenons la condition **nécessaire** pour un extremal:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x^*, \dot{x}^*) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*) \right] = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.21)$$

Cette équation est connue comme **l'équation d'Euler**.

Remarque 4.2 *Généralement l'équation d'Euler est de deuxième ordre, non-linéaire, variant dans le temps et difficile à résoudre analytiquement. De plus, elle est difficile à intégrer numériquement car on dispose des conditions aux frontières $x(0), x(T)$ au lieu de $x(t), \dot{x}(t)$ en $t = 0$ ou $t = T$.*

Remarque 4.3 *L'équation d'Euler est seulement une condition nécessaire; il faut vérifier d'autres conditions pour garantir que la courbe candidate soit un extremal et pour savoir si elle donne un extremum minimal.*

Remarque 4.4 *La solution de ce problème est l'évolution temporelle de l'état $x^*(t) \forall t \in [0, T]$; cette courbe devra être imposée au système via les commandes optimales (4.3) et (4.4); cette approche donne des évolutions temporelles (indépendantes de l'état x) des commandes optimales; il s'agit donc d'une commande **en boucle ouverte**.*

Maintenant, nous présentons les conditions suffisantes pour le calcul d'un extremal pour un extremum minimal. Ces conditions sont très liées avec la deuxième variation de J [29]:

$$\delta^2 J(x, h) = \int_0^T (Ph^2 + Qh^2)dt \quad (4.22)$$

o,

$$h = \delta x, \quad P(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, t)}{\partial^2 \dot{x}}, \quad Q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, t)}{\partial^2 x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, t)}{\partial x \partial \dot{x}} \right) \quad (4.23)$$

En [29] il a été prouvé le:

Théorème 4.2 *Une condition nécessaire pour que $J(x)$ ait un minimum en $x = x^*$ est que:*

$$\delta^2 J(x^*, h) \geq 0 \quad (4.24)$$

pour tout h admissible. \square

C'est le terme $P\dot{h}^2$ dans (4.22) qui est à prendre en compte pour vérifier l'inégalité (4.24); en effet, la **condition de Legendre** établie:

Théorème 4.3 *Une condition nécessaire pour que la fonctionnelle $J(x)$ ait un minimum en $x = x^*$ est que: $P(x) \geq 0; \forall t \in [0, T]$.* \square

Les Théorèmes 4.2 et 4.3 donnent seulement des conditions nécessaires; on aurait pensé par analogie au calcul différentiel que (4.24) serait une condition suffisante pour un extremum minimal; ce n'est pas le cas, comme nous le montrons par la suite. En utilisant le fait que:

$$0 = \int_0^T \frac{d}{dt}(wh^2)dt = \int_0^T 2wh\dot{h} + \dot{w}h^2 dt$$

avec $w(t)$ une fonction différentiable arbitraire, la deuxième variation (4.22) peut s'écrire:

$$\delta^2 J(x, h) = \int_0^T \left(P\dot{h}^2 + 2wh\dot{h} + (Q + \dot{w})h^2 \right) dt \quad (4.25)$$

si (4.24) est une condition suffisante, alors il devrait exister une fonction $w(t)$ telle que l'intégrant de (4.25) soit un carré parfait; mais nous notons que:

$$P\dot{h}^2 + 2wh\dot{h} + (Q + \dot{w})h^2 = P\left(\dot{h} + \frac{wh}{P}\right)^2$$

s'il existe une solution de l'équation de Riccati:

$$\dot{w} = \frac{w^2}{P} - Q, \quad (4.26)$$

pour tout $t \in [0, T]$ ce qui n'est pas toujours le cas.

L'existence d'une solution de (4.26) $\forall t \in [0, T]$, peut être garantie s'il n'existe pas de **points conjugués** en $[0, T]$ au point $t = 0$.

Définition 4.8 *Le point \tilde{a} ($\neq a$) est conjugué au point a , si l'équation:*

$$-\frac{d}{dt}(P\dot{v}) + Qv = 0 \quad (4.27)$$

a une solution non triviale (c'est-à-dire, différente de la solution triviale $v \equiv 0$), qui vaut zéro en $t = a$ et $t = \tilde{a}$. \diamond

L'équation (4.27) est une équation différentielle linéaire de deuxième ordre, qui est obtenue à partir de l'équation de Riccati (4.26) via la transformation:

$$w = \frac{\dot{v}}{v}P \quad (4.28)$$

Clairement, si $v(t) \neq 0, \forall t \in [0, T]$, il existe une solution $w(t)$ de (4.26), bien définie en $[0, T]$ qui est donnée par (4.28).

Le Théorème suivant nous permet de tester l'absence de points conjugués en $[0, T]$ au point $t = 0$:

Théorème 4.4 *La fonctionnelle quadratique:*

$$\int_0^T (P\dot{h}^2 + Qh^2)dt \quad (4.29)$$

o $P(t) > 0 \forall t \in [0, T]$, est définie positive pour tout $h(t)$ tel que $h(0) = h(T) = 0$ si et seulement si l'intervalle $[0, T]$ n'a pas de points conjugués au point $t = 0$. \square

Finalement le Théorème suivant [29] présente les **conditions nécessaires et suffisantes** pour l'existence d'un minimum faible :

Théorème 4.5 *Si la trajectoire $x^*(t)$ satisfait les trois conditions suivantes:*

1. x^* est un extremal, c'est-à-dire, elle satisfait l'équation d'Euler:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right\} = 0,$$

2. condition (forte) de Legendre: le long de $x^*(t)$,

$$P(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, t)}{\partial^2 \dot{x}} > 0, \quad (4.30)$$

3. l'intervalle $[0, T]$ ne contient pas de points conjugués au point $[0]$

alors, la fonctionnelle (4.15) a un minimum faible pour $x(t) = x^*(t)$. \square

4.4 Conditions pour le calcul d'un extremum minimal

Dans cette section nous utilisons les Théorèmes de la section précédente pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes qui permettent de calculer la trajectoire optimale du flux $x^*(t)$ au sens du problème 4.1.

Théorème 4.6 *Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle:*

$$J(x, t) = \int_0^T \left\{ \frac{r}{b^2} (\dot{x} + ax)^2 + \frac{ry_d^2(t)}{c^2 x^2} + qx^2 \right\} dt$$

avec $r > 0, q > 0$ et $y_d(t) \in \mathcal{C}^2$, ait un minimum faible en $x(t) = x^*(t) \in \Omega$, est que la trajectoire optimale de la norme du flux $x^*(t)$ soit solution de l'équation:

$$\ddot{x}^*(x^*)^3 - \delta_1(x^*)^4 = -\delta_0 y_d^2(t) \quad (4.31)$$

o $\delta_1 = a^2 + \frac{q}{r}b^2 > 0$, et $\delta_0 = \frac{b^2}{c^2} > 0$, avec les conditions aux frontières: $x^*(0) = x(0)$, $x^*(T) = x(T)$. \square

Démonstration : D'abord il faut noter que $L(x, \dot{x}, t) = \frac{r}{b^2}(\dot{x} + ax)^2 + \frac{ry_d^2(t)}{c^2x^2} + qx^2$ est deux fois différentiable par rapport à tous ses arguments, pour tout $x \in \Omega$ et pour $y_d(t) \in \mathcal{C}^2$.

En substituant l'expression de $L(x, \dot{x}, t)$ dans l'équation d'Euler (4.21) on obtient l'équation (4.31). Il nous reste à montrer que les deux dernières conditions du Théorème 4.5 sont satisfaites avec les conditions stipulées par le Théorème 4.6, en particulier que $r > 0$ et $q > 0$.

Le calcul de P donne:

$$P = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, t)}{\partial^2 \dot{x}} = \frac{r}{b^2}, \quad (4.32)$$

alors $P > 0$ du fait que $r > 0$.

Pour vérifier la dernière condition du Théorème 4.5, nous utilisons le Théorème 4.4; le calcul de Q donne:

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, t)}{\partial^2 x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L(x, \dot{x}, t)}{\partial x \partial \dot{x}} \right) \quad (4.33)$$

$$= \frac{r}{b^2} a^2 + \frac{3ry_d^2(t)}{c^2x^4} + q \quad (4.34)$$

laquelle est définie positive si $q > 0$. Ceci implique que la fonctionnelle (4.29) est définie positive pour tout $h(t)$ non-trivial tel que $h(0) = h(T) = 0$. Alors l'intervalle $[0, T]$ n'a pas des points conjugués au point $t = 0$ et les trois conditions du Théorème 4.5 sont satisfaites simultanément. \blacksquare

Selon ce Théorème, en prenant $r > 0$ et $q > 0$ dans la fonction de coût (4.1), les solutions de l'équation (4.31) avec les conditions aux frontières $x(0)$, $x(T)$ sont les trajectoires optimales $x^*(t)$ au sens du problème 4.1.

4.5 Propriétés de l'équation d'Euler

Nous avons déjà remarqué que l'intégration de l'équation d'Euler avec des valeurs limites en deux points, est un problème très difficile à résoudre analytiquement. Nous dédions cette section à étudier quelques propriétés importantes de l'équation d'Euler (4.31); en particulier nous sommes intéressés en savoir s'il existent des solutions bornées dans notre domaine de validité de x ($x > 0$) et si ces solutions sont uniques.

4.5.1 Unicité des solutions bornées

Lemme 4.2 [18] *L'équation d'Euler (4.31) a une et seulement une solution $x(t)$ telle que:*

$$0 < x(t) < \infty \quad \forall t \in [-\infty, \infty] \quad (4.35)$$

Démonstration : Soit $\delta_2 = \delta_0 y_d^2$, avec y_d constante. Il est facile de montrer que la solution optimale stationnaire x^* est une solution de l'équation d'Euler (4.31); en effet, comme la première et deuxième dérivées de x^* sont zéro, alors (4.31) devient: $x^* = \pm \beta \sqrt{|y_d|} = \pm (\delta_2 / \delta_1)^{1/4}$; donc $x^* = \beta \sqrt{|y_d|}$ est la seule solution positive constante de (4.31) $\forall t \in [-\infty, \infty]$.

Considérons:

$$\ddot{x}x^3 - \delta_1 x^4 = -\delta_2 \quad (4.36)$$

$$\ddot{x}^*(x^*)^3 - \delta_1 (x^*)^4 = -\delta_2 \quad (4.37)$$

La différence entre (4.36) et (4.37) donne:

$$(\ddot{x} - \ddot{x}^*) - \delta_1(x - x^*) = -\delta_2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x^*)^3} \right) \quad (4.38)$$

$$\int_s^t (\ddot{x} - \ddot{x}^*)(x - x^*) = \int_s^t \left[\delta_1(x - x^*)^2 + \delta_2(x - x^*)^2 \frac{((x^*)^2 + xx^* + x^2)}{(x^*)^3 x^3} \right]; \quad (4.39)$$

en intégrant par partie le première terme du (4.39):

$$(\dot{x} - \dot{x}^*)(x - x^*)|_s^t - \int_s^t (\dot{x} - \dot{x}^*)^2 = \int_s^t \left[\delta_1(x - x^*)^2 + \delta_2(x - x^*)^2 \frac{((x^*)^2 + xx^* + x^2)}{(x^*)^3 x^3} \right] \quad (4.40)$$

étant donné que $x > 0$, alors nous avons:

$$(\dot{x} - \dot{x}^*)(x - x^*)|_s^t = \int_s^t (\dot{x} - \dot{x}^*)^2 + \int_s^t \left[\delta_1(x - x^*)^2 + \delta_2(x - x^*)^2 \frac{((x^*)^2 + xx^* + x^2)}{(x^*)^3 x^3} \right] \geq 0 \quad (4.41)$$

donc le terme $(\dot{x} - \dot{x}^*)(x - x^*)|_s^t$ est positive et,

$$\frac{d}{dt} \{(x - x^*)^2\} (t) \geq \frac{d}{dt} \{(x - x^*)^2\} (s); \quad (4.42)$$

alors $(x - x^*)$ est une fonction convexe. Comme x doit être borné $\forall t \in [-\infty, +\infty]$, la différence $(x - x^*)$ doit être constante et alors x est constante. Mais la seule solution positive et constante est x^* . On a par conséquent, $x = x^*$.

Si $\delta_2(t)$ est fonction du temps, ($y_d(t)$ est un signal borné variant dans le temps) alors ce même raisonnement montre qu'il y a, au plus, une solution bornée de l'équation d'Euler. ■

4.5.2 Unicité de la solution stationnaire

Pour y_d constante, le Lemme 4.2 nous dit que si $x(0) = x^*$, $\dot{x}(0) = 0$ alors la seule solution dans l'intervalle $[-\infty, \infty]$ est la solution constante optimale x^* . Nous regardons maintenant si cela reste valide pour l'intervalle $[0, T]$ et s'il existe d'autres solutions optimales $x^*(t)$ qui démarrent avec $x(0) = x^*$, $\dot{x}^*(0) \neq 0$ et terminent en $x(T) = x^*$; la Figure 4.3 montre d'autres candidates avec $x(0) = x(T) = x^*$ pas nécessairement constantes $\forall t \in [0, T]$.

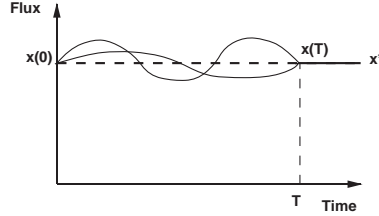


Figure 4.3: Unicité de la solution stationnaire.

Lemme 4.3 [18] Soit y_d constante $\forall t \in [0, T]$. Alors la seule solution de l'équation d'Euler (4.31) avec les conditions aux frontières: $x^*(0) = x^*(T) = \beta\sqrt{|y_d|}$ est la solution optimale stationnaire:

$$x^* = \beta\sqrt{|y_d|} \quad \forall t \in [0, T]$$

Démonstration : Dans le Lemme 4.2 nous avons montré que la solution stationnaire est la seule solution constante de l'équation d'Euler. Pour montrer qu'il n'existe pas d'autres solutions variables dans le temps avec $x(0) = x(T) = x^*$ nous allons intégrer explicitement l'équation (4.31) avec $\delta_2 = \delta_0 y_d^2$.

Soit $p = \dot{x}$ alors,

$$\ddot{x} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dt} = p \frac{dp}{dx}$$

ce qui substitué dans (4.31), donne:

$$p dp = \left(\delta_1 x - \frac{\delta_2}{x^3} \right) dx$$

l'intégrale de cette expression est:

$$p^2 + c_1 = \delta_1 x^2 + \frac{\delta_2}{x^2}$$

avec $c_1 = \delta_1 x^2(0) + \frac{\delta_2}{x^2(0)} - \dot{x}^2(0)$. Cette expression dans les coordonnées x et multiplié par x donne:

$$x \dot{x} = \pm \sqrt{\delta_1 x^4 - c_1 x^2 + \delta_2}$$

soit $z = x^2$, alors:

$$\dot{z} = \pm 2 \sqrt{\delta_1 z^2 - c_1 z + \delta_2} \quad (4.43)$$

ou bien:

$$\frac{dz}{\sqrt{\delta_1 z^2 - c_1 z + \delta_2}} = \pm 2 dt$$

en intégrant, nous avons:

$$\ln \left(2\sqrt{\delta_1} \sqrt{\delta_1 z^2 - c_1 z + \delta_2} + 2\delta_1 z - c_1 \right) = \pm \sqrt{\delta_1} (2t + c_2), \quad (4.44)$$

o $c_2 = \frac{1}{\sqrt{\delta_1}} \ln \left(2|\dot{x}(0)|(\delta_2 \delta_1)^{1/4} + \dot{x}(0)^2 \right)$.

Il est clair que cette solution existe seulement si $|\dot{x}(0)| \neq 0$. Si elle est optimale, elle doit satisfaire les conditions aux frontières: $x(0) = x(T)$, pour $|\dot{x}(0)| \neq 0$. Alors l'équation (4.44) doit satisfaire:

$$\ln \left(2\sqrt{\delta_1} \sqrt{\delta_1 z^2(0) - c_1 z(0) + \delta_2} + 2\delta_1 z(0) - c_1 \right) = \pm \sqrt{\delta_1} c_2 \quad (4.45)$$

$$\ln \left(2\sqrt{\delta_1} \sqrt{\delta_1 z^2(T) - c_1 z(T) + \delta_2} + 2\delta_1 z(T) - c_1 \right) = \pm \sqrt{\delta_1} (2T + c_2), \quad (4.46)$$

Mais $z(0) = z(T)$ et la fonction $\ln(\cdot)$ est définie d'une façon unique par rapport à ses arguments, alors $\sqrt{\delta_1} c_2$ doit être égal à $\sqrt{\delta_1} (2T + c_2)$ pour un certain $c_2(\dot{x}(0))$, ce qui est impossible pour $T \neq 0$. Ceci contredit l'existence d'autre solution optimale variante dans le temps. ■

4.6 Solutions analytiques de l'équation d'Euler

Dans la section précédente, nous avons montré que pour $x(0) = x(T) = x^*$, la solution analytique de l'équation d'Euler est la solution stationnaire x^* . Dans la suite nous présentons quelques solutions analytiques de l'équation d'Euler pour certains cas spécifiques. Nous considérons d'abord le cas de y_d constante dans l'intervalle $[0, \infty]$ avec $x(T) = x^*$ et $x(0)$ arbitraire et non nécessairement égal à x^* .

4.6.1 Solution pour y_d constante et $x(0) \neq x^*$

Si nous considérons y_d constante, avec $x(0)$ arbitraire (différent ou égal à x^*), et $x(T) = x^*$ pour l'intervalle $[0, T]$, d'après (4.44) il n'est pas évident de choisir $\dot{x}(0)$ de manière à obtenir $x(T) = x^*$, dans un horizon borné T . Par contre il est plus facile de calculer la trajectoire intégrale de l'équation d'Euler, qui démarre en $x(0) \neq x^*$ et qui va asymptotiquement, voir exponentiellement (horizon T infini) vers la valeur optimale stationnaire x^* ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

Il est clair que dans ce cas, la solution de l'équation d'Euler sera variante dans le temps. Le Lemme suivant présente cette trajectoire et le calcul explicite de $\dot{x}(0)$.

Lemme 4.4 *Soit $y_d \neq 0$ et constante $\forall t \in [0, \infty]$ et*

$$\dot{x}(0) = \frac{\sqrt{\delta_2}}{x(0)} - \sqrt{\delta_1} x(0);$$

alors l'équation d'Euler (4.31) avec les conditions aux frontières: $x(0) > 0$ et $x(\infty) = \beta\sqrt{|y_d|} = x^*$, a une seule solution bornée définie par:

$$x(t) = \sqrt{e^{-2w_o t} x(0)^2 + (x^*)^2 (1 - e^{-2w_o t})} \quad (4.47)$$

o:

$$w_o = \sqrt{\delta_1}$$

Démonstration : Avec $\dot{x}(0) = \frac{\sqrt{\delta_2}}{x(0)} - \sqrt{\delta_1}x(0)$, la constante d'intégration c_1 est égal à:

$$c_1 = 2\sqrt{\delta_1 \delta_2}$$

ce qui simplifie l'équation (4.43) à:

$$\dot{z} = \pm 2\sqrt{\delta_1 z^2 - 2\sqrt{\delta_1 \delta_2} z + \delta_2} \quad (4.48)$$

$$= \pm 2\sqrt{(\sqrt{\delta_1} z - \sqrt{\delta_2})^2} \quad (4.49)$$

$$= \pm 2|(\sqrt{\delta_1} z - \sqrt{\delta_2})| \quad (4.50)$$

Nous considérons deux cas:

1. $\sqrt{\delta_1} z(0) - \sqrt{\delta_2} \geq 0$ ($x(0) \geq x^* = (\frac{\delta_2}{\delta_1})^{\frac{1}{4}}$).

La seule solution bornée et réelle de (4.50) correspond à:

$$\dot{z}_1 = -2(\sqrt{\delta_1} z_1 - \sqrt{\delta_2}) \quad (4.51)$$

car sa solution:

$$z_1(t) = e^{-2w_o t} z(0) + (x^*)^2 (1 - e^{-2w_o t}) \quad (4.52)$$

est toujours $z_1(t) \geq \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}}$, $\forall t \in [0, \infty]$.

2. $\sqrt{\delta_1} z(0) - \sqrt{\delta_2} < 0$ ($x(0) < x^*$).

La seule solution bornée et réelle de (4.50) correspond à:

$$\dot{z}_2 = +2(-\sqrt{\delta_1} z_2 + \sqrt{\delta_2})$$

car sa solution:

$$z_2(t) = e^{-2w_o t} z(0) + (x^*)^2 (1 - e^{-2w_o t}) \quad (4.53)$$

est toujours $z_2(t) < \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}}$, $\forall t \in [0, \infty]$.

En conséquence, la solution de (4.50) est:

$$z(t) = e^{-2w_0 t} z(0) + (x^*)^2 (1 - e^{-2w_0 t}), \quad \forall z(0) > 0 \text{ et } \forall t \in [0, \infty] \quad (4.54)$$

En revenant au coordonné x , nous concluons que la seule solution de l'équation d'Euler dans l'intervalle $[0, \infty]$ avec les conditions $x(0)$, $x(\infty) = x^*$ et $\dot{x}(0) = \frac{\sqrt{\delta_2}}{x(0)} - \sqrt{\delta_1} x(0)$, est l'équation (4.47). ■

Remarque 4.5 *Si nous prenons $x(0) = x^*$, la trajectoire (4.47) devient la solution optimale stationnaire x^* , $\forall t \in [0, \infty]$.*

Remarque 4.6 *Ce Lemme montre, qu'il est possible d'intégrer l'équation d'Euler en choisissant adéquatement la condition initiale $\dot{x}(0)$. Dans le chapitre 5 nous allons obtenir une équation différentielle qui spécifie automatiquement la condition $\dot{x}(0)$ pour n'importe quelle $x(0)$; cela nous permettra de calculer les trajectoires optimales aux horizons T borné et infini pour y_d constante, $x(0)$ arbitraire et $x(T) = x^*$.*

Remarque 4.7 *La trajectoire (4.47) est définie sur un horizon T infini et va asymptotiquement vers la valeur optimale stationnaire: x^* . Nous avons donc, $x^*(t) > 0 \forall t \in [0, \infty]$ et la valeur du coût strictement positive: $L(y_d, x, u_1) > 0 \forall t \in [0, \infty]$; alors l'intégration d'une quantité positive sur un intervalle infini, est infinie; ceci dit que la valeur minimale 'optimale' du coût J^* est infinie. Il serai donc, peu approprié nommer cette trajectoire 'optimale'. En général nous aurons cette contradiction pour toutes les solutions asymptotiques à l'horizon T infini en utilisant la fonction du coût (4.1); cette contradiction existe aussi pour d'autres classes de problèmes de commande optimale; par exemple, pour la poursuite optimale à horizon infini des systèmes linéaires avec critère quadratique, voir [4] section 4.3.*

Nous enlèverons cette contradiction dans le chapitre suivant via une normalisation de la fonction du coût par rapport à l'intervalle d'optimisation T .

4.6.2 Solution Optimale Hyperbolique

Nous supposons que la trajectoire désirée du couple $y_d(t)$ n'est pas spécifiée en avance. Nous voulons trouver des trajectoires $y_d(t)$, $x^*(t)$ suffisamment différentiables, que soient solution de l'équation d'Euler, dans un horizon T infini $[0, \infty]$. En particulier nous voulons des trajectoires du couple qui vont doucement de la valeur initiale $y_d(0)$ donnée à une valeur finale $y_d(\infty)$ donnée, avec:

$$\dot{y}_d(0) = \dot{y}_d(\infty) = \ddot{y}_d(0) = \ddot{y}_d(\infty) = 0 \quad (4.55)$$

comme la trajectoire présentée dans la Figure 4.1. Nous choisissons les conditions aux frontières avec le même critère donné dans l'introduction: $x^*(0) = \beta \sqrt{|y_d(0)|}$, $x^*(\infty) = \beta \sqrt{|y_d(\infty)|}$. De l'équation (4.31) nous avons:

$$y_d(t) = \sqrt{\frac{1}{\delta_0} (\delta_1 (x^*)^4 - \dot{x}^*(x^*)^3)} \quad (4.56)$$

Nous imposons à la trajectoire $x^*(t)$ les conditions:

1. pour être admissible selon (4.56) doit satisfaire:

$$\delta_1 x^* - \ddot{x}^* > 0, \forall t \in [0, \infty] \quad (4.57)$$

2. pour garantir (4.55) nous pouvons choisir:

$$\frac{d^n x^*}{dt^n}(0) = \frac{d^n x^*}{dt^n}(\infty) = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4. \quad (4.58)$$

Nous avons considéré la trajectoire hyperbolique du flux:

$$x^*(t) = x(0) + (x(\infty) - x(0)) \tanh^5 w_h t \quad (4.59)$$

avec $x(0) = \beta \sqrt{y_d(0)}$, $x(\infty) = \beta \sqrt{y_d(\infty)}$, $y_d(0) \neq y_d(\infty)$, qui satisfait la condition (4.58). Pour assurer la restriction (4.57) nous avons pris la limite supérieure:

$$\ddot{x}_{max} < \delta_1 x_{min} \quad (4.60)$$

o \ddot{x}_{max} est calculé analytiquement à partir de (4.59) et x_{min} est:

$$x_{min} = \begin{cases} x(0) & \text{si } x(0) < x(\infty) \\ x(\infty) & \text{si } x(0) > x(\infty) \end{cases}$$

Le calcul de (4.60) donne:

$$w_h < \sqrt{\frac{x(0)\delta_1}{1.8545(x(\infty) - x(0))}} \quad \text{si } x(0) < x(\infty)$$

$$w_h < \sqrt{\frac{x(\infty)\delta_1}{1.8545(x(0) - x(\infty))}} \quad \text{si } x(0) > x(\infty)$$

La trajectoire (4.59) substitué dans (4.56) donne la trajectoire du couple:

$$y_d(t) = \frac{(x^*(t))^{3/2}}{\sqrt{\delta_0}} \left\{ \delta_1 x(0) + (x(\infty) - x(0)) \left[-20w_h^2 \tanh^3 w_h t \right. \right. \\ \left. \left. + (\delta_1 + 30w_h^2) \tanh^5 w_h t - 10w_h^2 \tanh^7 w_h t \right] \right\}^{1/2} \quad (4.61)$$

La Figure 4.4 montre les deux trajectoires normalisées pour les données de la machine du LAG (7.5 kw); pour ces trajectoires: $x(0) = 0.1x_n$, $x(\infty) = x_n$, $y_d(0) = 0.01y_n$, $y_d(\infty) = y_n$. Notons que la trajectoire de couple passe de $y_d(0)$ à y_n en 2 secondes approximativement; cela est lent pour une application à haute performance dynamique. Dans le contexte de notre travail, nous avons utilisé cette solution exacte, comme un moyen pour comparer différentes solutions: numérique, approchée et sous-optimale (voir section 4.9).

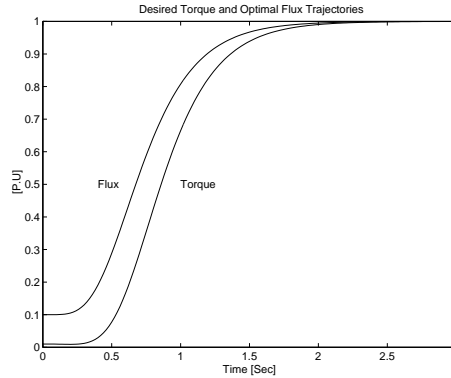


Figure 4.4: Trajectoires hyperboliques de couple $y_d(t)$ et du flux optimale $x^*(t)$

4.7 Solutions approchées de l'équation d'Euler

Dans plusieurs applications, la trajectoire du couple désiré n'est pas connue à l'avance; par exemple, pour le véhicule électrique le couple désiré est imposé extérieurement et imprévisiblement par le conducteur. Si la machine travaille en régulation de vitesse avec des perturbations aléatoires du couple, nous aurons des références de couple elles aussi de nature aléatoire.

Même si nous connaissons le couple désiré dans l'intervalle $[0, T]$, obtenir une solution analytique c'est-à-dire, résoudre l'équation d'Euler pour des couples désirés variant dans le temps et avec des valeurs limites en deux points, semble être un problème insurmontable.

Si en plus, la trajectoire de couple désirée est aléatoire et méconnue à l'avance, agir d'une façon optimale (au sens du problème 4.1), est impossible. Si nous ne connaissons pas les événements futurs (le couple $y_d(t)$ en $[0, T]$), nous ne pouvons pas concevoir à l'avance une politique optimale (trouver le $x^*(t)$ qui minimise J). L'essence de la commande optimale est d'utiliser l'information du futur pour agir d'une façon optimale (minimiser un certain critère). C'est pour cela que les méthodes numériques ne sont pas envisageables dans ce cas, elles ont besoin de l'information du couple dans tout l'intervalle $[0, T]$ pour trouver le flux optimale dans cet intervalle.

Dans ce contexte, il ne nous reste alors qu'à essayer d'obtenir des solutions **analytiques approchées** de l'équation d'Euler. Cela est d'ailleurs le but principal de notre travail. Le Théorème suivant présente une première solution approchée de ce genre et donne aussi une mesure de son approximation.

Théorème 4.7 [18] *Considérons:*

- une trajectoire du couple désirée $0 < y_d(t) < \infty \forall t \in [0, T]$ et au moins deux fois différentiable,

- des conditions aux frontières $x^*(0) = \beta\sqrt{y_d(0)}$ et $x^*(T) = \beta\sqrt{y(T)}$ et
- la trajectoire optimale $x^*(t)$ dans l'intervalle $[0, T]$;

alors, la solution suivante:

$$\hat{x}^*(t) = \beta\sqrt{y_d(t)} \quad (4.62)$$

se rapproche de $x^*(t)$ au sens:

$$\lim_{\|(\dot{y}_d, \ddot{y}_d)\| \rightarrow 0} |\hat{x}^*(t) - x^*(t)| = 0 \quad (4.63)$$

uniformément en $t \in [0, T]$. □

Démonstration : Notons que $\hat{x}^*(t)$ est la solution de l'équation 'perturbée' d'Euler:

$$\ddot{\hat{x}}^*(\hat{x}^*)^3 - \delta_1(\hat{x}^*)^4 + \delta_0 y_d^2(t) = \Delta(y_d(t), \dot{y}_d(t), \ddot{y}_d(t)) \quad (4.64)$$

$$\Delta(y_d(t), \dot{y}_d, \ddot{y}_d) := \frac{\beta^4}{2} \left(\ddot{y}_d y_d - \frac{\dot{y}_d^2}{2} \right) \quad (4.65)$$

comme $y_d(t)$, $\dot{y}_d(t)$ et $\ddot{y}_d(t)$ sont bornées, nous pouvons trouver une constante Δ_0 suffisamment grande, telle que $|\Delta| \leq \Delta_0 \forall t \in [0, T]$; notons aussi que Δ_0 va uniformément à zéro lorsque $\|(\dot{y}_d, \ddot{y}_d)\| \rightarrow 0$.

En considérant le vecteur $\hat{z} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2)^T = (\hat{x}^*, \dot{\hat{x}}^*)^T$, l'équation (4.64) a la représentation d'état:

$$\dot{\hat{z}} = f(\hat{z}, t) + b\Delta(t) \quad (4.66)$$

o $f(\hat{z}, t) = (\hat{z}_2, (\delta_1 \hat{z}_1 - \delta_0 y_d^2(t)/\hat{z}_1^3))^T$, $b = (0, 1)^T$.

De la même manière, la représentation d'état de l'équation d'Euler est:

$$\dot{z} = f(z, t).$$

La différence entre z et \hat{z} est donnée par:

$$z(t) - \hat{z}(t) = z(0) - \hat{z}(0) + \int_0^t [f(z, \tau) - f(\hat{z}, \tau)] d\tau - b \int_0^t \Delta(\tau) d\tau \quad (4.67)$$

Du fait que Δ peut être bornée par Δ_0 , nous avons:

$$b \int_0^t |\Delta(\tau)| d\tau \leq bT\Delta_0, \forall t \in [0, T]$$

Notons que $z(0) - \hat{z}(0) = 0$, alors la norme $\|z(t) - \hat{z}(t)\|$ peut être bornée par:

$$\|z(t) - \hat{z}(t)\| \leq \int_0^t \|f(z, \tau) - f(\hat{z}, \tau)\| d\tau + T\Delta_0 \quad (4.68)$$

Soit $D \subset M$, avec $M = \{z \in R^2 | z_1 > 0\}$. Comme $f(z, t)$ est continue en $[0, T] \times D$, alors il existe $\frac{\partial f}{\partial z}(z, t)$, continue en $[0, T] \times D$. Par construction, \hat{x}^* et x^* évoluent en D ; alors en utilisant le Théorème de la valeur moyenne [36], il existe un point $p \in D$ dans le segment de ligne qui connecte \hat{x}^* à x^* , tel que $f(z, t) - f(\hat{z}, t) = \frac{\partial f}{\partial z}(p, t)(z - \hat{z})$; alors:

$$\|f(z, t) - f(\hat{z}, t)\| \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial z}(p, t) \right\| \|z - \hat{z}\| \leq L(y_d(t), p) \|z - \hat{z}\| \quad (4.69)$$

Du fait que $y_d(t)$ et p sont bornées, nous pouvons trouver une constante de Lipschitz L_0 (qui ne dépend pas de $\dot{y}_d(t)$ et $\ddot{y}_d(t)$), qui limite $L(y_d(t), p)$. Alors, de (4.68), nous avons:

$$\|z(t) - \hat{z}(t)\| \leq L_0 \int_0^t \|z(\tau) - \hat{z}(\tau)\| d\tau + T\Delta_0 \quad (4.70)$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall-Bellman [36], on a:

$$\|z(t) - \hat{z}(t)\| \leq T\Delta_0 e^{L_0 t} \leq T\Delta_0 e^{L_0 T}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.71)$$

En considérant que L_0 ne dépend pas de $\dot{y}_d(t)$ et $\ddot{y}_d(t)$ et que Δ_0 va uniformément à zéro quand $\|(\dot{y}_d, \ddot{y}_d)\| \rightarrow 0$, alors nous concluons:

$$\lim_{\|(\dot{y}_d, \ddot{y}_d)\| \rightarrow 0} |\hat{x}^*(t) - x^*(t)| = \lim_{\|(\dot{y}_d, \ddot{y}_d)\| \rightarrow 0} T\Delta_0 e^{L_0 T} = 0. \quad (4.72)$$

■

Remarque 4.8 *L'aspect d'uniformité est important dans le dernier Théorème; il nous permet d'étendre l'intervalle $[0, T]$ à tout l'axe réel, comme il est montré dans le Corollaire suivant.*

Corollaire 4.1 *L'approximation $\hat{x}^*(t) = \beta\sqrt{y_d(t)}$ de l'équation d'Euler, se rapproche de la solution optimale $x^*(t)$, au sens donné par (4.63) uniformément en $t \in [0, \infty]$. □*

Démonstration : Nous considérons les intervalles de temps $[iT, (i+1)T]$; $i = 1, 2, 3, \dots, \infty$, avec $y_d(t)$, $x^*(t)$, $\hat{x}^*(t)$ et les conditions aux frontières, $x(iT)$, $x((i+1)T)$ pour chaque intervalle; comme Δ_0 ne dépend pas de T , nous pouvons répéter l'argument du Théorème 4.7 dans chaque intervalle i et étendre sa validité à l'intervalle $[0, \infty]$.

■

La solution approchée (4.62) permet donc de passer d'un régime stationnaire optimal vers un autre dans un intervalle donné T , avec une trajectoire de la norme du flux, très près de l'optimale si le couple désiré n'a pas de composantes de haute fréquence dans cet intervalle. Néanmoins, dans les applications à haute performance dynamique, le couple désiré peut avoir des dérivées importantes; alors dans ces cas, la solution (4.62) est loin de la solution optimale et peut être plus coûteuse en termes énergétiques que l'opération à norme du flux constant. Cela vient du fait que la solution approchée (4.62) **ne prend pas en compte la restriction dynamique du flux (3.44)**. Si on veut imposer une élevée vitesse de variation en x , le terme

$(\dot{x})^2$ en (4.1) devient grand, ce qui entraîne la perte d'optimalité.

Dans le chapitre suivant nous présenterons le calcul d'une autre solution approchée, qui diminue cet inconvénient; elle est:

$$\dot{x}^o x^o = \sqrt{\delta_0} |y_d(t)| - \sqrt{\delta_1} (x^o)^2, \quad x^o(0) = x(0).$$

Le Lemme suivant présente une mesure d'approximation similaire au (4.63) pour cette solution approchée.

Lemme 4.5 *Considérons:*

- une trajectoire du couple désirée $0 < y_d(t) < \infty \forall t \in [0, \infty]$, au moins deux fois différentiable et qui va asymptotiquement vers une constante y_∞ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_d(t) = y_\infty$$

- des conditions aux frontières $x^*(0) = \beta \sqrt{y_d(0)}$ et $x^*(\infty) = \beta \sqrt{y_\infty}$ et
- la trajectoire optimale $x^*(t)$ dans l'intervalle $[0, \infty]$;

alors, la solution suivante:

$$\dot{x}^o x^o = \sqrt{\delta_0} y_d(t) - \sqrt{\delta_1} (x^o)^2, \quad x^o(0) = x(0) \quad (4.73)$$

se rapproche de $x^*(t)$ au sens:

$$\lim_{|y_d| \rightarrow 0} |x^o(t) - x^*(t)| = 0 \quad (4.74)$$

uniformément en $t \in [0, \infty]$. □

Démonstration : Dans ce cas, l'équation 'perturbée' d'Euler est:

$$\ddot{x}^o (x^o)^3 - \delta_1 (x^o)^4 + \delta_0 y_d^2(t) = \Delta(\dot{y}_d(t)) \quad (4.75)$$

$$\Delta(\dot{y}_d) := \sqrt{\delta_0} \dot{y}_d \quad (4.76)$$

donc, la constante Δ_0 qui borne $|\Delta(\dot{y}_d)|$ tends uniformément à zéro lorsque $|\dot{y}_d| \rightarrow 0$.

Le même raisonnement du Théorème 4.7, étendu à l'horizon T infini par le corollaire 4.1, nous permet de conclure:

$$\lim_{|y_d| \rightarrow 0} |x^o(t) - x^*(t)| = 0. \quad (4.77)$$

■

Les critères d'approximation (4.63) et (4.74) ne donnent pas une mesure précise de sous-optimalité. D'après (4.63) et (4.74) nous pouvons seulement dire que la solution approchée (4.73) est moins sensible (en termes de perte d'optimalité) aux composantes de haute fréquence de $y_d(t)$ que la solution (4.62). Dans le chapitre suivant nous donnerons une mesure plus exacte de sous-optimalité de la solution (4.73).

Nous appellerons par la suite 'OPEC' (OPTimal Energy Control) à la solution approchée (4.73) (voir section 5.3.3); nous appellerons la solution (4.62) tout simplement 'Approchée'.

4.8 Minimisation d'une fonctionnelle sous contraintes

Dans les sections précédentes, nous avons considéré de problèmes de commande optimale sans restrictions dans la commande U , mais dans une application réel, nous devons protéger l'actionneur et la machine en imposant des limites maximaux des tensions et courants. Dans les sections suivantes nous allons considérer des problèmes de commande optimale o la fonctionnelle $J(t, x, U)$ ne peut pas être exprimée en termes de T, x et \dot{x} ou bien, avec des problèmes o il existe des contraintes dans la commande U ; dans cette section nous rappelons les principaux outils pour ce genre de problèmes.

4.8.1 Contraintes dynamiques

Nous considérons le problème de commande optimale:

Problème 4.3 *Trouver la commande optimale $U^* \in \mathcal{R}^m$ qui minimise:*

$$J(U) = \int_0^T L(t, X, U) dt \quad (4.78)$$

en respectant la contrainte dynamique:

$$\dot{X} = G(t, X, U), X \in \mathcal{R}^n \quad (4.79)$$

avec $T, X(0)$ et $X(T)$ données. ◁

En utilisant le vecteur $W = [X^T, U^T]^T \in \mathcal{R}^{(n+m)}$, la fonction (4.78) peut s'écrire:

$$J(t, W) = \int_0^T L(t, W, \dot{W}) dt \quad (4.80)$$

et la contrainte (4.79) comme:

$$G(t, X, U) - \dot{X} = F(t, W, \dot{W}) = 0 \quad (4.81)$$

Nous voulons donc minimiser la fonctionnelle (4.80) en respectant la contrainte (4.81). Pour cela nous pouvons utiliser les multiplicateurs de Lagrange, comme le montre le Théorème suivant [71]:

Théorème 4.8 *étant donnée une fonctionnelle de la forme:*

$$J(t, W) = \int_0^T L(t, W, \dot{W}) dt, \quad W \in \mathcal{R}^{(n+m)}$$

soumise aux contraintes:

$$F(t, W, \dot{W}) = 0, \quad F(\cdot) \in \mathcal{R}^n$$

alors, si $W^(t)$ minimise $J(t, W)$ et satisfait:*

$$F(t, W^*, \dot{W}^*) = 0 \quad (4.82)$$

il existe un vecteur de multiplicateurs de Lagrange $\Lambda \in \mathcal{R}^n$ tel que, $W^(t)$ minimise la fonctionnelle augmentée:*

$$J_a(t, W) = \int_0^T \left\{ L(t, W, \dot{W}) + \Lambda^T F(t, W, \dot{W}) \right\} dt \quad (4.83)$$

$$= \int_0^T L_a(t, W, \dot{W}, \Lambda) dt \quad (4.84)$$

c'est-à-dire, que $W^(t)$ satisfait l'équation d'Euler:*

$$\frac{\partial L_a}{\partial W}(t, W^*, \dot{W}^*, \Lambda^*) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_a}{\partial \dot{W}}(t, W^*, \dot{W}^*, \Lambda^*) \right], \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.85)$$

□

En utilisant (4.81), $L_a(\cdot)$ est:

$$L_a(t, W, \dot{W}, \Lambda) = L(t, X, U) + \Lambda^T \left(G(t, X, U) - \dot{X} \right) \quad (4.86)$$

alors l'équation d'Euler (4.85) devient:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\partial L_a}{\partial X} \\ \frac{\partial L_a}{\partial U} \end{array} \right] (X^*, U^*, \Lambda^*) - \left[\begin{array}{c} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L_a}{\partial \dot{X}} \right\} \\ 0 \end{array} \right] (X^*, U^*, \Lambda^*) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.87)$$

ce qui correspond à:

$$\dot{\Lambda}^* = - \left[\frac{\partial G}{\partial X}(t, X^*, U^*) \right]^T \Lambda^* - \frac{\partial L}{\partial X}(t, X^*, U^*) \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial L}{\partial U}(t, X^*, U^*) = - \left[\frac{\partial G}{\partial U}(t, X^*, U^*) \right]^T \Lambda^* \quad (4.89)$$

L'équation (4.88) est nommée **équation du coétat ou adjointe** et correspond à n équations différentielles scalaires. L'équation (4.89) correspond à m relations algébriques. Ces équation avec les n équations d'état (4.82):

$$\dot{X}^* = G(t, X^*, U^*) \quad (4.90)$$

sont les conditions nécessaires pour résoudre le problème 4.3.

Les équations (4.88), (4.89) et (4.90) peuvent s'écrire d'une manière plus compacte en définissant, par analogie avec la fonction hamiltonienne de la mécanique analytique, la fonction **Hamiltonien** ou fonction d'état de Pontriaguine:

$$\mathcal{H}(t, X, U, \Lambda) := L(t, X, U) + \Lambda^T G(t, X, U) \quad (4.91)$$

ce qui donne l'équation d'état:

$$\dot{X}^* = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Lambda}(t, X^*, U^*, \Lambda^*), \quad (4.92)$$

l'équation de coétat:

$$\dot{\Lambda}^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}(t, X^*, U^*, \Lambda^*), \quad (4.93)$$

et la condition de stationnarité:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U}(t, X^*, U^*, \Lambda^*) \quad (4.94)$$

Remarque 4.9 *Supposons que nous pouvons exprimer la commande U en termes de t, X et \dot{X} ; alors nous aurons une fonctionnelle de la forme:*

$$J(X) = \int_0^T L(t, X, \dot{X}) dt$$

Considérons la transformation de Legendre $\mathcal{L} : L(t, X, \dot{X}) \rightarrow \mathcal{H}(t, X, \Lambda)$, définie par:

$$\Lambda = -\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \quad (4.95)$$

$$\mathcal{H}(t, X, \Lambda) = L + \Lambda^T \dot{X} \quad (4.96)$$

Si $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{X}^2} \neq 0$, de (4.95) nous pouvons exprimer \dot{X} en termes des **variables canoniques**: t, X et Λ ; alors, en utilisant la transformation de Legendre, la fonctionnelle $J(X)$ est équivalente [29] à la fonctionnelle:

$$J(X, \Lambda) = \int_0^T \left\{ \mathcal{H}(t, X, \Lambda) - \Lambda^T \dot{X} \right\} dt$$

o X et Λ sont regardées comme deux vecteurs indépendants. Les équations d'Euler de cette dernière fonctionnelle sont:

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Lambda} + \dot{X}^* = 0 \quad (4.97)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} - \dot{\Lambda}^* = 0 \quad (4.98)$$

elles sont appelées **équations canoniques d'Euler** et correspondent donc à la représentation d'état de l'équation d'Euler (4.21) en utilisant les variables canoniques t, X et Λ .

Remarque 4.10 Si $L(\cdot) = L(X, \dot{X})$ ne dépend pas explicitement du temps t alors $\mathcal{H}(\cdot) = \mathcal{H}(X, \Lambda)$ ne dépend pas elle aussi de t ; pourtant:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(X, \Lambda) = \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} \right]^T \dot{X} + \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Lambda} \right]^T \dot{\Lambda}$$

En utilisant les équations canoniques d'Euler, nous avons:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(X^*, \Lambda^*) = \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} \right]^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Lambda} - \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Lambda} \right]^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} = 0$$

en conséquence, si $L(\cdot)$ ne dépend pas explicitement du temps, l'Hamiltonien $\mathcal{H}(X^*, \Lambda^*)$ est la première intégral¹ de l'équation d'Euler.

4.8.2 Contraintes dans l'espace de commande

La condition (4.94) peut être interprétée comme une condition pour la minimisation de $\mathcal{H}(t, X, U, \Lambda)$ par rapport à U . L'opération de différenciation partielle est possible pour n'importe quel t, X et Λ , seulement si la commande U est continue et avec un domaine admissible non borné. Maintenant nous supposons que la commande admissible U peut être continue par morceaux et qu'elle a un domaine admissible borné: $U \in \mathcal{U}$. Malgré les contraintes en U , il a été montré que la commande optimale U^* doit encore minimiser l'Hamiltonien. Cela constitue le **principe du minimum de Pontriaguine**²:

$$\mathcal{H}(t, X^*, U^*, \Lambda^*) = \min_{U \in \mathcal{U}} \{ \mathcal{H}(t, X^*, U, \Lambda^*) \}, \forall t \in [0, T] \quad (4.99)$$

Les équations (4.92), (4.93) et (4.99) sont donc les conditions nécessaires pour que la commande $U^* \in \mathcal{U}$ minimise la mesure de performance J .

¹la première intégral d'une équation différentielle, est une fonction qui est constante le long de chaque courbe intégral de l'équation différentielle

²voir [65] pour le Théorème qui présente ce principe et sa démonstration

Remarque 4.11 *Ce principe est seulement une condition nécessaire d'optimalité: la commande optimale, si elle existe, doit minimiser l'Hamiltonien; par contre, il peut exister plusieurs commandes qui minimisent l'Hamiltonien; si c'est le cas, il faudra choisir la commande qui minimise effectivement la fonction de coût.*

Dans le cadre de notre travail, nous n'avons pas traité en détail les conditions de suffisance du principe du minimum. Mais nous savons que pour certaines classes de problèmes de commande optimale, il existe des conditions de suffisance qui ont été établies en utilisant l'analyse fonctionnelle. En particulier, le principe du minimum est une condition nécessaire et suffisante si [65]:

1. $L(\cdot)$ est une fonction convexe de l'état X ,
2. la restriction dynamique est linéaire,
3. la commande optimale n'est pas singulière, c'est-à-dire que U^* est définie en $[0, T]$ sauf dans un nombre fini de points.

Cela correspond au cas traité dans la section 4.11.

Remarque 4.12 U^* est la commande qui donne un **minimum global** pour $\mathcal{H}(t, X^*, U^*, \Lambda^*)$; si la commande admissible n'est pas bornée, les conditions:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U}(t, X^*, U^*, \Lambda^*) = 0 \quad (4.100)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial^2 U}(t, X^*, U^*, \Lambda^*) > 0 \quad (4.101)$$

sont nécessaires et suffisantes pour trouver les **minimums locaux** de \mathcal{H} . Le minimum minimum sera donc le minimum global. Mais encore, (4.100), (4.101) ne sont pas suffisantes pour que U^* minimise la fonction du coût $J(U)$. Notons par exemple que si $\dot{X} = U$, d'après (4.96), nous avons:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial^2 U} = \frac{\partial^2 L}{\partial^2 U} = \frac{\partial^2 L}{\partial^2 \dot{X}} > 0$$

alors (4.101) correspond à la condition nécessaire de Legendre (4.30).

Remarque 4.13 Pour des problèmes avec coût final $h(\cdot)$:

$$J(U) = h(T, X(T)) + \int_0^T L(t, X, U) dt$$

à horizon T et état final $X(T)$ libres, les conditions aux frontières [40] sont:

$$X^*(0) = X_0 \quad (4.102)$$

$$\Lambda^*(T) = \frac{\partial h}{\partial X}(T, X^*(T)) \quad (4.103)$$

$$\mathcal{H}(T, X^*(T), U^*(T), \Lambda^*(T)) = -\frac{\partial h}{\partial t}(T, X^*(T)) \quad (4.104)$$

4.9 Solution Numérique

Si la trajectoire désirée du couple est connue dans l'intervalle $[0, T]$ nous pouvons obtenir des solutions numériques hors-ligne pour l'état et la commande optimale. L'objectif de cette section est de comparer la solution numérique (normalement très proche de la solution optimale), par rapport aux solutions approchées présentées dans la section 4.7.

Nous considérons le problème suivant:

Problème 4.4 *Trouver la commande optimale $u_1^*(t) : [0, T] \rightarrow \mathcal{R}$, qui minimise la fonction du coût:*

$$J = \frac{k_f}{2} (\beta \sqrt{|y_d(T)|} - x(T))^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ r_n u_1^2(t) + \frac{r_n y_d^2(t)}{c^2 x^2(t)} + q_n x^2(t) \right\} dt \quad (4.105)$$

en respectant la contrainte dynamique:

$$\dot{x} = -ax + bu_1 \quad (4.106)$$

étant données $y_d(t) \in \mathcal{C}^2$, l'intervalle du temps T et la condition initiale $x(0) = \beta \sqrt{|y_d(0)|}$; l'état final est libre. \triangleleft

Dans ce problème, nous imposons l'état final $x(T) = \beta \sqrt{|y_d(T)|}$ via le coût final:

$$h(T, x(T)) = \frac{k_f}{2} (\beta \sqrt{|y_d(T)|} - x(T))^2 \quad (4.107)$$

o k_f est un facteur de pondération.

Il existe plusieurs techniques numériques pour résoudre ce problème. Dans [75] a été utilisée la programmation numérique pour résoudre un problème similaire de minimisation de l'énergie du moteur. Ici nous utiliserons **l'itération dans l'espace de commande** pour résoudre le problème d'intégration des équations canoniques d'Euler avec les valeurs limites en deux points. Comme la commande n'est pas bornée, nous utilisons les équations (4.91) à (4.94); l'Hamiltonien est:

$$\mathcal{H}(t, x, u_1, \lambda) = \frac{1}{2} \left\{ r_n u_1^2 + \frac{r_n y_d^2}{c^2 x^2} + q_n x^2 \right\} + \lambda(-ax + bu_1) \quad (4.108)$$

de (4.94) nous avons:

$$u_1^*(t) = -\frac{b}{r_n} \lambda^*(t) \quad (4.109)$$

donc, les équations d'état et coétat (4.92) et (4.93) sont:

$$\dot{x}^* = -ax^* - \frac{b^2}{r_n} \lambda^* \quad (4.110)$$

$$\dot{\lambda}^* = a\lambda^* - q_n x^* + \frac{r_n y_d^2}{c^2 (x^*)^3} \quad (4.111)$$

Les conditions aux frontières correspondent aux équations (4.102) et (4.103):

$$x^*(0) = \beta \sqrt{|y_d(0)|} \quad (4.112)$$

$$\lambda^*(T) = x^*(T) - \beta \sqrt{|y_d(T)|} \quad (4.113)$$

Alors, pour résoudre le problème 4.4 nous devons intégrer les équations (4.110) et (4.111) avec les conditions aux frontières (4.112) et (4.113), cela nous donne la trajectoire optimal du coétat: $\lambda^*(t)$ qui permet donc de calculer la commande optimal (4.109); bien sûr,, l'intégration n'est pas directe car nous ne connaissons pas la condition initiale $\lambda^*(0)$.

Remarque 4.14 Notons que si nous éliminons λ^* de (4.110) et (4.111):

$$\dot{\lambda}^* = -\frac{r_n}{b^2} \ddot{x}^* - \frac{ar_n}{b^2} \dot{x}^* \quad (4.114)$$

$$-\frac{r_n}{b^2} \ddot{x}^* - \frac{ar_n}{b^2} \dot{x}^* = -\frac{ar_n}{b^2} (\dot{x}^* + ax^*) - q_n x^* + \frac{r_n y_d^2}{c^2 (x^*)^3} \quad (4.115)$$

$$-\frac{r_n}{b^2} \ddot{x}^* = -\left(\frac{a^2 r_n}{b^2} + q_n\right) x^* + \frac{r_n y_d^2}{c^2 (x^*)^3} \quad (4.116)$$

$$\ddot{x}^*(x^*)^3 = \left(a^2 + \frac{q_n b^2}{r_n}\right) (x^*)^4 - \frac{b^2 y_d^2}{c^2} \quad (4.117)$$

$$\ddot{x}^*(x^*)^3 = \left(a^2 + \frac{qb^2}{r}\right) (x^*)^4 - \frac{b^2 y_d^2}{c^2} \quad (4.118)$$

nous obtenons effectivement l'équation d'Euler (4.31).

4.9.1 Principe de la méthode d'itération dans l'espace de commande

Supposons que nous avons calculé une commande $U^{(i)}$ de telle sorte que les équations (4.92), (4.93), (4.102) et (4.103) sont satisfaites, alors la variation de la fonctionnelle augmentée (4.83) est [40]:

$$\delta J_a = \int_0^T \left[\frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial U} \right]^T \delta U dt \quad (4.119)$$

o $\frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial U}$ correspond à la fonction $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U}$ évaluée dans les i -èmes trajectoires $X^{(i)}(t), U^{(i)}(t), \Lambda^{(i)}(t)$, et $\delta U = U^{(i+1)} - U^{(i)}$.

Si $\|\delta U\|$ est petite, alors l'incrément $\Delta J_a := J_a(U^{(i+1)}) - J_a(U^{(i)})$ peut être approché par δJ_a ; pour minimiser J_a nous devons calculer la trajectoire de la commande suivante $U^{(i+1)}$ de telle manière que:

$$J_a(U^{(i+1)}) - J_a(U^{(i)}) \cong \delta J_a \leq 0$$

ce qui peut être obtenu en choisissant δU comme:

$$\delta U = U^{(i+1)} - U^{(i)} = -\tau_n \frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial U} \quad (4.120)$$

avec $\tau_n > 0$.

Concrètement pour notre problème, l'algorithme est le suivant:

1. Proposer une commande initiale $u_1^{(0)}(t) \forall t \in [0, T]$; initialiser l'indice $i = 0$.
2. Intégrer l'équation d'état (4.106) à partir de $x(0)$; garder $x^{(i)}(t)$ en mémoire.
3. Intégrer l'équation de coétat (4.111) au sens rétrograde à partir de:

$$\lambda^{(i)}(T) = x^{(i)}(T) - \beta \sqrt{|y_d(T)|};$$

garder $\lambda^{(i)}(t)$ en mémoire.

4. Calculer la variation du Hamiltonian le long de la solution essayée:

$$\frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial u_1}(t) = r_n u_1^{(i)}(t) - b \lambda^{(i)}(t)$$

et tester la condition d'arrêt:

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial u_1}(t) \right\|^2 := \int_0^T \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial u_1}(t) \right)^2 dt \leq \epsilon > 0$$

5. Si la condition d'arrêt n'est pas vérifiée, corriger la commande par l'équation:

$$u_1^{(i+1)}(t) = u_1^{(i)}(t) - \tau_n \frac{\partial \mathcal{H}^{(i)}}{\partial u_1}(t)$$

6. Revenir au point 2, et ainsi de suite.

4.9.2 Résultats

La Figure 4.5 montre la solution analytique hyperbolique du flux (4.59), pour le couple désiré hyperbolique de la Figure 4.4. Il est montré aussi la trajectoire initiale du flux (qui est la réponse à la commande constante $u_1^{(0)} = \frac{a}{b} x_n$) et la solution finale numérique. Les paramètres utilisés ont été: $T = 3 \text{ sec.}$, $x(0) = 0.1 x_n$, $k_f = 50$, $\tau_n = 1.5$, $\epsilon = .02$. La méthode a convergée en 26 itérations; nous observons une bonne approximation de la solution exacte avec la solution numérique. La Figure 4.6 montre la solution numérique, la solution approchée et la solution OPEC pour la même trajectoire du couple désiré. Nous notons que la solution approchée est plus proche de la solution numérique que la solution OPEC, pour cette trajectoire spécifique du couple désiré. Mais cela n'est pas coûteux en termes de J , comme montre la Figure 4.7. D'après la Figure 4.7 nous observons que seulement la commande constante $u_1^{(0)}$ a un coût élevé par rapport au coût optimal J^* .

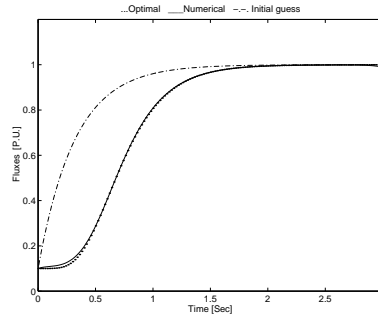


Figure 4.5: Trajectoire optimale du flux, trajectoire initiale du flux et solution finale numérique pour le couple désirée hyperbolique.

Nous avons remarqué que la commande approchée peut perdre son optimalité pour des trajectoires du couple avec des composantes de haute fréquence. La Figure 4.8 présente les solutions numérique, à flux constant, OPEC et approchée pour le couple désiré sinusoïdal: $y_d(t) = 10 + 10 \sin(10\pi t)$. Les paramètres utilisés ont été: $T = 4 \text{ sec.}$, $x(0) = x_n$, $k_f = 100$, $\tau_n = 0.05$, $\epsilon = .05$. La méthode a convergé en 100 itérations; nous observons en ce cas que la solution OPEC est plus proche de la solution numérique que la solution approchée. Les fonctions de coût sont présentées dans la Figure 4.9. Nous constatons que la solution approchée devient plus coûteuse que la commande classique à flux constant; nous observons aussi que la solution OPEC est la plus proche de la solution numérique parmi tous les solutions testées. Dans la section 5.3.5 nous présenterons une étude comparative plus approfondie entre les stratégies de commande à flux constant, approchée et OPEC.

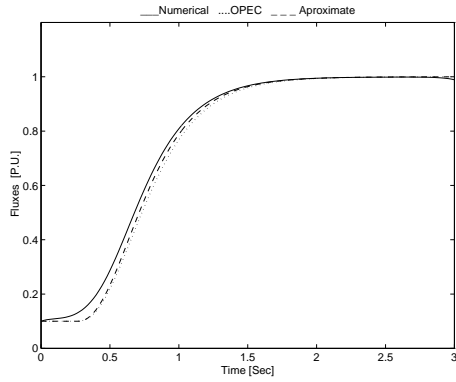


Figure 4.6: Trajectoire numérique du flux, solution approchée et solution OPEC pour le couple désirée hyperbolique.

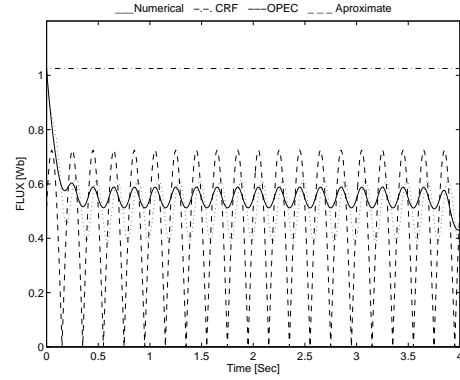


Figure 4.8: Trajectoires du flux numérique, constante, OPEC et approchée pour le couple désirée sinusoidal: $y_d(t) = 10 + 10 \sin(10\pi t)$.

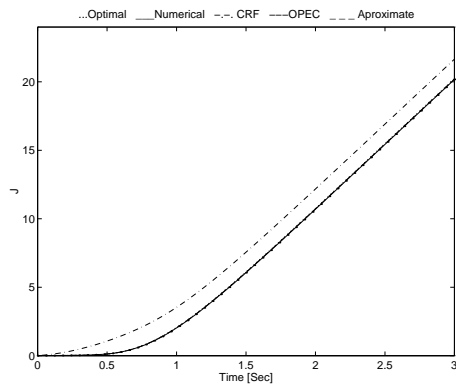


Figure 4.7: Fonctions du coût J pour les commandes optimale, numérique, constante, OPEC et approchée.

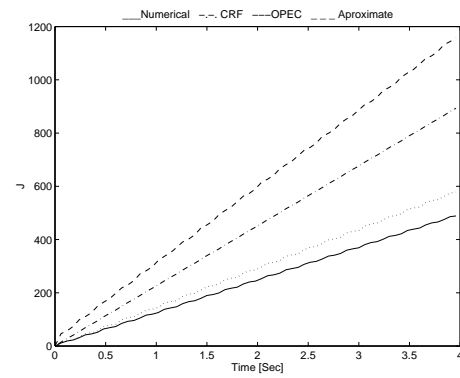


Figure 4.9: Fonctions du coût J des solutions numérique, constante, OPEC et approchée pour le couple désirée sinusoidal.

4.10 Critère avec erreur quadratique de poursuite du couple

Dans le problème 3.4 qui est équivalent au problème 4.1, nous avons utilisé la contrainte $y(t) = y_d(t)$ pour assurer une poursuite idéale du couple. Ceci est une pratique courante dans la commande vectorielle des machines asynchrones où la performance dynamique est avant tout privilégiée.

Pour des applications à basse et moyenne performance dynamique, la poursuite instantanée des variations rapides de couple, pénalise inutilement le rendement de la machine. Il est alors intéressant, pouvoir relaxer cette contrainte en considérant un critère pondéré de l'énergie et l'erreur de poursuite du couple; ceci nous amène au problème suivant:

Problème 4.5 *Trouver la commande optimale $U^* = [u_1^*, u_2^*]^T \forall t \in [0, T]$, qui minimise:*

$$J_{ep} = \frac{1}{2} \int_0^T \{ \alpha_4 (rU^T U + qx^2) + \alpha_5 (cxu_2 - y_d(t))^2 \} dt; \quad (4.121)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T L(y_d, x, U) dt \quad (4.122)$$

α_4 et $\alpha_5 \geq 0$, en respectant la restriction dynamique:

$$\dot{x} = -ax + bu_1 \quad (4.123)$$

avec,

a) $y_d(t) \in C^2$, connu $\forall t \in [0, T]$

b) $T, x(0), x(T)$, donnés.

◁

Les coefficients α_4 et α_5 nous permettent pondérer le rendement et la performance dynamique de la machine selon l'application spécifique à traiter.

Pour ce problème l'Hamiltonien est:

$$\mathcal{H}(t, x, u_1, \lambda) = \frac{1}{2} \{ \alpha_4 (rU^T U + qx^2) + \alpha_5 (cxu_2 - y_d(t))^2 \} + \lambda(-ax + bu_1) \quad (4.124)$$

de (4.94) nous avons:

$$u_1^*(t) = -\frac{b}{r\alpha_4} \lambda^*(t) \quad (4.125)$$

$$u_2^*(t) = \frac{c\alpha_5 x^* y_d(t)}{r\alpha_4 + c^2 \alpha_5 (x^*)^2} \quad (4.126)$$

alors, les équations d'état (4.92) et du coétat (4.93) sont:

$$\dot{x}^* = -ax^* - \frac{b^2}{r\alpha_4}\lambda^* \quad (4.127)$$

$$\dot{\lambda}^* = a\lambda^* - q\alpha_4x^* + \frac{r\alpha_4\alpha_5^2c^2x^*y_d^2(t)}{(\alpha_4r + \alpha_5c^2(x^*)^2)^2} \quad (4.128)$$

avec les conditions aux frontières $x(0)$ et $x(T)$.

En éliminant λ de (4.127) et (4.128) nous obtenons l'équation d'Euler:

$$\ddot{x}^*(x^*)^3 = \left(a^2 + \frac{qb^2}{r}\right)(x^*)^4 - \frac{b^2c^2\alpha_5(x^*)^4}{(\alpha_4r + \alpha_5c^2(x^*)^2)^2}y_d^2(t) \quad (4.129)$$

La solution stationnaire pour y_d constant est:

$$x^* = \sqrt{\frac{b|y_d|}{c\sqrt{a^2 + \frac{qb^2}{r}}} - \frac{r\alpha_4}{\alpha_5c^2}}, \quad |y_d| > \frac{r\alpha_4\sqrt{a^2 + \frac{qb^2}{r}}}{\alpha_5bc} \quad (4.130)$$

Nous observons qu'en faisant $\alpha_5 \rightarrow \infty$, l'équation d'Euler (4.129) devient l'équation d'Euler (4.31) et la solution optimale stationnaire de (4.130) devient la solution (4.6), c'est-à-dire, pour $\alpha_5 \rightarrow \infty$ les solutions du problème (4.5) tendent vers les solutions du problème 3.4; ce problème est donc une généralisation du problème 3.4.

Malheureusement, cette généralisation augmente la difficulté du calcul des solutions analytiques et approchées; par exemple, nous n'avons pas réussi à obtenir une solution approchée 'dynamique' du genre OPEC pour ce problème. Malgré cela, nous pensons que le calcul des solutions approchées pour ce problème et son étude plus détaillé, est une perspective intéressante pour des travaux ultérieurs.

4.11 Minimisation avec contraintes dans l'espace de la commande

Nous avons déjà remarqué que l'approche variationnel ne permet pas de prendre en compte les limitations dans l'espace de commande; si nous saturons les solutions non-bornées obtenues auparavant, alors il y aura nécessairement une perte d'optimalité.

Il est donc intéressant de chercher des solutions qui considèrent des limites pour les variables de commande. Par la suite, nous formulons le problème d'optimisation avec des limites maximales pour les courants et obtenons les conditions nécessaires pour sa solution, en utilisant le principe du minimum (4.99).

Problème 4.6 étant donnés: la trajectoire du couple désiré $y_d(t) \in \mathcal{C}^2$, les conditions aux frontières $x(0), x(T)$ et l'intervalle du temps T ; trouver la commande optimale $U^* = [u_1^*, u_2^*]^T \forall t \in [0, T]$, qui minimise la fonction de coût:

$$J = \int_0^T \{rU^T U + qx^2\} dt \quad (4.131)$$

$$= \int_0^T L(y_d(t), x, U) dt \quad (4.132)$$

En respectant les contraintes:

$$\dot{x} = -ax + bu_1 \quad (4.133)$$

$$y = y_d(t) = cxu_2 \quad (4.134)$$

$$U \in \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} = \{U \in \mathbb{R}^2 : |u_1| \leq v_1, |u_2| \leq v_2\} \quad (4.135)$$

◁

Lemme 4.6 Les conditions nécessaires d'optimalité pour résoudre le Problème 4.6, sont:

$$u_1^* = \text{sat}_{v_1} \left(\frac{b}{2r} \lambda_1^* \right) \quad (4.136)$$

$$u_2^* = \frac{y_d(t)}{cx^*} \quad (4.137)$$

o λ_1^* and x^* sont les solutions du système d'équations:

$$\dot{x}^* = -ax^* + b \text{sat}_{v_1} \left\{ \frac{b}{2r} \lambda_1^* \right\}; \quad x^*(0) = x(0), \quad x^*(T) = x(T) \quad (4.138)$$

$$\dot{\lambda}_1^* = -[2q + 4v_2^2 c^2 (v_2^2 c^2 (x^*)^2 - y_d^2(t)) s(g(x^*))] x^* + a\lambda_1^* + \frac{2ry_d^2(t)}{c^2(x^*)^3} \quad (4.139)$$

o $s(g(x))$, est la fonction échelon définie par:

$$s(g(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(x) \geq 0 \\ 1 & \text{si } g(x) < 0 \end{cases} \quad (4.140)$$

avec $g(x) = g(x(t), t) = v_2^2 c^2 x^2 - y_d^2(t)$, et $\text{sat}_{v_1}(v)$ est la fonction saturation:

$$\text{sat}_{v_1}(v) = \begin{cases} -v_1 & \text{si } v < -v_1 \\ v & \text{si } -v_1 \leq v \leq v_1 \\ v_1 & \text{si } v > v_1 \end{cases} \quad (4.141)$$

Démonstration : D'abord nous notons que la contrainte $y_d(t) = y = cxu_2$ rend dépendant u_2 de x ; alors, la fonction du coût peut s'écrire comme:

$$J = \int_0^T L(x, u_1, t) dt = \int_0^T \left\{ ru_1^2 + r \frac{y_d(t)^2}{c^2 x^2} + qx^2 \right\} dt \quad (4.142)$$

De la même manière, la contrainte (4.134) permet d'écrire la restriction $|u_2| \leq v_2$ en termes de x :

$$g(x(t), t) = v_2^2 c^2 x^2 - y_d^2(t) \geq 0; \quad (4.143)$$

Maintenant, le problème consiste en trouver la commande admissible u_1 qui minimise (4.142) en respectant les contraintes:

$$\dot{x} = f(x, u_1) = -ax + bu_1 \quad (4.144)$$

$$|u_1| \leq v_1 \quad (4.145)$$

$$g(x(t), t) \geq 0 \quad (4.146)$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation avec une contrainte dynamique, une commande bornée et la contrainte d'inégalité: $g(x(t), t) \geq 0$. Ce problème peut se résoudre, si nous considérons l'Hamiltonien [40]:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(x(t), u(t), \Lambda(t), t) = L(x, u_1, t) + \lambda_1 f(x, u_1) + \lambda_2 g(x)^2 s(g(x)) \quad (4.147)$$

$$\begin{aligned} &= ru_1^2 + r \frac{y_d^2(t)}{c^2 x^2} + qx^2 + \lambda_1 (-ax + bu_1) \\ &\quad + \lambda_2 (v_2^2 c^2 x^2 - y_d^2(t))^2 s(g(x)) \end{aligned} \quad (4.148)$$

o $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ est le vecteur de coétats et $s(g(x))$ est définie en (4.140). Le produit $g(x)^2 s(g(x))$ définit une deuxième variable d'état z :

$$\dot{z} = g(x)^2 s(g(x)); z(0) = 0, z(T) = 0$$

qui garantit le respect de la contrainte d'inégalité (4.146). En effet, comme $\dot{z} \geq 0, \forall t$; alors,

$$z(t) = \int_0^T \dot{z} dt + z(0)$$

satisfait les conditions aux frontières $z(0) = 0, z(T) = 0$ seulement si $\dot{z} = 0, \forall t \in [0, T]$. Alors, $g(x)^2 s(g(x)) = 0, \forall t \in [0, T]$ ce qui est équivalent à respecter la contrainte $g(x) \geq 0$. z n'est pas explicitement dans l'Hamiltonien mais elle doit être considérée lorsque nous calculons le vecteur de coétat Λ .

D'après le principe du minimum, les conditions nécessaires d'optimalité sont:

$$\dot{x}^* = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_1} \quad (4.149)$$

$$\dot{z}^* = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_2} \quad (4.150)$$

$$\dot{\lambda}_1^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \quad (4.151)$$

$$\dot{\lambda}_2^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} \quad (4.152)$$

$$\mathcal{H}(x^*, u_1^*, \Lambda^*, t) \leq \mathcal{H}(x^*, u_1, \Lambda^*, t) \quad \forall U \in \mathcal{U} \quad (4.153)$$

et la commande optimale $u_1^* \in \mathcal{U}$ doit satisfaire, $\forall t \in [0, T]$:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1}(x^*, u_1^*, \Lambda^*, t) = 0 \quad (4.154)$$

Comme \mathcal{H} ne dépend pas de z , de (4.152) nous avons que $\dot{\lambda}_2^* = 0$, alors λ_2^* est une constante. Soit $\lambda_2^* = 1$, les équations (4.149) à (4.151) donnent:

$$\dot{x}^* = -ax^* + bu_1^* \quad (4.155)$$

$$\dot{z}^* = (v_2^2 c^2 (x^*)^2 - y_d^2(t))^2 s(g(x^*)) \quad (4.156)$$

$$\dot{\lambda}_1^* = -[2q + 4v_2^2 c^2 (v_2^2 c^2 (x^*)^2 - y_d^2(t))s(g(x^*))] x^* + a\lambda_1^* + \frac{2ry_d^2(t)}{c^2(x^*)^3} \quad (4.157)$$

finalement de (4.154) nous avons que pour $u_1^* \leq |v_1|$, la commande optimale doit être de la forme $u_1^* = -\frac{b}{2r}\lambda_1^*$. L'admissibilité de la commande indiquée par (4.153) donne la loi de commande,

$$u_1^* = \begin{cases} -v_1 & \text{si } -\frac{b}{2r}\lambda_1 < -v_1 \\ -\frac{b}{2r}\lambda_1^* & \text{si } -v_1 \leq -\frac{b}{2r}\lambda_1 \leq v_1 \\ v_1 & \text{si } -\frac{b}{2r}\lambda_1 > v_1 \end{cases} \quad (4.158)$$

et la commande u_2^* est calculée à partir de la restriction de couple:

$$u_2^* = \frac{y_d(t)}{cx^*(t)} \quad (4.159)$$

évaluée le long de la trajectoire optimale obtenue de résoudre (4.155)-(4.157) et (4.158). Nous notons que la commande optimale U^* ne dépend pas explicitement de $z^*(t)$; alors, nous n'avons pas besoin d'intégrer (4.156) pour résoudre ce problème. ■

Si nous relaxons les limites des courants, les solutions du problème 4.6 deviennent:

$$u_1^* = -\frac{b}{2r}\lambda_1^* \quad (4.160)$$

$$u_2^* = \frac{y_d(t)}{cx^*} \quad (4.161)$$

o λ_1^* et x^* sont les solutions de:

$$\dot{x}^* = -ax^* + \frac{b^2}{2r}\lambda_1^*; \quad x^*(0) = x(0), \quad x^*(T) = x(T) \quad (4.162)$$

$$\dot{\lambda}_1^* = -2qx^* + a\lambda_1^* + \frac{2ry_d^2(t)}{c^2(x^*)^3} \quad (4.163)$$

ce qui correspond effectivement aux équations d'état (4.110) et du coétat (4.111) du problème de minimisation sans contraintes dans l'espace de commande.

Il faut noter que la solution obtenue via le principe du minimum est différente de celle qu'on obtiendrait en saturant a posteriori, les commandes optimales non-bornées (4.3) et (4.4). Cela vient du fait que l'équation différentiel du coétat est différente pour chaque problème (équations (4.157) et (4.163)).

Nous notons aussi que la solution du problème 4.6 requiert nécessairement de l'utilisation des méthodes numériques hors-ligne.

Remarque 4.15 *Pour des machines alimentées en tension, nous pouvons considérer le problème 3.3 avec les contraintes additionnelles dans l'espace de tensions d'alimentation:*

$$U_s^{(d,q)} = [u_s^d, u_s^q]^T \in \mathcal{U}_t, \quad \mathcal{U}_t = \left\{ U_s^{(d,q)} \in \mathbb{R}^2 : |u_s^d| \leq \vartheta_1, |u_s^q| \leq \vartheta_2 \right\}$$

Bien sur, la solution dans ce cas sera à nouveau numérique.

Pour les solutions approché et OPEC que nous avons discuté dans ce chapitre, nous avons limité les courants u_1 et u_2 en imposant des limites dans l'espace d'état x ; nous avons considéré aussi la limitation des tensions u_s^d et u_s^q en utilisant la méthode traditionnelle de defluxage à haute vitesse (voir la section 6.3.3 pour le détails), ceci à fin d'éviter l'utilisation des méthodes numériques hors-ligne; bien sur, cela entraîne une perte d'optimalité.

4.12 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons obtenu les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour le problème de commande optimale 4.1. Ces conditions nous amènent à intégrer l'équation d'Euler avec des valeurs limites en deux points. Nous avons montré que l'équation d'Euler a:

1. au plus, une solution bornée asymptotique,
2. une et seulement une solution stationnaire x^* , pour y_d constante et $x(0) = x^*$, laquelle a été donné analytiquement,
3. une et seulement une solution asymptotique $x^*(t)$, pour y_d constante et n'importe quelle condition initiale $x(0) > 0$, laquelle a été donné analytiquement.

Pour des trajectoires désirées du couple variables dans le temps et connues à priori, nous avons présenté une méthode numérique qui donne des solutions hors-ligne.

Pour des trajectoires désirées du couple variables dans le temps et méconnues à l'avance, nous avons proposé la solution approchée: $\hat{x}^*(t) = \beta \sqrt{|y_d(t)|}$, laquelle s'approche de la solution optimale pour des signaux de couples désirés sans composantes de haute fréquence. De plus, nous avons montré que la solution OPEC améliore cette solution approchée pour des couples désirés avec composantes de haute fréquence.

D'autre part, nous avons obtenu les conditions nécessaires d'optimalité sans utiliser la contrainte forte de poursuite de couple: $y(t) = y_d(t)$. La poursuite de couple est obtenue en ajoutant à la fonction de coût l'erreur quadratique de poursuite du couple. Finalement, nous avons présenté les conditions nécessaires d'optimalité en considérant des limites pour les courants.

Chapitre 5

Commande Optimale via l'équation d'Hamilton-Jacobi

5.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'utilisation du calcul variationnel ou du principe du minimum nous amène au problème calculatoire de résoudre une équation différentielle non-linéaire avec des valeurs limites en deux points; la solution de ce problème nous donne l'évolution temporelle en $[0, T]$ de l'état et la commande optimale. Il s'agit donc d'une commande en boucle ouverte, qui dépend explicitement des conditions aux frontières (voir par exemple, la solution présentée dans le Lemme 4.4). Il est intéressant de pouvoir obtenir une commande optimale fonction du temps¹ et de l'état, $u^*(t, x)$ indépendante de la condition initiale du système, c'est-à-dire, une commande en boucle fermée. La conception des commandes en utilisant l'équation aux dérivés partielles d'Hamilton-Jacobi, nous donne des lois de commande de ce genre. Nous présentons dans ce chapitre nos principaux résultats en utilisant cette approche; les idées de base de la commande optimale via l'équation d'Hamilton-Jacobi seront présentées dans la section suivante.

Puis, nous présentons les résultats séparés en deux grands volets:

1. la minimisation de l'énergie du moteur (section 5.3),
2. la régulation H_2 et H_∞ (section 5.4).

Pour la de minimisation d'énergie, nous allons considérer une fonction du coût normalisée par rapport à l'intervalle d'optimisation, afin d'obtenir des coûts bornés à l'horizon infini.

¹la dépendance du temps est inhérent au problème, elle est due à la dépendance du temps de la fonction du coût et/ou de la dynamique du système

Nous allons d'abord considérer le couple désiré constante et calculerons pour ce cas, une loi de commande optimale en boucle fermée, non-linéaire et dépendante du temps, pour un horizon d'optimisation fini; cette loi de commande deviendra invariante par rapport au temps à l'horizon infini. La loi de commande à l'horizon infini nous permettra d'obtenir une loi de commande sous-optimale, pour des trajectoires de couple désiré variables dans le temps et méconnues à l'avance; cette commande minimise une limite supérieure de la fonction du coût normalisée optimale, à l'horizon T infini.

L'inconvénient de ces lois de commande en boucle fermée, est qu'elles ont besoin d'une estimation du flux pour son implantation, car normalement le flux n'est pas mesurable; alors, l'erreur d'estimation affectera l'optimalité et la stabilité de ces commandes. Nous avons considéré une autre stratégie pour la mise en oeuvre; en exploitant le fait que la dynamique en boucle fermée est linéarisable par une transformation d'état très simple, nous avons obtenu un générateur de références sous-optimales de la norme du flux - la stratégie OPEC- d'une notable simplicité calculatoire; elle nous donne les trajectoires sous-optimales qui minimisent une limite supérieure de la fonction du coût normalisée à l'horizon infini et lorsque y_d est constante, OPEC nous donne en ligne les trajectoires optimales de la norme du flux qui tendent asymptotiquement à la solution optimale stationnaire, à partir de n'importe quelle condition initiale du flux. La section finira avec une évaluation en simulation des performances énergétiques des solutions approchée et OPEC par rapport au fonctionnement à flux constant.

Le deuxième volet de ce chapitre (section 5.4) correspond au travail fait en collaboration avec D. Georges [30] sur la commande optimale H_2 et H_∞ . D'abord nous présentons une loi de commande optimale qui minimise un critère H_2 des erreurs de la norme du flux et des courants, pendant la régulation autour de la solution optimal stationnaire, sur un horizon infini. La loi de commande est fonction de l'état et assure la stabilité du système en boucle fermée. Ensuite, nous considérons des perturbations à énergie bornée dans la dynamique du flux; ceci nous permet de poser un problème d'atténuation des perturbations avec stabilité interne de la dynamique du flux autour du point optimal stationnaire; la solution du problème H_∞ sera aussi une loi de commande optimale en boucle fermée, laquelle assure la stabilité interne et atténue les effets des perturbations additives dans le critère H_2 , sur un horizon fini; en plus, la norme H_∞ optimale et sa pire perturbation associée, seront obtenues explicitement. A la fin de la section 5.4 nous présenterons un estimateur du flux qui préserve la stabilité asymptotique de tout le système en boucle fermé et quelques résultats de simulation qui comparent les performances en régulation et en rendement des lois de commande nominales H_2 et H_∞ .

5.2 L'équation d'Hamilton-Jacobi

Nous présentons dans cette section les idées de base de la commande optimale via l'équation d'Hamilton-Jacobi; pour simplifier la notation nous allons considérer le cas scalaire; nous allons obtenir des conditions suffisantes d'optimalité pour le problème suivant:

Problème 5.1 Trouver la commande optimale $u^*(t, x)$ qui minimise:

$$J(u) = \int_0^T L(t, x, u) dt$$

en respectant la contrainte dynamique:

$$\dot{x} = g(x, u, t)$$

avec $T, x(0)$ et $x(T)$ spécifiées; $L(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont au moins une fois différentiables par rapport à ses arguments. \triangleleft

Considérons la fonction scalaire:

$$J^*(t, x) = \int_t^T L(\tau, x(\tau), u^*(\tau, x)) d\tau \quad (5.1)$$

qui correspond à la valeur minimal de la fonction de coût J , pour un état initial x à l'instant t . la dérivée totale par rapport au temps, de J^* est:

$$\frac{d}{dt} J^*(t, x) = \frac{\partial J^*(t, x)}{\partial x} g(x, u^*, t) + \frac{\partial J^*(t, x)}{\partial t} = -L(t, x, u^*(t, x)) \quad (5.2)$$

alors:

$$\frac{\partial J^*(t, x)}{\partial x} g(x, u^*, t) + \frac{\partial J^*(t, x)}{\partial t} + L(t, x, u^*(t, x)) = 0 \quad (5.3)$$

la dérivée partielle par rapport à x , de (5.3) est:

$$\frac{\partial^2 J^*(t, x)}{\partial^2 x} g(x, u^*, t) + \frac{\partial J^*(t, x)}{\partial x} \frac{\partial g(x, u^*, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 J^*(t, x)}{\partial x \partial t} + \frac{\partial L(t, x, u^*(t, x))}{\partial x} = 0 \quad (5.4)$$

Si les deuxièmes dérivées partielles de $J^*(\cdot)$ par rapport à ses arguments sont continues, alors le terme $\frac{\partial^2 J^*(t, x)}{\partial x \partial t}$ est égal à $\frac{\partial^2 J^*(t, x)}{\partial t \partial x}$.

Notons que la dérivé total par rapport au temps, de $\frac{\partial J^*}{\partial x}$ est:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial J^*(t, x)}{\partial x} \right\} = \frac{\partial^2 J^*(t, x)}{\partial^2 x} g(x, u^*, t) + \frac{\partial^2 J^*(t, x)}{\partial t \partial x} \quad (5.5)$$

donc l'équation (5.4) peut s'écrire:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial J^*(t, x)}{\partial x} \right\} = - \left(\left\{ \frac{\partial J^*(t, x)}{\partial x} \right\} \frac{\partial g(x, u^*, t)}{\partial x} + \frac{\partial L(t, x, u^*(t, x))}{\partial x} \right) \quad (5.6)$$

De la transformation de Legendre (4.96) et de l'équation du coétat (4.88) nous avons:

$$\dot{\lambda} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \quad (5.7)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x} \{L + \lambda g\} \quad (5.8)$$

$$\dot{\lambda} = -(\lambda \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial x}) \quad (5.9)$$

En comparant (5.6) et (5.9) nous observons que $\frac{\partial J^*}{\partial x}$ (entre crochets dans (5.6)) satisfait l'équation différentielle du coétat (5.7), alors l'évolution temporelle de λ est équivalente à celle de $\frac{\partial J^*}{\partial x}$. Ceci nous permet d'utiliser les résultats de la section 4.8 avec $\lambda = \frac{\partial J^*}{\partial x}$. En particulier, le principe du minimum nous dit que l'Hamiltonien:

$$\mathcal{H}(t, x, u, \frac{\partial J^*}{\partial x}) = L(t, x, u) + \frac{\partial J^*}{\partial x} g(t, x, u) \quad (5.10)$$

doit être minimisé par la commande optimale u^* ,

$$\mathcal{H}(t, x, u^*, \frac{\partial J^*}{\partial x}) = \min_u \left\{ H(t, x, u, \frac{\partial J^*}{\partial x}) \right\} \quad (5.11)$$

ceci nous permet de calculer u^* comme une fonction de t, x et $\frac{\partial J^*}{\partial x}$; comme $\frac{\partial J^*}{\partial x}$ est fonction de t et x , nous obtenons la commande optimale $u^*(t, x)$, seulement en fonction de t et x ce qui est en accord avec la supposition faite au début. Cependant, pour calculer $\frac{\partial J^*}{\partial x}$ il nous faut connaître $J^*(t, x)$. A partir de (5.11) nous avons:

$$L(t, x, u^*(t, x)) = \mathcal{H}(t, x, u^*(t, x), \frac{\partial J^*}{\partial x}) - \frac{\partial J^*}{\partial x} g(t, x, u^*(t, x)) \quad (5.12)$$

en substituant (5.12) dans (5.2), nous obtenons **l'équation d'Hamilton-Jacobi**:

$$\frac{\partial J^*(t, x)}{\partial t} = -\mathcal{H}(t, x, u^*(t, x), \frac{\partial J^*}{\partial x}), \quad (5.13)$$

$$J^*(T, x(T)) = 0 \quad (5.14)$$

La solution de cette équation nous donne donc, $J^*(t, x)$. Il s'agit d'une équation de premier ordre non-linéaire en dérivés partielles très difficile à résoudre car il n'existe pas une méthode directe et général de solution; par exemple, l'utilisation de la méthode des caractéristiques, donne les équations canoniques d'Euler [56] et on retombe sur le problème d'intégration avec des valeurs limites en deux points.

Le Théorème suivant [11] présente en résumé les conditions suffisantes d'optimalité.

Théorème 5.1 *Si l'équation d'Hamilton-Jacobi (5.13) admet une solution $J^*(t, x)$ continuellement différentiable pour tout (t, x) en vérifiant la condition (5.14), et si la commande $u^*(t, x)$ transfère l'état de $x(0)$ à $x(T)$ et est continue presque partout, alors cette commande est optimale et le coût optimale est $J^*(0, x(0))$. \square*

5.3 Minimisation de l'énergie via l'équation d'Hamilton-Jacobi

Nous avons obtenue dans le chapitre précédent plusieurs solutions optimales du problème de minimisation de l'énergie du moteur, qui donnent une valeur constante positive du coût

$L(y, x, u_1) > 0$ à l'horizon T infini. Cela implique des coût 'optimaux' minimaux J^* qui tendent eux aussi à l'infini. Pour éviter cette contradiction, nous allons considérer une fonction de coût J_n normalisée par rapport à l'intervalle de temps T :

$$J_n = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{r}{b^2} (\dot{x} + ax)^2 + \frac{ry_d(t)^2}{c^2 x^2} + qx^2 \right\} dt \quad (5.15)$$

Ceci nous garanti un coût minimal optimal J_n^* borné à l'horizon T infini. Dans cette section nous allons résoudre le problème de minimisation de l'énergie du moteur, pour le couple désiré constant et l'horizon d'optimisation T infini; pour cela, nous allons d'abord obtenir une commande optimale $u_1(t, x)$ qui resoud le problème de minimisation d'énergie à l'horizon T fini; après, nous allons faire tendre $T \rightarrow \infty$, pour éliminer la dépendance du temps dans la loi de commande; nous considérons donc les problèmes:

Problème 5.2 *Etant donnés:*

1. l'intervalle d'optimisation T fini,
2. le couple désiré $y_d \neq 0$ et constant $\forall t \in [0, T]$,
3. la condition initiale de l'état $x(0) > 0$ et la condition finale $x(T) = x^* = \beta\sqrt{|y_d|}$;

trouver une loi de commande optimale $u_1^*(t, x) \forall t \in [0, T]$ qui minimise la fonction du coût (5.15) en respectant la restriction dynamique du flux:

$$\dot{x} = -ax + bu_1 \quad (5.16)$$

◁

Problème 5.3 *Etant donnés:*

1. l'intervalle d'optimisation infini: $T \rightarrow \infty$,
2. le couple désiré $y_d \neq 0$ et constant $\forall t \in [0, \infty]$,
3. la condition initiale de l'état $x(0) > 0$ et la condition finale $x(\infty) = x^* = \beta\sqrt{|y_d|}$;

trouver une loi de commande optimale $u_1^*(x(t)) \forall t \in [0, \infty]$ qui minimise la fonction du coût:

$$J_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ ru_1^2 + \frac{ry_d^2}{c^2 x^2} + qx^2 \right\} dt \right\} \quad (5.17)$$

en respectant la restriction dynamique du flux (5.16).

◁

5.3.1 Solution à l'horizon T fini

Le Théorème suivant, présente une solution au problème 5.2:

Théorème 5.2 *La loi de commande:*

$$u_1^*(t, x) = \frac{|y_d|}{cx} + \frac{1}{b} \left(a - w_o - \frac{2w_o}{c_1(T)e^{-2w_o t} - 1} \right) x \quad (5.18)$$

o:

$$\begin{aligned} c_1(T) &= \frac{e^{2w_o T}}{2(R-1)} \left[-R(e^{2w_o T} - 2 - e^{-2w_o T}) - 2 \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(R(e^{2w_o T} - 2 - e^{-2w_o T}) + 2)^2 - 4(R-1)(R(2e^{-2w_o T} - 1) - 1)} \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$w_o = \sqrt{a^2 + \frac{qb^2}{r}}, \quad (5.20)$$

$$R = \frac{x^2(T)}{x^2(0)} \quad (5.21)$$

minimise la fonction du coût (5.15) au sens du problème 5.2. □

Démonstration : Soit:

$$J^*(t, x) = \min_{u_1} \left\{ \frac{1}{T} \int_t^T \{ru_1^2 + \frac{ry_d^2}{c^2x^2} + qx^2\} d\tau \right\}, \quad t \leq \tau \leq T, \quad (5.22)$$

alors, l'équation d'Hamilton-Jacobi associée a ce problème est:

$$\frac{\partial J^*}{\partial t}(t, x) + H(t, x, u_1^*, \frac{\partial J^*}{\partial x}(t, x)) = \frac{\partial J^*}{\partial t}(t, x) + \min_{u_1} H(t, x, u_1, \frac{\partial J^*}{\partial x}(t, x)) = 0, \quad (5.23)$$

avec la condition frontière: $J^*(T, x(T)) = 0$, et l'Hamiltonien:

$$H(t, x, u_1, \frac{\partial J^*}{\partial x}(t, x)) = \frac{1}{T}(ru_1^2 + \frac{ry_d^2}{c^2x^2} + qx^2) + \frac{\partial J^*}{\partial x}(t, x)(-ax + bu_1). \quad (5.24)$$

La commande optimal u_1^* est donnée par la condition de stationnarité $\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$:

$$u_1^* = -\frac{Tb}{2r} \frac{\partial J^*}{\partial x}(t, x); \quad (5.25)$$

l'Hamiltonien évaluée en u_1^* et substitué dans (5.23) donne:

$$\frac{\partial J^*}{\partial t}(t, x) = \frac{Tb^2}{4r} \left(\frac{\partial J^*}{\partial x}(t, x) \right)^2 + ax \frac{\partial J^*}{\partial x}(t, x) - \frac{ry_d^2}{Tc^2x^2} - \frac{q}{T}x^2. \quad (5.26)$$

Pour résoudre cette équation en dérivées partielles, nous supposons $J^*(t, x)$ de la forme:

$$J^*(t, x) = k_1(t) - 2k_0 \ln x + k_2(t)x^2, \quad (5.27)$$

alors:

$$\frac{\partial J^*}{\partial t}(t, x) = \dot{k}_1(t) + \dot{k}_2(t)x^2 \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial x}(t, x) = -2\frac{k_0}{x} + 2k_2(t)x. \quad (5.29)$$

En substituant (5.28) et (5.29) dans (5.26) nous obtenons:

$$\begin{aligned} & \left\{ \dot{k}_1 + \frac{2Tb^2}{r}k_0k_2(t) + 2ak_0 \right\} + \\ & x^2 \left\{ \dot{k}_2(t) - \frac{Tb^2}{r}k_2^2(t) - 2ak_2(t) + \frac{q}{T} \right\} + \\ & \frac{1}{x^2} \left\{ \frac{ry_d^2}{Tc^2} - \frac{Tb^2}{r}k_0^2 \right\} = 0. \end{aligned}$$

Satisfaire cette équation pour tout $x(t) > 0$, implique résoudre le jeux d'équations:

$$\dot{k}_1 + \frac{2Tb^2}{r}k_0k_2(t) + 2ak_0 = 0 \quad (5.30)$$

$$\dot{k}_2(t) - \frac{Tb^2}{r}k_2^2(t) - 2ak_2(t) + \frac{q}{T} = 0 \quad (5.31)$$

$$\frac{ry_d^2}{Tc^2} - \frac{Tb^2}{r}k_0^2 = 0, \quad (5.32)$$

notez que pour obtenir la commande optimale (5.25) nous devons seulement résoudre (5.31) et (5.32) car u_1^* ne dépend pas de $k_1(t)$; de (5.32) nous obtenons:

$$k_0 = \pm \frac{r|y_d|}{Tcb} \quad (5.33)$$

L'équation (5.31) est une équation scalaire de Riccati, elle peut être linéarisée et alors résolue analytiquement, en utilisant la transformation:

$$k_2 = k_2^s + \frac{1}{z} \quad (5.34)$$

où k_2^s est une solution de (5.31); nous avons choisi la solution stationnaire positive pour k_2^s :

$$k_2^s = \frac{-a + w_o}{\frac{Tb^2}{r}} \quad (5.35)$$

avec:

$$w_o = \sqrt{a^2 + \frac{qb^2}{r}},$$

ceci donne l'équation différentielle linéaire:

$$\dot{z} + 2w_o z + \frac{Tb^2}{r} = 0 \quad (5.36)$$

qui a pour solution:

$$z(t) = e^{-2w_o t} c_0 - \frac{Tb^2}{2rw_o} (1 - e^{-2w_o t}). \quad (5.37)$$

En substituant (5.37) et (5.35) dans (5.34) nous avons:

$$k_2(t) = \frac{1}{\frac{Tb^2}{r}} \left(-a + w_o + \frac{2w_o}{c_1 e^{-2w_o t} - 1} \right) \quad (5.38)$$

où $c_1 = \frac{1+2rw_o c_0}{Tb^2}$ est une constante qui sera calculée à partir de la condition frontière: $x(T)$.

La commande optimale est:

$$u_1^* = -\frac{Tb}{2r} \frac{\partial J^*}{\partial x}(t, x) \quad (5.39)$$

$$= \frac{Tb}{r} \left(\frac{k_0}{x} - k_2(t)x \right) \quad (5.40)$$

$$u_1^* = \pm \frac{|y_d|}{cx} + \frac{1}{b} \left(a - w_o - \frac{2w_o}{c_1 e^{-2w_o t} - 1} \right) x. \quad (5.41)$$

En utilisant la commande optimale (5.41) dans (5.16) nous obtenons l'équation différentielle nonlinéaire:

$$\dot{x}^* = \pm \frac{b|y_d|}{cx^*} - w_o \left(1 + \frac{2}{c_1 e^{-2w_o t} - 1} \right) x^*, \quad x^*(0) = x(0), \quad (5.42)$$

sa solution est la trajectoire du flux optimal $x^*(t)$; cette équation peut être linéarisée en utilisant la transformation $s = (x^*)^2$, $s > 0$ ce qui donne:

$$\dot{s} = \pm \frac{2b|y_d|}{c} - \alpha(t)s, \quad s(0) = x^2(0) \quad (5.43)$$

où

$$\alpha(t) = 2w_o \left(1 + \frac{2}{c_1 e^{-2w_o t} - 1} \right). \quad (5.44)$$

Comme seulement le terme positif $\frac{2b|y_d|}{c}$ donne des solutions asymptotiques de s positives et bornées, alors nous prenons la solution positive pour k_0 :

$$k_0 = \frac{r|y_d|}{Tcb} \quad (5.45)$$

La solution de (5.43) est:

$$s(t) = (x^*(t))^2 = e^{-\int \alpha dt} \left[\frac{x^2(0)}{(c_1 - 1)^2} + \frac{2b|y_d|}{c} \int_0^t e^{\int \alpha dt} d\tau \right] \quad (5.46)$$

avec,

$$e^{-\int \alpha(t) dt} = e^{2w_o t} (c_1 e^{-2w_o t} - 1)^2 \quad (5.47)$$

$$\int_0^t e^{\int \alpha dt} d\tau = \frac{1 - e^{-2w_o t}}{2w_o (c_1 e^{-2w_o t} - 1)(c_1 - 1)} \quad (5.48)$$

L'équation (5.46) en $t = T$ avec la condition frontière $x^2(T) = \frac{b|y_d|}{cw_o}$, donne l'équation suivante quadratique en c_1 :

$$(R - 1)e^{-2w_o T} c_1^2 + (R(e^{2w_o T} - 2 - e^{-2w_o T}) + 2) c_1 + R(2 - e^{2w_o T}) - e^{2w_o T} = 0 \quad (5.49)$$

avec $R = \frac{b|y_d|}{cw_o x^2(0)} = \frac{x^2(T)}{x^2(0)} > 0$.

La solution de c_1 est:²

$$c_1(T) = \frac{e^{2w_o T}}{2(R - 1)} \left[-R(e^{2w_o T} - 2 - e^{-2w_o T}) - 2 \right. \\ \left. - \sqrt{(R(e^{2w_o T} - 2 - e^{-2w_o T}) + 2)^2 - 4(R - 1)(R(2e^{-2w_o T} - 1) - 1)} \right]$$

Nous remarquons que le terme:

$$(R(e^{2w_o T} - 2 - e^{-2w_o T}) + 2)^2 - 4(R - 1)(R(2e^{-2w_o T} - 1) - 1) = \\ R^2 (e^{4w_o T} + e^{-4w_o T} - 4e^{2w_o T} - 4e^{-2w_o T} + 6) + R(4e^{2w_o T} + 4e^{-2w_o T} - 8) \geq 0 \quad \forall T \geq 0,$$

donc, la solution (5.19) existe pour tout $T \geq 0$.

D'autre part, si

$$c_1(T) > -e^{2w_o T}, \quad (5.50)$$

alors $\alpha(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T]$ ce qui assure que (5.43) est stable et pourtant, que $x^*(t)$ évolue en $\Omega = \{x \in R^+ - \{0\}\}$ pour tout $t \in [0, T]$.

L'inégalité (5.50) dans (5.19) donne:

$$R^2 (2 + 3e^{2w_o T} - e^{-2w_o T}) + R (e^{2w_o T} - 3e^{-2w_o T} - 6) + 4 > 0 \quad (5.51)$$

²nous considérons seulement cette solution car l'autre solution ne donne pas un s admissible à l'horizon T infini

La valeur inférieure du terme gauche de (5.51) correspond à $T = 0$; dans ce cas, nous avons:

$$4R^2 - 8R + 4 = 4(R - 1)^2 > 0, \forall R \neq 1; \quad (5.52)$$

pour $R = 1$, $c_1 \rightarrow \infty$, $\alpha = 2w_o$ et la réponse de (5.43) est la solution constante optimale stationnaire x^* . Alors, $x^*(t) \in \Omega$, $\forall t \in [0, T]$. Nous notons que la commande (5.41) avec le terme positive $\frac{|y_d|}{cx}$ et $c_1 = c_1(T)$ donné par (5.19) est la loi de commande (5.18). Comme cette loi de commande:

- transfère l'état de $x(0)$ à $x(T)$,
- est continue,
- donne une solution $J^*(t, x)$ différentiable $\forall t \in [0, T]$ et $\forall x(t) \in \Omega$ de l'équation (5.23) d'Hamilton-Jacobi,
- cette solution $J^*(t, x)$, satisfait la condition frontière: $J^*(T, x(T)) = 0$;

alors, d'après le Théorème 5.1, la loi de commande (5.18) est optimale au sens du problème 5.2. ■

5.3.2 Solution à l'horizon T infini

Corollaire 5.1 *La loi de commande:*

$$u_1^*(x) = \frac{|y_d|}{cx} + \frac{1}{b}(a - w_o)x \quad (5.53)$$

minimise la fonction du coût (5.17) au sens du problème 5.3. □

Démonstration : Il s'agit du cas particulière de la commande (5.18), à l'horizon T infini:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} u_1^*(t, T, x) = \frac{|y_d|}{cx} + \frac{1}{b}(a - w_o)x; \quad (5.54)$$

notons que ceci correspond à utiliser la solution stationnaire de l'équation de riccati (5.31). ■

En substituant la commande optimale (5.53) dans la dynamique du flux (5.16), nous obtenons:

$$\dot{x}^* = \frac{b|y_d|}{cx^*} - w_o x^*, \quad x^*(0) = x(0) \quad (5.55)$$

Cette équation peut être résolue de la même façon que dans la section antérieure; sa solution est:

$$x^*(t) = \sqrt{e^{-2w_o t} x(0)^2 + \frac{b|y_d|}{cw_o} (1 - e^{-2w_o t})}, \quad (5.56)$$

ce qui correspond en effet, à la trajectoire (4.47) obtenue en intégrant l'équation d'Euler.

5.3.3 Solution OPEC

Dans cette section, nous considérons des trajectoires de couple désiré variables dans le temps et méconnues à l'avance; les lois de commande, sont donc restreintes à utiliser seulement l'information présente et passée du couple. Nous considérons la loi de commande (5.53) avec des trajectoires du couple désiré variables dans le temps:

$$\hat{u}_1^*(x(t), y_d(t)) = \frac{|y_d(t)|}{cx(t)} + \frac{1}{b}(a - w_o)x(t) \quad (5.57)$$

o le couple désirée $y_d(t)$ est au moins deux fois différentiable et telle que:

$$\begin{aligned} 0 < |y_d(t)| < \infty \quad \forall t \in [0, \infty], \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y_d(t) &= y_\infty. \end{aligned}$$

En substituant la commande (5.57) dans la dynamique du flux (5.16), nous obtenons la dynamique du flux en boucle fermée suivante:

$$\dot{\hat{x}} = \frac{b|y_d(t)|}{c\hat{x}} - w_o\hat{x}, \quad \hat{x}(0) = x(0). \quad (5.58)$$

cette équation devient linéaire en $s = (\hat{x})^2$, $s > 0$:

$$\dot{s}(t) = \frac{2b}{c}|y_d(t)| - 2w_0s(t), \quad s(0) = x^2(0). \quad (5.59)$$

ce qui est un système linéaire stable de premier ordre avec entrée bornée et strictement positive et solution $\hat{x}(t)$ stable, bien définie, positive et bornée. Nous disons donc que la loi de commande (5.57) est **stabilisante** pour la dynamique du flux (5.16).

Maintenant, nous nous intéressons pour la fonction du coût \hat{J}_∞ qui est minimisée par la loi de commande (5.57) et sa relation avec le coût normalisé (5.15) à l'horizon T infini:

$$J_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ ru_1^2 + \frac{ry_d^2(t)}{c^2x^2} + qx^2 \right\} dt \right\} \quad (5.60)$$

Pour obtenir la fonction du coût \hat{J}_∞ , nous devons résoudre le problème suivant de commande optimale inverse:

Problème 5.4 *Etant donné la loi de commande (5.57) pour la dynamique du flux (5.16), trouver la fonction du coût:*

$$\hat{J}_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \{ ru_1^2 + L_i(\tau, x) \} dt \right\} \quad (5.61)$$

minimisée par \hat{u}_1^* .

◁

Le Théorème suivant présente la fonction du coût cherchée.

Théorème 5.3 *La loi de commande (5.57) minimise la fonction du coût (5.61) au sens du problème 5.4, avec:*

$$L_i(t, x) = \frac{ry_d(t)^2}{c^2x^2} + qx^2 + \frac{2r}{cb} \text{sign}(y_d(t))\dot{y}_d(t) \ln(x). \quad (5.62)$$

□

Démonstration : L'Hamiltonian est:

$$H(t, x, u_1, \frac{\partial \hat{J}^*}{\partial x}(t, x)) = \frac{1}{T} (ru_1^2 + L_i(t, x)) + \frac{\partial \hat{J}^*}{\partial x}(t, x)(-ax + bu_1) \quad (5.63)$$

De la condition de stationnarité, la commande optimal \hat{u}_1^* est:

$$\hat{u}_1^*(t, x) = -\frac{Tb}{2r} \frac{\partial \hat{J}^*}{\partial x}(t, x), \quad (5.64)$$

donc,

$$\frac{\partial \hat{J}^*}{\partial x}(t, x) = -\frac{2r|y_d(t)|}{Tbcx} - \frac{2r}{Tb^2}(a - w_o)x \quad (5.65)$$

En intégrant par rapport à x :

$$\hat{J}^*(t, x) = k_1(t) - \frac{2r}{Tbc}|y_d(t)| \ln x - \frac{r}{Tb^2}(a - w_o)x^2 \quad (5.66)$$

o $k_1(t)$ est la solution de:

$$\dot{k}_1(t) = -\frac{2rw_o}{bc}|y_d(t)|$$

cette équation correspond l'équation (5.30) en utilisant la solution stationnaire de k_2 (5.35) et $k_0 = \frac{r|y_d(t)|}{bcT}$.

De (5.66) nous calculons:

$$\frac{\partial \hat{J}^*}{\partial t}(t, x) = \dot{k}_1(t) - \frac{2r}{Tbc}\dot{y}_d(t)\text{sign}(y_d(t)) \ln(x) \quad (5.67)$$

l'équation d'Hamilton-Jacobi est dans ce cas:

$$\frac{\partial \hat{J}^*}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{T} (r\hat{u}_1^* + L_i(t, x)) + \frac{\partial \hat{J}^*}{\partial x}(t, x)(-ax + b\hat{u}_1^*) = 0 \quad (5.68)$$

en substituant (5.57), (5.65) et (5.67) dans (5.68), nous obtenons l'équation (5.62) qui défine $L_i(t, x)$. ■

L'intérêt du problème 5.4 est que sa solution est une solution **sous-optimale** du problème 5.3; le Corollaire suivant présente le critère de sous-optimalité.

Corollaire 5.2 *La loi de commande (5.57) est sous-optimale par rapport au problème 5.3 au sens:*

$$J_{\infty}^* \leq |\hat{J}_{\infty}^*| + |J_p| \quad (5.69)$$

o

$$J_p = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2r \operatorname{sign}(y_d(t))}{bcT} \int_0^T \dot{y}_d(\tau) \ln(\hat{x}^*(\tau)) d\tau \right\}$$

□

Démonstration : En utilisant la commande (5.57), le coût (5.61) est:

$$\hat{J}_{\infty}^* = J_{\infty} + J_p$$

alors, J_{∞} peut être bornée par:

$$\begin{aligned} J_{\infty} &= \hat{J}_{\infty}^* - J_p \\ J_{\infty} &< |\hat{J}_{\infty}^*| + |J_p|. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Lorsque le couple désiré est constante, les égalités suivantes sont valides:

$$\begin{aligned} J_p &= 0 \\ u_1^*(\cdot) &= \hat{u}_1^*(\cdot) \\ J_{\infty}^* &= \hat{J}_{\infty}^* \end{aligned}$$

alors, de (5.70) nous obtenons:

$$J_{\infty}^* \leq |\hat{J}_{\infty}^*| + |J_p|$$

■

Le critère de sous-optimalité (5.69) nous indique que la loi de commande \hat{u}_1^* , **minimise une limite supérieure de J_{∞}^*** (la fonction du coût énergétique normalisée optimal à l'horizon T infini); cette limite supérieure descend jusqu'au J_{∞}^* , au fur et à mesure que le taux de variation du couple désiré diminue jusqu'à zéro.

5.3.4 Mise en oeuvre de la solution OPEC

Comme le flux n'est pas mesurable, nous devons donc utiliser un observateur du flux pour implanter la loi de commande (5.57); bien sur, l'erreur d'observation affectera l'optimalité et la stabilité de la commande; une autre manière d'implanter cette stratégie, est d'obtenir l'évolution d'état $\hat{x}^*(t)$ et l'utiliser comme la référence $x_d(t)$ d'une commande de poursuite du flux qui la

rend invariante. Si la commande de poursuite du flux assure que $\hat{x}^*(t) \approx x_d(t)$, alors la référence $x_d(t)$ est la solution de:

$$\dot{x}_d(t) = \frac{b|y_d(t)|}{cx_d(t)} - w_o x_d(t), \quad x_d(0) = x(0) \quad (5.71)$$

nous notons que cette équation devient linéaire en $s = (x_d)^2$, $s > 0$:

$$\dot{s}(t) = \frac{2b|y_d(t)|}{c} - 2w_o s(t), \quad s(0) = x^2(0). \quad (5.72)$$

Donc, le filtre linéaire (5.72) donne les références $x_d(t)^2$ qui imposent via la commande de poursuite du flux, les trajectoires d'état $\hat{x}^*(t)$ qui minimisent la fonction du coût \hat{J}_∞ et qui sont **sous-optimaux** par rapport au coût J_n à l'horizon infini (J_∞). Lorsque y_d est constante, les trajectoires $\hat{x}^*(t)$ devient **optimales** par rapport à J_∞ . Dans ce dernière cas, le filtre (5.72) permet de calculer la référence optimale $x_d(t)$ qui tend asymptotiquement à la solution optimale stationnaire x^* , à partir de n'importe quelle condition initiale $x(0)$.

Remarque 5.1 *La distance entre J_∞^* et \hat{J}_∞^* est le coût J_p ; cette distance est mesurable pour des couples désirés $y_d(t)$ donnés. Ceci nous permet de tester si la stratégie sous-optimale (5.72) est envisageable au non, pour une application spécifique.*

Remarque 5.2 *D'après la remarque 3.7, en considérant les pertes fer, le facteur de pondération q est variante dans le temps car il dépende de la vitesse. En ce cas, les lois de commande développées auparavant via l'équation d'Hamilton-Jacobi, restent valides en considérant l'équation de riccati (5.31) dépendante du temps (avec $q(t) = q(\omega(t))$); on pourrait chercher des solutions analytiques de cette équation, pour des trajectoires spécifiques de la vitesse, mais en général, pour des trajectoires de vitesse arbitraires, la solution devient numérique. Une autre option serait de considérer la vitesse comme lentement variante dans le temps (si sa bande passante est beaucoup plus petite que $2w_o$), et d'utiliser les résultats antérieurs avec q fonction de la vitesse.*

5.3.5 évaluation en Simulation

Dans le chapitre précédent nous avons présenté quelques comparaisons entre les solutions numérique, optimale, flux constant, approchée et OPEC. Dans cette section nous présentons d'autres résultats de simulation qui évaluent les performances énergétiques des solutions approchée et OPEC, par rapport au fonctionnement à flux constant. La comparaison du rendement, se fera en termes des énergies totales (3.15) consommées dans un intervalle de temps donné. Nous représentons les trajectoires de la manière suivante:

- Approchée: points
- OPEC: trait continu —
- Flux constant: trait discontinu - - -

Echelon filtré du couple

Pour tester les différentes approches vis-à-vis des variations rapides (sauts) du couple, nous avons utilisé comme référence du couple, la réponse échelon d'un filtre Butterworth de deuxième ordre avec une fréquence de coupure de 200 Hz (Figure 5.1); l'amplitude du couple correspond à 20% du couple nominal; les données utilisées ont été celles de la machine du LAG (7.5 kw). La Figure 5.2 montre les différentes réponses du flux; toutes les trajectoires démarrent de $0.1x_n$. Pour la stratégie 'Flux constante', nous avons utilisé une commande constante: $u_1 = i_d = \frac{a}{b}x_n$. La Figure 5.3 montre l'évolution temporelle de l'énergie pour les différentes stratégies. Nous nous apercevons que la solution approchée réduit la consommation d'énergie de la stratégie i_d constante en 8.7%, tandis que la solution OPEC la réduit en 23%.

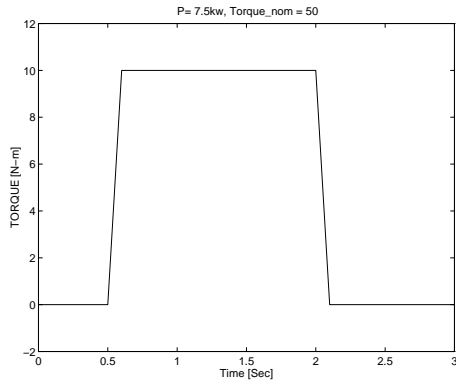


Figure 5.1: Trajectoire échelon filtré du couple désiré $y_d(t)$.

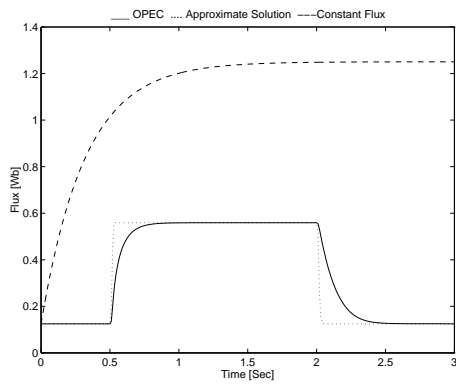


Figure 5.2: Trajectoires du flux des stratégies OPEC, solution approchée et commande i_d constante.

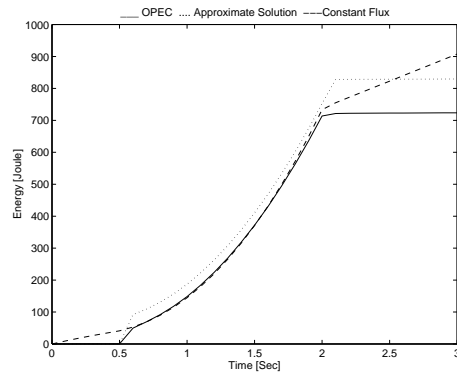


Figure 5.3: Energie consommée par le moteur, pour le couple échelon filtré, en utilisant les stratégies OPEC, solution approchée et commande i_d constante.

Cycle urbain EUROPE

L'objectif de ce cas d'étude est d'évaluer les différentes stratégies de commande pour une application embarquée: le véhicule électrique. Pour sa robustesse, simplicité et bas coût, le moteur asynchrone est un candidat bien placé pour être utilisé dans ce genre d'application.

Nous avons considéré le cycle de base urbain EUROPE [7] montré dans la Figure 5.4. Nous avons utilisé les données d'une machine de $37Kw$ [80], avec une inertie équivalente de $m = 0.41Kg - m^2$ et un coefficient de frottement nul; nous avons supposé que la vitesse de $50km/h$ correspond à 20% de la vitesse nominale. Nous avons utilisé une fréquence de coupure de $200Hz$ pour la dynamique en boucle fermée de la vitesse; ceci donne la référence du couple de la figure 5.5.

Les différentes trajectoires du flux et la consommation d'énergie sont présentées dans les figures 5.6 et 5.7 respectivement. Pour ce cas, la consommation d'énergie du fonctionnement à flux constant se réduit en 12% en utilisant la stratégie approchée et en 24% avec la stratégie OPEC.

Bruit coloré du couple

Ce cas d'étude est motivé par le fait que la référence du couple peut avoir un comportement aléatoire avec des composantes de haute fréquence. Nous avons considéré comme référence du couple, un bruit blanc filtré par un filtre Buterworth de deuxième ordre avec les fréquences de coupure w_c de $10Hz$ et $200Hz$, voir Figures 5.8 et 5.11. L'incrément de w_c augmente l'énergie du signal du couple désiré; les paramètres utilisés pour la simulation ont été ceux de la machine du LAG, ($7.5Kw$). Nous remarquons que pour $w_c = 200$, le couple désiré varie entre $[-66, 52]N - m$ et dépasse donc le couple nominal. Les Figures 5.9 et 5.10 montrent les différentes trajectoires du flux et les énergies consommées en utilisant les stratégies OPEC, approchée et flux constant, pour $w_c = 10$; c'est la stratégie OPEC à nouveau la plus performante en termes énergétiques. Les Figures 5.12 et 5.13 montrent les réponses OPEC et flux constant en utilisant la fréquence de coupure $w_c = 200Hz$. La consommation d'énergie à flux constant est inférieure à celle d'OPEC pendant les premières 15 secondes, après, c'est OPEC qui devient plus performante. Cela met en évidence le fait que, la limite supérieure (5.69) n'est pas nécessairement inférieure au coût J_n du fonctionnement à flux constant. Nous ne présentons pas les réponses de la solution approchée pour faciliter la comparaison: OPEC vs. Flux constant; comme la solution approchée est beaucoup plus sensible aux composantes de haut fréquence du couple désiré, elle devient très coûteuse en termes énergétiques; en effet, l'énergie consommée par la solution approchée en $t = 80$ est $3 \times 10^6 Joules!$.

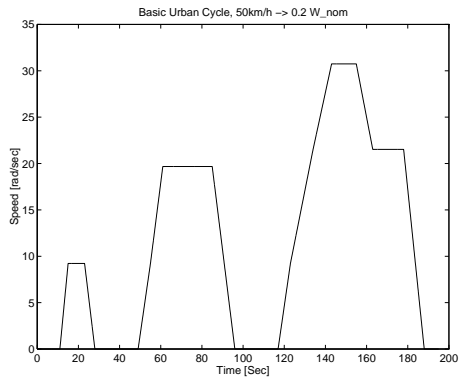


Figure 5.4: Trajectoire de vitesse pour le cycle urbain EUROPE.

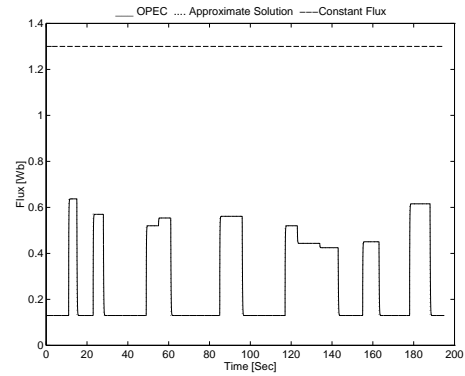


Figure 5.6: Trajectoires du flux pour le cycle urbain EUROPE.

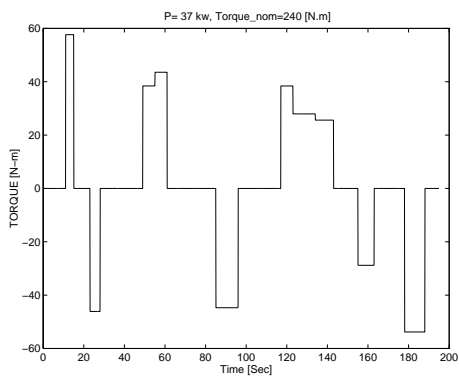


Figure 5.5: Trajectoire du couple pour le cycle urbain EUROPE.

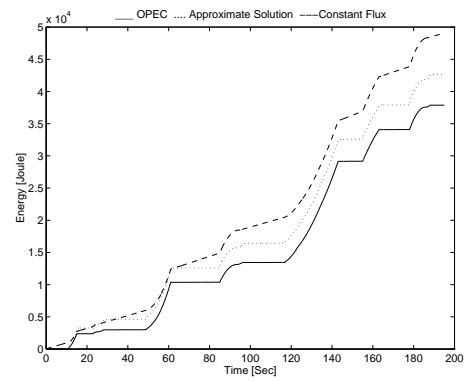


Figure 5.7: Energies consommées par le moteur, pour le cycle urbain EUROPE.

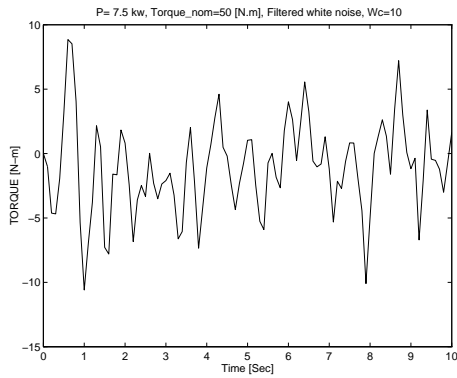


Figure 5.8: Bruit coloré du couple désiré, $w_c = 10$.

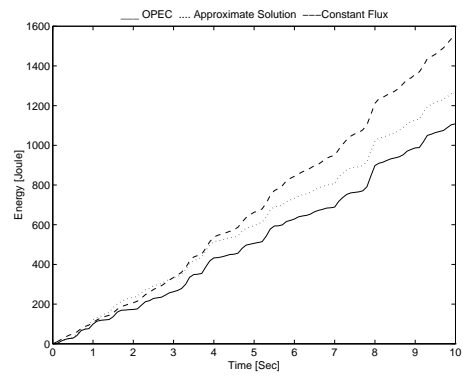


Figure 5.10: Energie consommée, stratégies OPEC, approchée et flux constant.

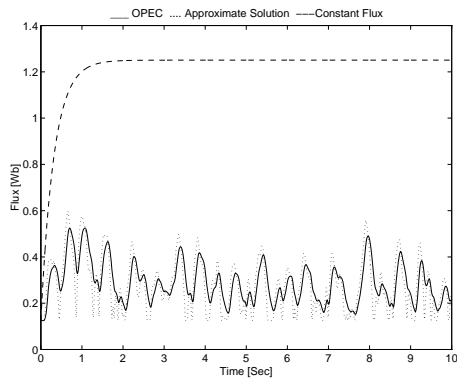


Figure 5.9: Trajectoires du flux pour les stratégies OPEC, approchée et flux constant.

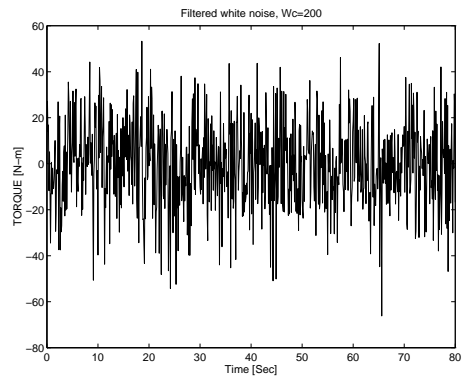


Figure 5.11: Bruit coloré du couple désiré, $w_c = 200$.

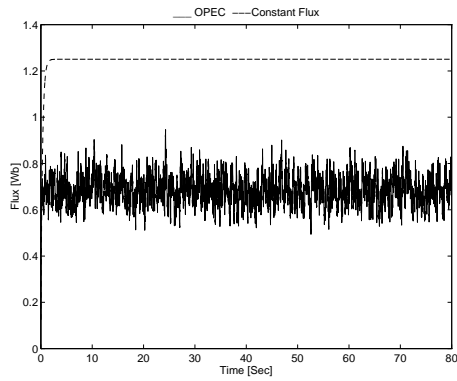


Figure 5.12: Trajectoires du flux des stratégies OPEC et flux constant.

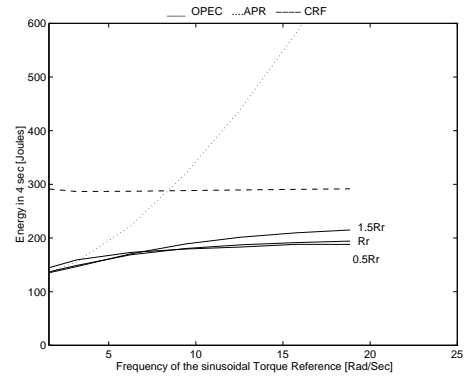


Figure 5.14: Energie consommée en 4sec. vs. la fréquence du couple désiré sinusoïdal, pour les stratégies approchée, flux constant et OPEC avec $0.5R_r$, R_r , et $1.5R_r$.

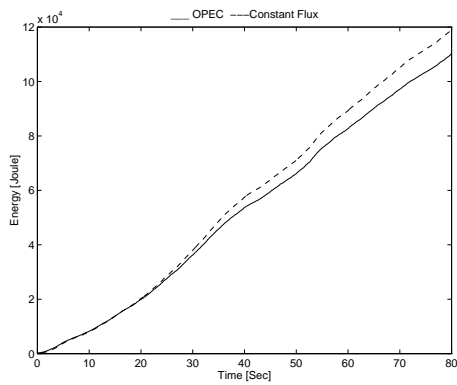


Figure 5.13: Energie consommée, stratégies OPEC, et flux constant.

Robustesse par rapport à R_r

La stratégie OPEC (5.72) peut s'écrire:

$$\frac{v}{2R_r} \dot{s}(t) = |y_d(t)| - \frac{1}{\beta^2} s(t), \quad s(0) = x^2(0) \quad (5.73)$$

pour les régimes dynamiques ($\dot{s} \neq 0$), elle dépend donc de la résistance rotorique (β et np sont bien définis), laquelle change pendant le fonctionnement du moteur. Nous avons analysé l'impact sur l'optimalité de la stratégie OPEC, d'une mauvaise estimation de la résistance rotorique nominale R_r . Nous avons utilisé les données de la machine du LAG et la référence du couple sinusoïdal $y_d = 5 \sin(w_s t)$ pour différentes fréquences w_s , multiples de $\pi/2$. La figure 5.14 montre l'énergie consommée en 4 secondes vs. la fréquence w_s pour les différentes stratégies, en utilisant les résistances: $0.5R_r$, R_r , et $1.5R_r$ pour OPEC. Nous observons pour la stratégie OPEC, que la variation maximal de consommation d'énergie par rapport à la consommation en utilisant la résistance nominal R_r , est de seulement 7% dans tout la plage fréquentielle testée.

5.4 Régulation H_2 et H_∞

Dans cette section nous présentons le travail fait en collaboration avec D. Georges [30] sur la commande optimale H_2 et H_∞ . En utilisant la solution stationnaire obtenue dans la section 4.2 nous allons proposer deux lois de commande optimales au sens H_2 et H_∞ et qui assurent l'objectif de régulation du couple. Pour le problème de commande optimale H_2 , la commande minimise une fonction de coût qui reflète les énergies des erreurs de la norme du flux et des courants pendant la régulation autour de la solution optimal stationnaire, sur un horizon infini.

Le problème H_∞ amène aussi à une loi de commande optimale en boucle fermée, laquelle assure la stabilité interne et atténue les effets des perturbations additives dans le critère H_2 sur un horizon fini. En ce cas, la norme H_∞ optimale et sa pire perturbation associée, sont obtenues explicitement.

D'abord nous allons considérer le cas nominal, en supposant que la norme du flux est mesurable; à la fin nous considérons un estimateur du flux qui préserve la stabilité asymptotique de tout le système en boucle fermé.

5.4.1 Commande nonlinéaire H_2

Ici nous traitons le problème de la régulation H_2 autour du point stationnaire optimal de fonctionnement de la machine. Le point de fonctionnement stationnaire optimal: U^*, x^* a été obtenu analytiquement au chapitre 4 en résolvant le problème 3.4 pour y_d constante et $x(0) = x(T)$. Nous cherchons une commande qui stabilise x et U autour de x^* et U^* pour n'importe quelle condition initiale $x(0)$, avec l'état final libre et en minimisant une fonction du coût qui prend en compte l'énergie nécessaire pour atteindre le point de fonctionnement stationnaire optimal.

En supposant l'état x mesurable et en définissant $\tilde{x} = x - x^*$ et $\tilde{U} = U - U^*$, nous posons le problème de la régulation optimale H_2 :

Problème 5.5 Trouver la commande optimale stabilisante $\tilde{U}^* = [\tilde{u}_1^*, \tilde{u}_2^*]^T \forall t \in [0, T]$, qui minimise:

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_0^T \{ p\tilde{x}^2 + \tilde{U}^T S \tilde{U} \} dt \quad (5.74)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T L_2(y_d, \tilde{x}, \tilde{U}) dt \quad (5.75)$$

$p > 0$, $S = \text{diag}\{s_1, s_2\} > 0$; en respectant les restrictions d'erreur et du couple:

$$\dot{\tilde{x}} = -a\tilde{x} + b\tilde{u}_1, \quad (5.76)$$

$$y_d = y = c(\tilde{x} + x^*)(\tilde{u}_2 + u_2^*). \quad (5.77)$$

avec,

- a) y_d , constant et connu
- b) $T, \tilde{x}(0), x^*, U^*$, donnés.
- c) $\tilde{x}(T)$, libre

◁

De la même manière que pour le problème 3.4, nous pouvons simplifier ce problème, en substituant la restriction (5.77) dans la fonction du coût:

Problème 5.6 Trouver la commande optimale stabilisante $\tilde{u}_1^* \forall t \in [0, T]$, qui minimise:

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ p\tilde{x}^2(t) + s_1\tilde{u}_1^2(t) + s_2 \left(\frac{y_d}{c(\tilde{x}(t) + x^*)} - \frac{y_d}{cx^*} \right)^2 \right\} dt \quad (5.78)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T \{ m(\tilde{x}(t)) + s_1\tilde{u}_1^2(t) \} dt \quad (5.79)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T L_2(y_d, \tilde{x}, \tilde{u}_1) dt \quad (5.80)$$

$p > 0$, $S = \text{diag}\{s_1, s_2\} > 0$, $m(\tilde{x}(t)) = p\tilde{x}^2(t) + s_2 \frac{y_d^2 \tilde{x}^2(t)}{(c(\tilde{x}(t) + x^*)x^*)^2} \geq 0$; en respectant la restriction d'erreur:

$$\dot{\tilde{x}} = -a\tilde{x} + b\tilde{u}_1 \quad (5.81)$$

avec,

- a) y_d , constant et connu
- b) $T, \tilde{x}(0), x^*, u_1^*$, donnés.
- c) $\tilde{x}(T)$, libre

◁

Considérons la fonction:

$$V(t, \tilde{x}(t)) = \min_{\tilde{u}_1} \frac{1}{2} \int_t^T \{m(\tilde{x}(t)) + s_1 \tilde{u}_1^2(t)\} dt \quad (5.82)$$

alors, l'équation d'Hamilton-Jacobi associée à ce problème est donné par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t}(t, \tilde{x}) + H(t, \tilde{x}, \tilde{u}_1^*, \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}}(t, \tilde{x})) &= \frac{\partial V}{\partial t}(t, \tilde{x}) + \min_{\tilde{u}_1} H(t, \tilde{x}, \tilde{u}_1, \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}}(t, \tilde{x})) = 0, \\ V(0, 0) &= 0, \quad V(T, \tilde{x}(T)) = 0 \end{aligned} \quad (5.83)$$

o:

$$H(t, \tilde{x}, \tilde{u}_1, \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x})) = \frac{1}{2}(m(\tilde{x}(t)) + s_1 \tilde{u}_1^2) + \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}}(t, \tilde{x})(-a\tilde{x} + b\tilde{u}_1) \quad (5.84)$$

est l'Hamiltonien du problème. La commande optimale \tilde{u}_1^* est donnée par la condition de stationnarité, $\frac{\partial H}{\partial \tilde{u}_1} = 0$:

$$\tilde{u}_1^* = -\frac{b}{s_1} \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}}(t, \tilde{x}). \quad (5.85)$$

Malheureusement, nous n'avons pas une solution analytique pour (5.83); par contre, pour l'horizon T infini, il est possible d'obtenir une solution explicite.

Nous considérons la fonction:

$$V_\infty(\tilde{x}(t)) = \min_{\tilde{u}_1} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \{m(\tilde{x}) + s_1 \tilde{u}_1^2(t)\} dt. \quad (5.86)$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi associée au problème à l'horizon infini est:

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}_1^*, V'_\infty(\tilde{x})) = \min_{\tilde{u}_1} H(\tilde{x}, \tilde{u}_1, V'_\infty(\tilde{x})) = 0, \quad V_\infty(0) = 0 \quad (5.87)$$

o:

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}_1, V'_\infty(\tilde{x})) = \frac{1}{2}(m(\tilde{x}(t)) + s_1 \tilde{u}_1^2) + V'_\infty(\tilde{x})(-a\tilde{x} + b\tilde{u}_1) \quad (5.88)$$

est l'Hamiltonien et $V'_\infty(\tilde{x}) = \frac{\partial V_\infty}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x})$. La commande optimale est:

$$\tilde{u}_1^* = -\frac{b}{s_1} V'_\infty(\tilde{x}). \quad (5.89)$$

Cette équation substituée en (5.87) permet d'écrire l'équation d'Hamilton-Jacobi en termes de $V'_\infty(\tilde{x})$:

$$-\frac{b^2}{2s_1} V'_\infty(\tilde{x})^2 - a\tilde{x}V'_\infty(\tilde{x}) + \frac{1}{2}m(\tilde{x}) = 0, \quad V_\infty(0) = 0. \quad (5.90)$$

Le Lemme suivant nous donne deux solutions explicites de cette équation:

Lemme 5.1 *L'équation (5.90) admet deux solutions lisses V'_1 et V'_2 , données par:*

$$V'_1(\tilde{x}(t)) = \frac{-a\tilde{x}(t) + \tilde{x}(t)\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{s_1}(p + s_2 \frac{y_d^2}{(c(\tilde{x}(t)+x^*)x^*)^2})}}{b^2/s_1} \quad (5.91)$$

$$V'_2(\tilde{x}(t)) = \frac{-a\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t)\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{s_1}(p + s_2 \frac{y_d^2}{(c(\tilde{x}(t)+x^*)x^*)^2})}}{b^2/s_1} \quad (5.92)$$

Cependant, seulement V'_1 donne une solution admissible V_1 , au sens que V_1 est une fonction définie positive qui satisfait $V_1(0) = 0$, alors que V_2 (qui a comme dérivé V'_2) n'est pas une fonction semi-définie positive.

Démonstration : Immédiat du fait que $H^* = \min_{\tilde{u}_1} H = 0$, est une équation polynôme de deuxième degré qui peut être résolue analytiquement pour V'_∞ . V'_1 est bien définie dans le domaine Ω : pour tout $\tilde{x} \in (-x^*, 0)$, $V'_1(\tilde{x}) < 0$. Pour $\tilde{x} = 0$, $V'_1(\tilde{x}) = 0$. Pour tout $\tilde{x} \in (0, +\infty)$, $V'_1(\tilde{x}) > 0$. Ceci signifie que V_1 a un seul minimum dans Ω en $\tilde{x} = 0$. D'après (5.86) et la commande (5.89), nous avons que V_1 est une fonction semi-définie positive et que satisfait $V_1(0) = 0$. Alors, V_1 est une fonction définie positive bien définie en Ω . D'autre part, pour tout $\tilde{x} \in (-x^*, 0)$, $V'_2(\tilde{x}) > 0$. Pour $\tilde{x} = 0$, $V'_2(\tilde{x}) = 0$. Pour tout $\tilde{x} \in (0, +\infty)$, $V'_2(\tilde{x}) < 0$ ce qui signifie que V_2 n'est pas (au moins) semi-définie positive. ■

V_1 est une fonction de Lyapunov pour notre problème de régulation optimal, comme il est montré par le Théorème suivant:

Théorème 5.4 *La fonction V_1 , dont la dérivée est donnée par (5.91), est une fonction de Lyapunov pour la dynamique d'erreur en boucle fermée associée à la commande optimale $\tilde{u}_1^* = -\frac{b}{s_1} V'_1(\tilde{x})$. En conséquence, la dynamique en boucle fermée de la norme du flux est asymptotiquement stable autour de x^* dans Ω . □*

Démonstration : Nous avons montré dans la preuve précédente que $V_1(\tilde{x}) > 0, \forall \tilde{x} \neq 0$ et que $V_1(0) = 0$. La dérivé par rapport au temps de V_1 le long de la trajectoire de la dynamique d'erreur en boucle fermée, est donnée par:

$$\dot{V}_1 = V_1'(\tilde{x}) \cdot (-a\tilde{x} + b\tilde{u}_1^*) \quad (5.93)$$

$$= -\frac{1}{2} (m(\tilde{x}) + s_1(\tilde{u}_1^*)^2) \quad (5.94)$$

$$< 0, \forall \tilde{x} \neq 0, \quad (5.95)$$

o la deuxième équation est obtenue de (5.83), et la dernière inégalité s'obtient à partir des propriétés de $m(\tilde{x})$ et de la structure de \tilde{u}_1^* . Alors, nous pouvons conclure que la dynamique de la norme du flux est asymptotiquement stable autour de x^* . ■

Si le flux est mesurable, la loi de commande optimale ($U^*(t) = U^* + \tilde{U}^*$) est:

$$u_1^*(t) = u_1^* - \frac{b}{s_1} V_1'(\tilde{x}) \quad (5.96)$$

$$= u_1^* - \frac{1}{b} \left(-a\tilde{x}(t) + \tilde{x}(t) \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{s_1} \left(p + s_2 \frac{y_d^2}{(c(\tilde{x}(t) + x^*)x^*)^2} \right)} \right) \quad (5.97)$$

$$u_2^*(t) = \frac{y_d}{cx(t)}. \quad (5.98)$$

Remarque 5.3 *Il faut distinguer entre le caractère de la solution optimale du Corollaire 5.1 et celui du Théorème 5.4. La commande (5.97) minimise le critère J_2 qui pénalise les écarts de U et x par rapport à U^* et x^* et non l'énergie réel du moteur comme ce le cas pour (5.53).*

5.4.2 Commande nonlinéaire H_∞

L'équation dynamique du flux (5.81) est soumise aux incertitudes paramétriques (variation des résistances et des inductances) et aux erreurs $\mathcal{O}(\epsilon)$ des dynamiques négligées (voir eq. (2.42), section 2.6). Ces erreurs peuvent être modélisées en utilisant une perturbation à énergie bornée $d(t)$ de la façon suivante:

$$\dot{\tilde{x}} = -a\tilde{x} + b\tilde{u}_1 + d(t). \quad (5.99)$$

A partir de cette représentation nous pouvons poser le problème d'atténuation des perturbations avec stabilité interne de la dynamique du flux autour du point optimal x^* ; ce problème est appelé dans la littérature, 'le problème de la commande H_∞ avec atténuation de perturbation' [21],[33]:

Problème 5.7 *Etant donnés: $T, \tilde{x}(0), x^*, u_1^*, y_d, \gamma > 0$ et la perturbation continue par morceaux $d : [0, T] \rightarrow R$; trouver la commande optimale $\tilde{u}_1^* \forall t \in [0, T]$, tel que:*

- **Condition d'atténuation:** La trajectoire en boucle fermée de la dynamique d'erreur (5.99) avec $\tilde{x}(0) = 0$, satisfait:

$$\frac{1}{2} \int_0^T z^2(t) dt \leq \frac{1}{2} \gamma^2 \int_0^T d^2(t) dt \quad (5.100)$$

où $z^2(t) = m(\tilde{x}(t))\tilde{x}^2(t) + s_1 \tilde{u}_1^2(t) = L_2(y_d, \tilde{x}, \tilde{u}_1)$ est la fonction de coût du critère H_2 ;

- **Stabilité interne:** Pour $d(t) = 0$, l'origine du système en boucle fermée est stable.

◁

Nous supposons aussi que le flux est mesurable. L'objectif de la commande est d'obtenir une dynamique de la norme du flux en boucle fermée stable en atténuant l'effet de la perturbation $d(t)$, cela via la fonction de pénalité (5.100). Nous notons que la contrainte du couple $y = y_d$ est prise en compte par cette fonction de pénalité.

Remarque 5.4 Si nous considérons une perturbation périodique $d(t)$ de période T , pour laquelle il est possible de définir une réponse en régime stationnaire z_s du système en boucle fermé [34], alors la condition d'atténuation (5.100) peut s'écrire: $\|z_s\|_T \leq \gamma \|d\|_T$ ou $\|\cdot\|_T^2 = \int_0^T \|\cdot\|^2 dt$. Soit $\|T_{zd}\|_\infty = \sup_{d(\cdot)} \frac{\|z_s\|_T}{\|d\|_T}$, alors $\|T_{zd}\|_\infty \leq \gamma$; $\|T_{zd}\|_\infty$ représente le gain H_∞ du système non-linéaire, lequel est similaire à la norme H_∞ d'un système linéaire dans le domaine fréquentielle [21].

Ce problème est très lié avec la théorie des jeux dynamiques à deux joueurs et somme nulle [11]; un jeu dynamique est un problème de commande optimale dans lequel plusieurs agents, ou joueurs, agissent sur le même système dynamique, chacun cherchant à minimiser son propre critère. L'expression 'jeu à somme nulle' signifie que les critères des deux joueurs sont l'opposé l'un de l'autre. Dans le cadre de cette théorie, la commande \tilde{u}_1 a le rôle de 'joueur minimisant': il essaie de rendre le coût non-positif pour toute valeur de d ; la perturbation d est le joueur qui veut maximiser le coût.

Dans [33], il a été donné une condition suffisante pour l'existence d'une commande optimale \tilde{u}_1^* qui satisfait la condition d'atténuation (5.100); cette condition s'appuie sur l'existence d'une fonction $V(\tilde{x}) \in C^1$, solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Isaacs:

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}_1^*, d^*, V'(\tilde{x})) = \min_{\tilde{u}_1} \max_d H(\tilde{x}, \tilde{u}_1, d, V'(\tilde{x})) = 0, \quad V(0) = 0, \quad (5.101)$$

o l'Hamiltonien associé à ce problème est:

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}_1, d, V'(\tilde{x})) = \frac{1}{2} (m(\tilde{x}) + s_1 \tilde{u}_1^2 - \gamma^2 d^2) + V'(\tilde{x})(-a\tilde{x} + b\tilde{u}_1 + d) \quad (5.102)$$

$V'(\cdot)$ et $m(\tilde{x})$ sont définies comme auparavant. La commande minimisante \tilde{u}_1^* est donnée par la condition de stationnarité $\frac{\partial H}{\partial \tilde{u}_1} = 0$:

$$\tilde{u}_1^* = -\frac{b}{s_1} V'(\tilde{x}), \quad (5.103)$$

tandis que la perturbation maximisante d^* est obtenue à partir de la condition de stationnarité, $\frac{\partial H}{\partial d} = 0$:

$$d^* = \frac{1}{\gamma^2} V'(\tilde{x}); \quad (5.104)$$

d^* est connue dans la littérature comme la pire perturbation.

Le Théorème suivant présente **deux solution explicites** de l'équation d'Isaacs (5.101) et donne la seule solution qui satisfait la condition d'atténuation (5.100).

Théorème 5.5 *Si $\gamma > \frac{\sqrt{s_1}}{b}$, alors l'équation (5.101) admet deux solutions lises V_1 et V_2 , qui ont les dérivés partielles:*

$$V_1'(\tilde{x}(t)) = \left\{ \frac{-a\tilde{x}(t) + \tilde{x}(t) \sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{s_1} - \frac{1}{\gamma^2}\right) \left(p + s_2 \frac{y_d^2}{(c(\tilde{x}(t) + x^*)x^*)^2}\right)}}{\left(\frac{b^2}{s_1} - \frac{1}{\gamma^2}\right)} \right\} \quad (5.105)$$

$$V_2'(\tilde{x}(t)) = \left\{ \frac{-a\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t) \sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{s_1} - \frac{1}{\gamma^2}\right) \left(p + s_2 \frac{y_d^2}{(c(\tilde{x}(t) + x^*)x^*)^2}\right)}}{\left(\frac{b^2}{s_1} - \frac{1}{\gamma^2}\right)} \right\} \quad (5.106)$$

De plus, la fonction V_1 , dont la dérivé est donnée par (5.105), satisfait la condition d'atténuation (5.100). \square

Démonstration : Les équations (5.103) et (5.104) dans (5.101) donnent une forme explicite pour l'équation d'Hamilton-Jacobi-Isaacs, en termes de V' :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{b^2}{s_1} \right) V'(\tilde{x})^2 - a\tilde{x}V'(\tilde{x}) + \frac{1}{2}m(\tilde{x}) = 0, \quad V(0) = 0 \quad (5.107)$$

V_1' et V_2' sont obtenues en calculant les racines de (5.107). Si $\gamma > \frac{\sqrt{s_1}}{b}$, V_1' et V_2' sont bien définies³ en Ω : Pour tout $\tilde{x} \in (-x^*, 0)$, $V_1'(\tilde{x}) < 0$. Pour $\tilde{x} = 0$, $V_1'(\tilde{x}) = 0$. Pour tout $\tilde{x} \in (0, +\infty)$, $V_1'(\tilde{x}) > 0$. Cela signifie que V_1 a un seul minimum dans le domaine Ω en $\tilde{x} = 0$. D'autre part, pour tout $\tilde{x} \in (-x^*, 0)$, $V_2'(\tilde{x}) > 0$. Pour $\tilde{x} = 0$, $V_2'(\tilde{x}) = 0$. Pour tout $\tilde{x} \in (0, +\infty)$, $V_2'(\tilde{x}) < 0$. Cela signifie que V_2 est (au moins) semi-définie positive.

$V_1(\tilde{x})$ est une limite supérieure de la fonction du coût (voir [33], p. 1005):

$$\frac{1}{2} \int_0^T \{m(\tilde{x}) + s_1(\tilde{u}_1^*(t))^2 - \gamma^2 d^*(t)^2\} dt;$$

donc, en considérant que $\gamma > \frac{\sqrt{s_1}}{b}$, nous avons:

$$V_1(\tilde{x}) \geq \frac{1}{2} \int_0^T \{m(\tilde{x}) + s_1(\tilde{u}_1^*(t))^2 - \gamma^2 d^*(t)^2\} dt \quad (5.108)$$

³si ce n'est pas le cas, V_1' et V_2' peuvent être des valeurs complexes

$$\geq \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ m(\tilde{x}) + \left(\frac{b^2}{s_1} - \frac{1}{\gamma^2} \right) (V_1'(\tilde{x}))^2 \right\} dt \quad (5.109)$$

$$\geq 0. \quad (5.110)$$

En intégrant V_1' (voir l'expression de V_1 dans [30]), il peut être facilement vérifié que $V_1(0) = 0$. De plus, nous avons que $H(\tilde{x}, \tilde{u}_1^*, d, V_1'(\tilde{x})) \leq 0$. Cela peut se vérifier, en évaluant l'Hamiltonien (5.102) dans \tilde{u}_1^* et $V_1'(\tilde{x})$:

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}_1^*, d, V_1'(\tilde{x})) = \frac{1}{2}(m(\tilde{x}) + s_1(\tilde{u}_1^*)^2 - \gamma^2 d^2) + V_1'(\tilde{x}) \cdot (-a\tilde{x} + b\tilde{u}_1^* + d) \quad (5.111)$$

$$= \frac{1}{2}m(\tilde{x}) - a\tilde{x}V_1'(\tilde{x}) - \frac{b^2}{2s_1}V_1'(\tilde{x})^2 + V_1'(\tilde{x})d - \frac{\gamma^2}{2}d^2 \quad (5.112)$$

$$= -\frac{1}{2\gamma^2}V_1'(\tilde{x})^2 + V_1'(\tilde{x})d - \frac{\gamma^2}{2}d^2 \quad (5.113)$$

$$= -\frac{1}{2\gamma^2}(V_1'(\tilde{x}) - \gamma^2 d)^2 \leq 0 \quad (5.114)$$

o nous avons utilisé (5.107) dans (5.112) pour obtenir (5.113).

En intégrant (5.111) de 0 à T nous avons:

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left\{ m(\tilde{x}(t)) + s_1(\tilde{u}_1^*(t))^2 - \gamma^2 d^2(t) \right\} dt + V_1(\tilde{x}(T)) - V_1(\tilde{x}(0)) \leq 0. \quad (5.115)$$

La condition d'atténuation est définie en supposant $\tilde{x}(0) = 0$; alors $V_1(\tilde{x}(0)) = V_1(0) = 0$. Du fait que V_1 est définie positive et de (5.115), nous avons:

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left\{ m(\tilde{x}(t)) + s_1(\tilde{u}_1^*(t))^2 - \gamma^2 d^2(t) \right\} dt + V_1(\tilde{x}(T)) \leq 0 \quad (5.116)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left\{ m(\tilde{x}(t)) + s_1(\tilde{u}_1^*(t))^2 - \gamma^2 d^2(t) \right\} dt \leq 0 \quad (5.117)$$

ce qui implique:

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left\{ m(\tilde{x}(t)) + s_1(\tilde{u}_1^*(t))^2 \right\} dt = \frac{1}{2} \int_0^T \{z(\tilde{x}, u_1^*)\} dt \leq \frac{\gamma^2}{2} \int_0^T \{d^2(t)\} dt, \quad (5.118)$$

alors, l'inégalité (5.100) est valide pour $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1^*$. ■

Le Théorème suivant présente une fonction de Lyapunov qui assure la stabilité de la dynamique du flux en boucle fermée.

Théorème 5.6 *La fonction V_1 , dont la dérivée est donnée par (5.105), est une fonction de Lyapunov pour la dynamique d'erreur en boucle fermée associée à la commande optimale $\tilde{u}_1^* = -\frac{b}{s_1}V_1'(\tilde{x})$. En conséquence, la dynamique en boucle fermée de la norme du flux est asymptotiquement stable autour de x^* , dans Ω , lorsque $d = 0$. \square*

Démonstration : D'après (5.108) nous avons que V_1 est une fonction définie positive et satisfait $V_1(0) = 0$. De (5.111) et (5.114) avec $d = 0$, nous pouvons exprimer la dérivé temporaire de V_1 évaluée le long de la dynamique en boucle fermée, comme:

$$\dot{V}_1 = V_1'(\tilde{x}) \cdot (-a\tilde{x} + b\tilde{u}_1^*) \quad (5.119)$$

$$\leq -\frac{1}{2} (m(\tilde{x}) + s_1(\tilde{u}_1^*)^2) \quad (5.120)$$

$$< 0, \forall \tilde{x} \neq 0. \quad (5.121)$$

Alors, nous pouvons conclure que la dynamique en boucle fermée de la norme du flux est asymptotiquement stable autour de x^* , dans Ω , lorsque $d = 0$. \blacksquare

Remarque 5.5 *L'équation (5.101) d'Hamilton-Jacobi-Isaacs, peut être vue comme une extension de l'équation (5.83) d'Hamilton-Jacobi; en effet, si $\gamma \rightarrow +\infty$, (5.101) devient (5.83). Alors, le problème 5.6 de régulation optimale H_2 peut être considéré comme le cas limite du problème 5.7 (H_∞), lorsque la norme $\|T_{zd}\|_\infty$ tend à $+\infty$.*

Finalement, la loi de commande à mettre en oeuvre est donné par:

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= u_1^* - \frac{b}{s_1}V_1'(\tilde{x}) \\ &= u_1^* - \frac{b}{s_1\left(\frac{b^2}{s_1} - \frac{1}{\gamma^2}\right)} \left(-a\tilde{x}(t) + \tilde{x}(t) \sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{s_1} - \frac{1}{\gamma^2}\right)(p + s_2 \frac{y_d^2}{(c(\tilde{x}(t) + x^*)x^*)^2})} \right) \end{aligned} \quad (5.122)$$

$$u_2^*(t) = \frac{y_d}{cx(t)} \quad (5.123)$$

5.4.3 Estimateur du flux

Pour relaxer l'hypothèse de mesure du flux, nous considérons l'estimateur de la norme du flux:

$$\dot{\hat{x}} = -a\hat{x} + bu_1, \quad 0 < \hat{x}(0) < x^*. \quad (5.124)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation est:

$$\dot{e} = -ae. \quad (5.125)$$

En ajoutant l'estimation \hat{x} à la commande (5.122) nous avons:

$$u_1^*(t) = u_1^* - \frac{b}{s_1(\frac{b^2}{s_1} - \frac{1}{\gamma^2})}(-a\bar{x} + \bar{x}f(\bar{x})), \quad (5.126)$$

o $\bar{x} = \tilde{x} - e = \hat{x} - x^*$, $\bar{x} \in \bar{\Omega} = \{\bar{x} \in R - \{-x^*\}\}$, $\gamma > \frac{\sqrt{s_1}}{b}$ et

$$f(\bar{x}) = \sqrt{a^2 + (\frac{b^2}{s_1} - \frac{1}{\gamma^2})(s_2 \frac{y_d^2}{(c(\bar{x} + x^*)x^*)^2} + p)} > a.$$

La dynamique en boucle fermée est:

$$\dot{\bar{x}} = -a\bar{x} - \frac{b^2}{s_1(\frac{b^2}{s_1} - \frac{1}{\gamma^2})}(-a\bar{x} + \bar{x}f(\bar{x})). \quad (5.127)$$

Soit $V = \frac{(\bar{x}^2 + e^2)}{2}$, la dérivé de V évaluée le long de (5.125) et (5.127) donne:

$$\dot{V} = -ae - \bar{x}^2[a + \frac{b^2}{s_1(\frac{b^2}{s_1} - \frac{1}{\gamma^2})}(f(\bar{x}) - a)] < 0, \forall \bar{x}, e \neq 0.$$

Alors, $\bar{x}(t) \rightarrow 0$, $e(t) \rightarrow 0$ ce qui implique que $\tilde{x}(t) \rightarrow 0$. Il faut noter que dû à l'initialisation de l'estimateur: $-x^* < \bar{x}(0) < 0$, les solutions (5.127) satisfont la contrainte: $\bar{x}(t) \leq 0$; cette contrainte dans (5.126) assure que $u_1^*(t) \geq 0$; donc, $x(t)$ et $\bar{x}(t)$ évoluent en Ω et $\bar{\Omega}$ respectivement et nous pouvons conclure que la dynamique en boucle fermée du système est asymptotiquement stable.

Bien sur, l'erreur d'estimation affecte l'optimalité des lois de commande nominales.

5.4.4 Résultats de Simulation

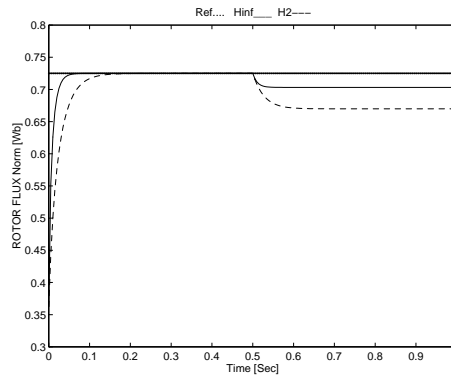
Dans cette section nous comparons les performances des lois de commande nominales H_2 et H_∞ . Nous avons utilisé les données du moteur du LAN de $1.5Kw$; les couple et flux nominaux sont $y_n = 10Nm$ et $x_n = 0.725Wb$ respectivement; les autres données sont présentées dans le Tableau 5.1.

Tableau 5.1: Paramètres du moteur du LAN.

R_r [ohms]	R_s [ohms]	L_r [H]	L_{sr} [H]	L_s [H]	a [1/sec]	b [H/sec]	c
2.61	4.287	0.368	0.368	0.404	7.09	2.61	2

Tableau 5.2: Paramètres des lois de commande.

s_1	s_2	p	γ
0.034	0.034	2.717	0.0706

**Figure 5.15:** Référence du flux et réponses pour les lois de commande H_2 et H_∞ .

L'objectif de la simulation est de comparer les performances en régulation et le rendement du moteur pour les commandes H_2 (équations (5.97), (5.98)) et H_∞ (équations (5.122), (5.123)). Les paramètres des lois de commande sont présentés dans le Tableau 5.2. Nous avons choisi: $p = q$, $s_1 = s_2 = r$ et la limite inférieure pour la norme H_∞ : $\gamma \rightarrow +\sqrt{s_1}/b$. Nous avons utilisé directement la commande issue de la limite:

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\sqrt{s_1}/b} \{u_1^*(t)\} = u_1^* - \frac{b}{2as_1} \left(p + \frac{s_2 y_d^2}{(c(\tilde{x}(t) + x^*)x^*)^2} \right) \tilde{x}(t)$$

afin d'éviter des instabilités numériques.

Les simulations ont été faites pour $x(0) = 0.5x_n$ et les références: $y_d = y_n$, $x^* = x_n$. Nous avons utilisé le modèle du flux (5.99) avec une perturbation constante $d = -2Wb/sec$, appliquée en $t = 0.5sec$. Nous analysons seulement la performance en régulation du flux, car les lois de commande assurent: $y = y_d \forall x$ et la perturbation d seulement agit sur x . La Figure 5.15 montre la référence du flux et les réponses pour les deux commandes testées. Nous observons que la commande H_∞ répond plus vite et rejette mieux la perturbation d que la commande H_2 pour ce choix des paramètres de commande. Cependant, les valeurs maximales des commandes U dépassent leurs limites admissibles (15 Amp. pour cette machine) comme il est montré dans la Figure 5.16.

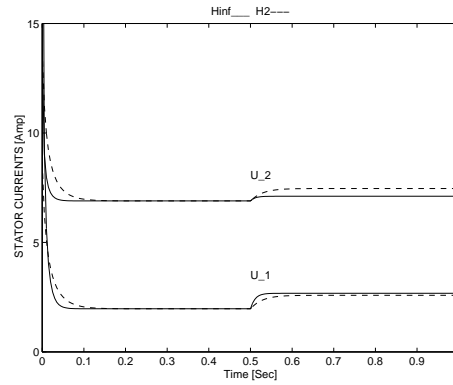


Figure 5.16: Courants statoriques des stratégies de commande H_2 et H_∞ .

Finalement, le Tableau 5.3 présente les valeurs en $t = 0.5\text{sec}$ et $t = 1\text{sec}$ des fonctions de coût J et J_2 . Nous observons que les coûts J associés à l'énergie électrique pour les commandes H_2 et H_∞ , sont pratiquement équivalents. Nous notons aussi que le coût J_2 , pour la commande H_∞ est supérieur à celui de la commande H_2 ; ceci est dû principalement au plus grand effort de la commande H_∞ pendant le premier transitoire.

Tableau 5.3: Fonctions de coût J et J_2 .

	$J(0.5)$	$J(1)$	$J_2(0.5)$	$J_2(1)$
H_2	0.816	1.6564	0.013	0.020
H_∞	0.823	1.6567	0.024	0.029

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté nos principaux résultats sur la commande optimale de la machine asynchrone, en utilisant l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi; pour la minimisation de l'énergie du moteur (section 5.3), cette approche nous a permis d'obtenir la stratégie OPEC, qui a les caractéristiques suivantes:

- Pour des trajectoires du couple désiré variables dans le temps, OPEC donne **en ligne** des références **sous-optimales** de la norme du flux qui minimisent une limite supérieure de la fonction du coût optimale (normalisée) à l'horizon infini.
- OPEC intrinsèquement considère la restriction dynamique du flux, cela la rend **moins sensible** aux fréquences élevées du couple désiré que la solution approchée.
- Pour le couple désiré constant sur un horizon infini, OPEC donne les trajectoires asymptotiques **optimales** de la norme du flux pour n'importe quelle condition initiale $x(0)$ et finale $x(\infty)$ du flux.
- Elle est directement paramétrisable en termes des données de la machine. En plus, par sa simplicité, elle ne requiert pas de puissance de calcul élevées. Cela la rend donc **compatible** avec d'autres schémas de commande telles comme: la commande classique vectorielle, la commande linéarisante, la commande basée sur la passivité, etc.; pourvu qu'ils aient la capacité de poursuite du flux.

Nous avons testé cette stratégie en simulation dans des différentes conditions d'opération et nous l'avons comparée par rapport aux solutions approchée et flux constant. D'après cela et le critère de sous-optimalité donné, nous identifions deux cas spécifiques o cette stratégie a une forte chance d'avoir un rendement supérieur aux autres:

- Des trajectoires du couple désiré, dans tout la plage admissible de variation, mais sans composantes fréquentielles élevées par rapport à w_o .
- Des trajectoires du couple désiré, limitées dans une plage de variation de l'ordre de $\pm 20\%$ du couple nominal, sans restriction sur son spectre fréquentiel.

Dans le deuxième volet de ce chapitre (section 5.4), nous avons présenté deux lois de commande pour la régulation optimale autour de la solution optimal stationnaire, au sens H_2 et H_∞ . Ces lois de commande assurent l'objectif de régulation du couple et la stabilité interne de la dynamique du flux en boucle fermée; en outre, la commande optimale H_∞ atténue les effets des perturbations additives dans le critère H_2 . Ces résultats restent pour l'instant au niveau théorique mais ils s'avèrent fondamentaux pour des futures recherches qui intègrent dans la conception de la commande, et la poursuite du couple et l'optimisation du rendement.

Chapitre 6

Évaluation Expérimentale

6.1 Introduction

Dans ce chapitre nous validons expérimentalement, les résultats théoriques obtenus dans les chapitres précédents. Dans [50] [74] et [19] cette approche a été validée expérimentalement en régime stationnaire (couple est norme du flux constants), en utilisant le modèle d'ordre complet. Notre intérêt est de valider nos résultats pour des asservissements électriques où les trajectoires désirées du couple sont variables dans le temps, ce qui nous amène au fonctionnement de la machine avec la norme du flux variante dans le temps. Nous considérons le cas des trajectoires désirées du couple, méconnues à l'avance et définies par une commande externe en vitesse.

Pour ce genre des trajectoires, nous avons proposé la solution approchée: $\hat{x}^*(t) = \beta \sqrt{|y_d(t)|}$, laquelle s'approche de la solution optimale pour des signaux de couples désirés sans composantes de haute fréquence, et la solution OPEC qui l'améliore pour les couples désirés avec composantes de haute fréquence. Par sa simplicité, ces solutions ne requièrent pas de puissances de calcul élevées. Cela les rend compatibles avec les schémas de commande vectorielles qui ont des capacités de poursuite du flux. Dans la section suivante nous allons présenter un schéma de commande de ce type. Comme nous avons utilisé le modèle réduit pour l'optimisation, nous avons adopté une structure de commande en cascade avec une commande interne des courants à haut gain, une commande intermédiaire pour la poursuite du couple et du flux et une commande externe de vitesse. Nous allons montrer dans la section 6.2.2 que cette loi de commande est asymptotiquement stable avec stabilité interne.

Pour la mise en oeuvre de la commande, il faut considérer quelques problèmes spécifiques associés au fonctionnement à norme du flux variable (voir section 6.3), en particulier:

1. le fonctionnement au point singulière $x = 0$ et dans la région de saturation, doivent être évitées.
2. Pour les références du couple et du flux, il faut assurer les conditions de différentiabilité requises par l'optimalité de la commande.

3. Les plages fréquentielles des références des courants i_{sd}^d et i_{sd}^q sont supérieures pour le fonctionnement à norme du flux variable par rapport au cas à flux constant, alors le réglage et l'implantation en temps discret de la boucle des courants deviennent plus délicats.
4. Il faut éviter la saturation en tension de l'onduleur à haute vitesse. Ce problème amène à la stratégie d'affaiblissement du flux (field weakening en Anglais) fonction de la vitesse; nous allons proposer une stratégie qui combine les références sous-optimales et d'affaiblissement du flux pour résoudre ce problème.

Nous avons mis en oeuvre cette loi de commande dans le banc expérimental du Laboratoire d'Automatique de Grenoble; une brève description du banc sera présentée dans la section 6.4

Le chapitre finira avec une évaluation comparative expérimentale (voir section 6.5) entre la stratégie de commande du flux OPEC et la commande à flux constante; l'évaluation se fera en termes des performances en poursuite de couple, vitesse et flux et en terme du rendement énergétique; nous présenterons aussi, une évaluation du rendement de la machine en fonction des composantes de haute fréquence du couple désiré, pour les références du flux OPEC, approchée et constante.

6.2 Loi de Commande Vectorielle à Flux Orienté

Dans cette section nous présentons la commande qui rend invariant les trajectoires du flux données par l'optimisation et qui assure la restriction de poursuite du couple: $y(t) = y_d(t)$; nous supposons que le couple et le flux ne sont pas mesurables; alors, la poursuite des références du couple et de la norme du flux optimale, se fera en imposant les références optimales des courants statoriques u_1^* et u_2^* ; la commande devra donc assurer aussi une poursuite adéquate des courants statoriques.

La commande vectorielle à flux orienté est la commande plus répandue dans le milieu industriel pour des applications à moyenne et grande performance dynamique. Nous avons choisi une commande vectorielle à flux orienté, afin de montrer la compatibilité de notre approche avec cette structure de commande. Du fait que la mise en oeuvre finale de la commande doit être faite dans le repère fixe du stator, nous allons présenter la commande, directement dans le repères ab .

6.2.1 Description de la loi de commande

La Figure 6.1 montre la structure générale de la loi de commande. Elle consiste en trois contrôleurs:

1. une commande interne pour la poursuite du couple et de la norme du flux,
2. une boucle de commande de courants,
3. et une boucle externe de contrôle de vitesse.

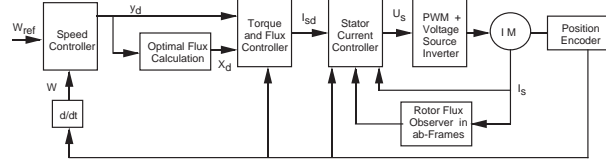


Figure 6.1: Schéma générale de la commande.

Pour la commande de couple et flux, nous avons utilisé la stratégie dite ‘indirecte’ de [55] donné par:

$$I_{sd} = U^T (v\theta + \rho_d) I_{sd}^{(d,q)} \quad (6.1)$$

$$I_{sd}^{(d,q)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} (\dot{x}_d + ax_d) \\ \frac{y_d}{cx_d} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$\dot{\rho}_d = \frac{by_d}{c(x_d)^2}, \quad \rho_d(0) = 0, \quad (6.3)$$

o ρ_d est l’angle désiré du flux rotorique, I_{sd} est le vecteur de courants statoriques désirées dans le repère fixe ab ; x_d est une version filtrée de la norme désirée du flux rotorique x_r :

$$x_d = H_x(p)x_r = \frac{s_1 s_2}{(p + s_1)(p + s_2)} x_r \quad (6.4)$$

$$x_r = f_r(y_d) = \begin{cases} x_n & \text{si } |y_d(t)| > y_n \\ \hat{x}^*(t) & \text{si } y_{min} \leq |y_d(t)| \leq y_n \\ x_{min} = \beta\sqrt{y_{min}} & \text{si } |y_d(t)| < y_{min} \end{cases} \quad (6.5)$$

o p est l’opérateur dérivé, $H_x(p)$ est un filtre stable sur-amorti de deuxième ordre qui assure $x_d \in \mathcal{C}^2$ et $\hat{x}^*(t)$ est, soit la solution approchée $\hat{x}^*(t) = \beta\sqrt{|y_d|}$, soit la solution OPEC¹. La fonction saturation (6.5) assure que x_d évolue dans le domaine: $D_s = \{x_d \in \mathcal{R} | x_{min} \leq x_d(t) \leq x_n\}$; voir plus détails dans la section 6.3. Nous notons que pour $y_{min} \leq |y_d(t)| \leq y_n$, $x_d = \hat{x}^*$, et alors I_{sd} est la rotation dans les repères ab du vecteur $I_{sd}^{(d,q)}$ qui a comme composantes les commandes optimales (sous-optimales) (4.3) et (4.4).

Le vecteur de courants désirées I_{sd} est la référence pour la boucle de courants:

$$U_s = \sigma L_s [\dot{I}_{sd} + \gamma I_{sd} - U_c + K_{pi} (1 + \frac{1}{T_{ii}p}) e_I] \quad (6.6)$$

o $e_I = I_{sd} - I_s^{(a,b)}$ est le vecteur d’erreur de courants statoriques, $K_{pi} > 0$ et $T_{ii} > 0$ sont les paramètres de réglage du contrôleur PI de courants; \dot{I}_{sd} et γI_{sd} sont termes d’avance de phase

¹d’autres structures de limitation sont possibles, voir par exemple [69]

(‘feedforward’ en Anglais) qui améliorent la performance en poursuite de courants, et U_c est la compensation non linéaire (voir les détails dans la section 6.3):

$$U_c = \eta(aI - v\omega J)U^T(v\theta)\hat{\Phi}_r \quad (6.7)$$

o $\hat{\Phi}_r$ est le vecteur du flux rotorique estimé; l’estimation du flux s’obtient à partir de l’estimateur suivant dans le repères ab :

$$\dot{\hat{\Phi}}_r = -a\hat{\Phi}_r + bU(v\theta)I_s^{(a,b)} \quad (6.8)$$

Finalement, la boucle externe de vitesse, définit la trajectoire du couple désiré $y_d(t)$ en utilisant un contrôleur PI et des termes d’avance de phase:

$$y_d(t) = m\dot{\omega}_d + f\omega_d + K_{pv}\left(1 + \frac{1}{T_{iv}p}\right)e_v, \quad (6.9)$$

ω_d est la trajectoire désiré de la vitesse (deux fois différentiable), $e_v = \omega_d - \omega$ est l’erreur de vitesse et $K_{pv} > 0$, $T_{iv} > 0$ sont les paramètres de réglage du contrôleur PI de vitesse.

6.2.2 Analyse de stabilité

Nous présentons ici l’analyse de stabilité du système (2.5)-(2.8) avec la loi de commande (6.1)-(6.9). Les équations d’erreur pour les variables électriques sont:

$$\dot{e} = A(\omega, \theta)e \quad (6.10)$$

avec $e = [e_I^T, z^T, \hat{e}_\Phi^T, e_\Phi^T]^T$, $z = \frac{e_I}{p}$, $\hat{e}_\Phi = \Phi_r - \hat{\Phi}_r$, $e_\Phi = \Phi_d - \Phi_r$;
 Φ_d est le vecteur désiré du flux dans les repères ab ,

$$\Phi_d = U^T(\rho_d)\Phi_d^{(d,q)}; \quad (6.11)$$

$$\Phi_d^{(d,q)} = \begin{bmatrix} x_d(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

et $A(\omega, \theta)$ est une matrice 8×8 définie par:

$$A(\omega, \theta) = \begin{bmatrix} -a_1 I & -a_2 I & -\eta(aI - v\omega J)U^T(v\theta) & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -aI & 0 \\ bU(v\theta) & 0 & 0 & -aI \end{bmatrix}$$

o $a_1 = \gamma + K_{pi}$ et $a_2 = \frac{K_{pi}}{T_{ii}}$. Voir la section 2.3 pour les définitions de I, J , et $U(\cdot)$.

Considérons la fonction quadratique, définie positive: $V = e^T P(t)e$;

$$P(t) = \begin{bmatrix} I & \frac{a_1}{2} I & -\eta U^T(v\theta) & 0 \\ \frac{a_1}{2} I & (\frac{a_1^2}{2} + a_2) I & -\eta \frac{a_1}{2} U^T(v\theta) & 0 \\ -\eta U(v\theta) & -\eta \frac{a_1}{2} U(v\theta) & p_1 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a a_1}{b^2} I \end{bmatrix} > 0$$

o p_1 est la constante positive:

$$p_1 > \eta^2 \left(1 + \frac{1 + a_1 + 4a_2/a_1}{8a} \right) \quad (6.13)$$

Il faut remarquer que $\|A(\cdot)\| \rightarrow \infty$ seulement si $\|\omega\| \rightarrow \infty$; supposons pour l'instant que ω est bornée, alors la dérivé par rapport au temps de V le long les solutions de (6.10), est:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e^T Q(t) e \\ Q(t) &= \begin{bmatrix} a_1 I & 0 & -\frac{a_1}{2} \eta U^T(v\theta) & -\frac{aa_1}{b} U^T(v\theta) \\ 0 & a_1 a_2 I & a_2 \eta U^T(v\theta) & 0 \\ -\frac{a_1}{2} \eta U(v\theta) & a_2 \eta U(v\theta) & 2a(p_1 - \eta^2) I & 0 \\ -\frac{aa_1}{b} U(v\theta) & 0 & 0 & \frac{2a^2 a_1}{b^2} I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.14)$$

En utilisant la restriction (6.13), on peut montrer que $Q(t) > 0$. Nous avons donc que e converge exponentiellement à zéro; cela implique que: $\Phi_r \rightarrow \Phi_d$, $I_s^{(a,b)} \rightarrow I_{sd}$ et alors que $x(t) \rightarrow x_d(t)$, $\rho \rightarrow \rho_d$ et

$$y(t) \rightarrow c I_{sd}^T U^T(v\theta) J \Phi_d = y_d(t). \quad (6.15)$$

L'équation d'erreur pour le sous-système mécanique est:

$$m \ddot{e}_\theta + (f + K_{pv}) \dot{e}_\theta + \frac{K_{pv}}{T_{iv}} e_\theta = y_d(t) - y(t) \quad (6.16)$$

o $e_\theta = \frac{e_v}{p}$. Comme l'erreur: $y_d(t) - y(t)$ converge asymptotiquement à zéro, alors $e_\theta \rightarrow 0$ et $e_v \rightarrow 0$.

Nous allons prouver la stabilité interne du système complet (6.10), (6.16), avec le retour non-linéaire dynamique (6.4), (6.5). Pour cela, nous allons d'abord montrer que le système complet est localement Lipschitz et continu en t . Ceci assure l'existence et unicité des solutions dans un intervalle $[0, T)$. Après nous allons montrer que ω ne peut pas échapper à l'infini en temps fini. Pour cela nous allons prouver que l'entrée: $y_d(t) - y(t)$ de l'équation d'erreur mécanique (6.16), peut être bornée linéairement par les erreurs mécaniques e_v, e_θ . Finalement, nous allons montrer que la bornitude de ω , assure la stabilité interne de tout le système.

En utilisant (2.7) et (6.15), nous exprimons l'erreur du couple de la façon suivant:

$$y_d(t) - y(t) = c I_{sd}^T U^T(v\theta) J e_\Phi + c e_I^T U^T(v\theta) J \Phi_d - c e_I^T U^T(v\theta) J e_\Phi \quad (6.17)$$

$$y_d(t) - y(t) = c \begin{bmatrix} y_d/cx_d \\ -\frac{1}{b}(\dot{x}_d + ax_d) \end{bmatrix} U(\rho_d) e_\Phi + c e_I^T U^T(v\theta + \rho_d) \begin{bmatrix} 0 \\ x_d \end{bmatrix} - c e_I^T U^T(v\theta) J e_\Phi \quad (6.18)$$

Soit $e_m := [e_v, e_\theta]^T$, $\lambda := [x_d, \dot{x}_d]^T$ et $z := [e^T, e_m^T, \lambda^T]^T$ le vecteur d'état du système complet; nous pouvons donc décrire la dynamique du système complet de la forme: $\dot{z} = f(z, t)$,

avec:

$$\dot{e} = A(e_m, \lambda, t)e \quad (6.19)$$

$$\dot{e}_m = A_m e_m + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f_1(e, e_m, \lambda, t) \quad (6.20)$$

$$\dot{\lambda} = A_\lambda \lambda + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f_r(e, e_m, t) \quad (6.21)$$

o A_m, A_λ sont des matrices Hurwitz, $f_1(\cdot)$ correspond à (6.18) et $f_r(y_d)$ a été définie en (6.5).

Nous définissons $D \subset M = \{z \in R^{12} | x_{min} \leq x_d \leq x_n\}$ et considérons l'intervalle $[0, T)$. D'après (6.19)-(6.21) et les conditions de différentiabilité en ω_d , $f(z, t)$ est continue en $[0, T) \times D$; alors $\frac{\partial f}{\partial z}(z, t)$ existe et elle est bornée en $[0, T) \times D$. Par construction, z évolue en D ; soient z_1, z_2 deux points dans D . Selon le Théorème de la valeur moyenne [36], il existe un point $d \in D$ dans le segment de ligne qui rejoint z_1 à z_2 , telle que $f(z_1, t) - f(z_2, t) = \frac{\partial f}{\partial z}(d, t)(z_1 - z_2)$; alors:

$$\|f(z_1, t) - f(z_2, t)\| \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial z}(d, t) \right\| \|z_1 - z_2\| \quad (6.22)$$

$$\|f(z_1, t) - f(z_2, t)\| \leq L(x_d(t), d) \|z_1 - z_2\| \quad (6.23)$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial z}(z, t)$ et d sont bornées, nous pouvons calculer une constante L_0 qui limite $L(x_d(t), d)$. En conséquence, $f(z, t)$ est localement Lipschitz en z et continue en t et les solutions de $\dot{z} = f(z, t)$ existent et sont uniques dans $[0, T)$. Dans cette intervalle, nous pouvons évaluer \dot{V} le long des trajectoires (6.19), et obtenir (6.14). Alors, nous pouvons conclure qu'il existent des constantes positives m_I, ψ_I et m_Φ, ψ_Φ , indépendents du T , telles que:

$$\|e_I\| \leq m_I \|e_I(0)\| e^{-\psi_I t} \leq m_I \|e_I(0)\|, \forall t \in [0, T) \quad (6.24)$$

$$\|e_\Phi\| \leq m_\Phi \|e_\Phi(0)\| e^{-\psi_\Phi t} \leq m_\Phi \|e_\Phi(0)\|, \forall t \in [0, T); \quad (6.25)$$

par construction $\omega_d, \dot{\omega}_d, x_d$ et \dot{x}_d sont des signaux bornées, nous pouvons donc établir les limites suivants:

$$\|\Phi_d\| \leq |x_d(t)| \leq \bar{\alpha}_1 \quad (6.26)$$

$$\|I_{sd}\| \leq \|I_{sd}^{(a,b)}(t)\| \leq \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3 |y_d(t)| \quad (6.27)$$

$$\|I_{sd}\| \leq \bar{\alpha}_4 + \bar{\alpha}_5 e_v + \bar{\alpha}_6 e_\theta; \quad (6.28)$$

de (6.17) nous obtenons la limite supérieure:

$$|y_d(t) - y(t)| \leq c(\|I_{sd}\| \|e_\Phi\| + \|e_I\| \|\Phi_d\| + \|e_I\| \|e_\Phi\|), \quad (6.29)$$

les limites (6.24)-(6.28) dans (6.29) donnent:

$$|y_d(t) - y(t)| \leq \bar{\alpha}_7 + \bar{\alpha}_8 e_v + \bar{\alpha}_9 e_\theta, \forall t \in [0, T). \quad (6.30)$$

En utilisant (6.30) et l'inégalité de Gronwall [36] on peut montrer facilement que les solutions de (6.16) ne peuvent pas croître plus vite qu'une exponentielle. En conséquence, $\|e_v, e_\theta\|$ restent bornées; $\forall t \in [0, T], T < \infty$, nous avons donc, les implications suivants valides pour tout $t \in [0, T], T < \infty$:

- ω est bornée du fait que e_v et ω_d sont bornées.
- de (6.28), I_{sd} est bornée, alors $I_s^{(a,b)}$ est bornée car e_I est borné; comme e_I est borné, $\frac{e_I}{p}$ est bornée.
- $\hat{\Phi}_r$ est borné car l'entrée $I_s^{(a,b)}$ du filtre linéaire (6.8), est bornée. Par la même raison, Φ_r est borné.

Nous avons donc que l'état du système complet n'échappe pas à l'infini en $[0, T]$. Comme m_I, ψ_I, m_ϕ et ψ_ϕ , sont indépendants du T , nous pouvons considérer des conditions initiales en $T, 2T, 3T, \dots$ et répéter le mêmes arguments pour assurer l'existence des solution bornées dans les intervalles $[T, 2T], [2T, 3T], [3T, 4T], \dots$, ce qui permet d'étendre la solution à tout l'axe réel.

Nous pouvons donc conclure que le système en boucle fermée est asymptotiquement stable, avec stabilité interne.

Remarque 6.1 *Cette loi de commande a deux limitations:*

1. Elle suppose la connaissance exacte des paramètres de la machine; nous savons déjà que les résistances et inductances changent au cours de fonctionnement.
2. La poursuite des courants sinusoïdaux dans la boucle de courants, s'avère délicate surtout si la mise en oeuvre est discrète, avec des fréquences d'échantillonnage faibles.

6.3 Les Problèmes de la Mise en Oeuvre

Dans cette section nous présentons les principales considérations d'ordre pratique pour la mise en oeuvre de la loi de commande (6.1)-(6.9).

6.3.1 Références

Selon le Théorème 4.6, les références du flux $x_d(t)$ et du couple $y_d(t)$ doivent être des fonctions au moins deux fois différentiables. Pour assurer la différentiabilité de $x_d(t)$ nous avons utilisé le filtre $H_x(p)$ dans (6.4). En ce qui concerne à $y_d(t)$, nous avons ajouté un filtre de premier ordre pour la mesure de vitesse et un filtre de deuxième ordre pour la référence de vitesse, celui-ci, sert aussi pour définir les performances en poursuite de vitesse.

En pratique, le couple de la machine peut prendre des valeurs jusqu'à deux fois le couple nominal, ou bien il peut être nul pendant certains instants et intervalles du temps. Dans ces cas, les solutions approché et OPEC peuvent generer des références du flux $x_d(t)$ dans la région de

saturation ou le point singulier $x_d = 0$. Pour surmonter ces problèmes de référence singulière ou en saturation, nous avons restreint le fonctionnement sous-optimal du flux à l'intervalle: $x_{min} \leq x_d(t) \leq x_n$ en utilisant la fonction de saturation (6.5). La valeur x_{min} est choisie en assurant la limite supérieure admissible du courant i_s^g , c'est-à-dire: $x_{min} = \frac{y_{max}}{c(i_s^g)_{max}}$. Nous notons que le filtre (6.4) est sur-amorti pour assurer la limite inférieure de $x_d(t)$; il permet aussi de borner la commande i_s^d car il limite le terme \dot{x}_d lorsque la solution approché est utilisée.

6.3.2 Commande des courants

La MLI produit des composantes de haute fréquence dans les courants statoriques. Pour réduire ces composantes dans les courants mesurés, il a été utilisé des filtres analogiques passe-bas de quatrième ordre avec une fréquence de coupure de $500Hz$; ces filtres évitent aussi le phénomène de repliement du spectre de fréquence (aliasing en Anglais) après la discrétisation du signal. Malgré cela, le niveau du bruit n'a pas permis d'obtenir de hauts gains pour un simple contrôleur PI en courants. Nous avons donc, ajouté la compensation non-linéaire (6.7) qui linéarise et découple les boucles de courant-tension statoriques, en éliminant le terme non-linéaire $\eta(aI - v\omega J)U^T(v\theta)\Phi_r$. Comme le flux Φ_r n'est pas mesurable, nous l'avons estimé avec (6.8) pour faire la compensation.

En supposant une compensation exacte, nous pouvons utiliser l'équation linéarisée d'erreur des courants, pour régler les paramètres du contrôleur PI. Nous avons utilisé une technique de placement des pôles dans le plan z qui considère la dynamique du reteneur d'ordre zéro, une période d'échantillonnage pour le calcul de la commande et une discrétisation de la dynamique continue via la transformation bilinéaire [66]; nous avons aussi utilisé cette transformation pour la discrétisation des équations (6.7), (6.8) en essayant ainsi de garder les performances de la commande continue. Nous notons que pour une bonne performance de la commande de courants, il faut avoir une fréquence d'échantillonnage relativement élevé; en effet, en régime stationnaire à la vitesse nominale, il faut suivre une référence sinusoïdale qui a une période de $20ms$; si la linéarisation de la boucle des courants est exacte, alors la constante de temps équivalente de l'équation linéarisée d'erreur des courants, doit être inférieure (en gros) à $2ms$; ceci impose des périodes d'échantillonnage de l'ordre de $0.5ms$ au maximum.

Il faut noter aussi que dans la commande des courants, nous devons calculer le terme \dot{I}_{sd} ce qui implique le calcul analytique de $\dot{y}_d(t)$; ceci a été très lourd en terme du temps de calcul; pour cette raison, nous avons utilisé une dérivée filtrée du I_{sd} pour la mise en oeuvre finale. Nous avons aussi utilisé les compensations standards [45] des retards de phase dûs au convertisseur et aux filtres analogiques.

6.3.3 Défluxage de la Machine à haute vitesse

Il est bien connu que dans des application industrielles, la référence du flux est utilisée pour éviter la saturation de la tension du convertisseur; nous présentons ici une stratégie qui intègre

le défluxage en fonction de la vitesse à (6.5).²

La stratégie d'affaiblissement du flux (field weakening en Anglais), permet à l'entraînement du moteur de travailler à haute vitesse sans saturation de tension dans le convertisseur. Une manière d'atteindre cet objectif est en ajustant la référence du flux en fonction de l'inverse de la vitesse. Cela vient du fait qu'en régime stationnaire, le terme fonction de la vitesse dans (2.5),

$$U_s(\omega) = \frac{L_{sr}}{L_r} v \omega J U^T(v\theta) \Phi_r; \quad (6.31)$$

$$\|U_s(\omega)\| = \frac{L_{sr}}{L_r} v |\omega| |J U^T(v\theta) \Phi_r| = \frac{L_{sr}}{L_r} v |\omega| x \quad (6.32)$$

devient dominant à haute vitesse. Dans la stratégie standard de défluxage pour la commande vectorielle classique [45], la référence du flux varie de la manière suivante:

$$x_{cw} = \begin{cases} x_n & \text{si } \omega \leq \omega_n, \\ x_n \frac{\omega_n}{|\omega|} & \text{si } \omega > \omega_n \end{cases} \quad (6.33)$$

ce qui assure que la tension $U_s(\omega)$ est limitée à:

$$U_s(\omega) \leq U_{max} = \frac{L_{sr}}{L_r} v |\omega_n| x_n. \quad (6.34)$$

Pour les références du flux approchée ou OPEC en régime stationnaire, l'équation (6.32) devient:

$$\|U_s(\omega)\| = \frac{L_{sr}}{L_r} v |\omega| \beta \sqrt{|y_d(t)|} \quad (6.35)$$

pour assurer la limite (6.34), le vitesse doit satisfaire:

$$\|U_s(\omega)\| = \frac{L_{sr}}{L_r} v |\omega| \beta \sqrt{|y_d(t)|} \leq U_{max} = \frac{L_{sr}}{L_r} v |\omega_n| x_n \quad (6.36)$$

$$\omega \leq \frac{\omega_n x_n}{\beta \sqrt{|y_d(t)|}} = \omega_n \sqrt{\frac{y_n}{|y_d(t)|}} := \Psi(y_d) \quad (6.37)$$

cette équation définit donc, la frontière entre la région à fonctionnement sous-optimal et la région d'affaiblissement du flux. De (6.5), (6.33) et (6.37), nous définissons la référence du flux:

$$x_{sw} = \begin{cases} x_n & \text{si } |y_d| > y_n & \text{et } \omega \leq \omega_n \\ \frac{x_n \omega_n}{|\omega|} & \text{si } |y_d| > y_n & \text{et } \omega > \omega_n \\ \hat{x}^* & \text{si } y_{min} \leq |y_d| \leq y_n & \text{et } \omega \leq \Psi(y_d) \\ \frac{x_n \omega_n}{|\omega|} & \text{si } y_{min} \leq |y_d| \leq y_n & \text{et } \omega > \Psi(y_d) \\ x_{min} & \text{si } |y_d| < y_{min} & \text{et } \omega \leq \Psi(y_{min}) \\ \frac{x_{min} \Psi(y_{min})}{|\omega|} & \text{si } |y_d| < y_{min} & \text{et } \omega > \Psi(y_{min}) \end{cases} \quad (6.38)$$

²il est possible aussi de définir une stratégie équivalente pour la défluxification basé sur la mesure de tension

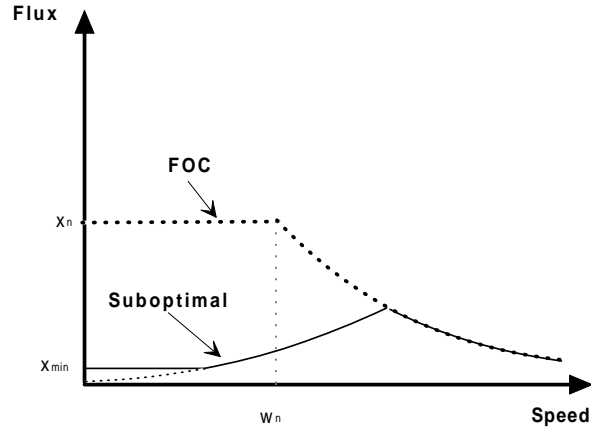


Figure 6.2: Flux vs. vitesse en régime stationnaire, $y_d = y = f\omega$; stratégie Flux constante-affaiblément du flux et stratégie sous optimale-affaiblément du flux.

qui permet une **opération combinée des stratégies sous-optimale et d'affaiblément du flux**.

La Figure 6.2 montre des courbes du flux vs. la vitesse en régime stationnaire avec couple nul de charge ($y_d = y = f\omega$), pour les stratégies (6.33) et (6.38).

Nous notons que le changement entre les modes d'opération sous-optimale et d'affaiblément du flux est continu, et que le flux pour la stratégie (6.38) est plus petit que celui donné par (6.33), dans toute la plage de la vitesse.

La Figure 6.3 présente les frontières et les différentes régions d'opération dans le plan couple-vitesse; à gauche de la ligne solide ANCD (stratégie (6.38)) nous avons la référence du flux (6.5), elle sera sous-optimale ou constante selon la valeur du couple désiré; à gauche de la ligne à tiret AB (stratégie (6.33)), nous aurons l'opération à flux constant. Nous remarquons que la stratégie combinée sous optimale-affaiblément du flux (6.38), couvre une aire supérieure à celle de la commande vectorielle classique (6.33).

6.4 Le Banc d'essais

En vue de valider notre approche, nous avons mis en oeuvre la loi de commande décrite au-dessus sur le banc d'essais du Laboratoire d'Automatique de Grenoble [8]. La Figure 6.4 montre un schéma général du banc expérimental. Il s'agit d'une machine asynchrone à cage de $7.5Kw$ (voir l'annexe A pour les données), un moteur à courant continu de $7.5Kw$ qui représente la charge, l'électronique de puissance pour la commande rapprochée des moteurs, les capteurs et

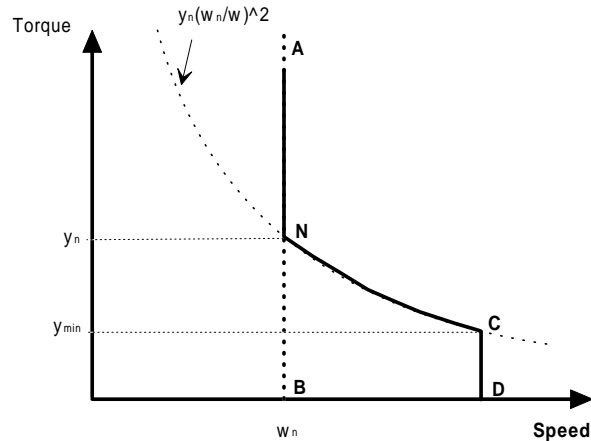


Figure 6.3: Frontières et différentes régions d'opération dans le plan couple-vitesse

le système informatique pour l'affichage et la commande.

Le système $DSPACE^{TM}$ est composé de plusieurs cartes électroniques:

- 1 l'unité centrale DS1002 qui contient un processeur de signal (point flottant) TMS320C30 de la Texas Instruments. C'est dans ce processeur qui a été programmé l'algorithme de commande;
- 2 la carte DS2002 de entrées analogiques, elle contient deux convertisseurs rapides A/N de 16 bits avec chacun 16 voies multiplexées;
- 3 la carte DS2101 de sorties analogiques avec 5 convertisseurs N/A de 12 bits;
- 4 le codeur incrémental DS3001,
- 5 la carte DS4001 qui a des entrées/sorties numériques, des compteurs/timers de 16 bits et une base de temps de $5MHz$;
- 6 la carte d'interface Alct01 qui fait la modulation de largeur d'impulsion (MLI); il s'agit d'une carte client développée par la société DSPACE pour le compte d'Alcatel Alsthom Recherche.

L'algorithme de commande peut être programmé directement sur le système $DSPACE^{TM}$ en utilisant sa description en schéma blocs dans l'environnement MATLAB/SIMULINKTM et les logiciels de compilation RTW (Real Time Workshop) et de téléchargement. L'exploitation finale de l'application se fait avec les logiciels $COCKPIT^{TM}$ et $TRACE^{TM}$.

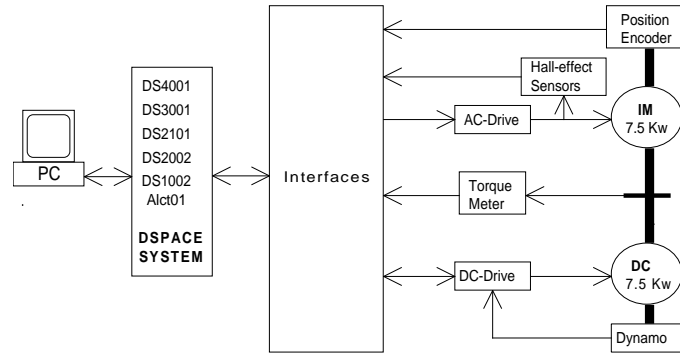


Figure 6.4: Le Banc d'essais.

Le temps de calcul de notre loi de commande a été de $0.5ms$; nous avons utilisé une fréquence d'échantillonnage de $1KHz$ égale à celle de la MLI.

Les courants statoriques sont mesurés à l'aide de capteurs à effet Hall; la mesure de la position se fait avec un codeur optique de $2500points/tour$; le signal de vitesse est obtenu en appliquant l'algorithme de différence rétrograde sur la mesure de position. Entre les deux moteurs, il y a un couplemètre à grande bande passante qui a été utilisé pour vérifier la poursuite de couple et non pas dans la loi de commande.

Finalement, le banc expérimental a plusieurs interfaces d'isolement et un ordinateur 486 utilisé pour la récupération de données et sa manipulation hors-ligne; voir [8] pour plus de détails sur ce banc d'essais.

6.5 Résultats expérimentaux

Dans cette section nous faisons une étude expérimentale comparative entre les stratégies de commande à flux constant, approchée et OPEC. En utilisant la même loi de commande (6.1)-(6.9) pour les différentes stratégies, nous voulons comparer ces performances par rapport à la poursuite du couple et le rendement du moteur.

Pour cela, nous avons conçu deux expériences:

Commande de vitesse: l'entraînement fonctionne en contrôle de vitesse, il faut suivre une référence typique avec différentes modes de fonctionnement: accélération, régime stationnaire, inversion de sens et freinage.

Commande de couple: l'entraînement fonctionne en contrôle de couple; le couple désiré est un signal sinusoïdal.

Pendant les expériences nous avons utilisé les paramètres de commande suivants: $K_{pi} = 300$, $T_{ii} = 3ms$, $K_{pv} = 1.75$ et $T_{iv} = 0.28s$. Avec ce choix, nous avons les pôles: $z_1 = 0.2$ et $z_{2-3} = 0.8 \pm 0.3j$ pour l'équation discrète, linéarisée d'erreur des courants; et les pôles: $p_{\omega 1} = p_{\omega 2} = -4$ pour la dynamique en boucle fermée de la vitesse. Nous avons choisi les pôles du filtre de la référence de vitesse en $p_{r1} = p_{r2} = -2$ et en $p = -500$ le pôle du filtre de mesure de vitesse. Finalement, nous avons choisi les pôles de $H_x(p)$ dans (6.4) en $p_1 = p_2 = -200$ et la limite inférieure $x_{min} = 0.2x_n$; selon le critère donné dans la section 4.2.3, $\beta = \frac{x_n}{\sqrt{y_n}} = 0.145$, $\frac{q}{r} = \frac{1}{L_{sr}^2} \left(\frac{L_r^2 y_n^2}{v^2 x_n^4} - 1 \right) = 574.7871$ et alors, $w_o = \sqrt{a^2 + \frac{q}{r} b^2} = 9.5181$.

6.5.1 Commande de vitesse

L'objectif de cette expérience est de comparer le rendement et les performances en poursuite de vitesse, couple et flux, pour les commandes à Norme du Flux Constant (NFC) et OPEC dans des conditions réelles d'opération; l'entraînement fonctionne en contrôle de vitesse, la référence du couple est donc généré par le contrôleur PI de vitesse (6.9); la Figure 6.5 montre le profil de la vitesse désiré, les réponses de vitesse et les erreurs de poursuite, pour les modes d'opération NFC et OPEC.

La référence de vitesse a plusieurs modes d'opération:

accélération: le signal de vitesse passe de zéro à une vitesse positive,

régime stationnaire: la référence reste constante à la moitié de la vitesse nominal, nous avons donc un couple désiré constant positif;

inversion: la vitesse désirée change de signe,

régime stationnaire: la vitesse désirée reste constante à moins la moitié de la vitesse nominal (couple désiré constant négatif);

freinage: la référence retour de la vitesse négative à zéro,

régime stationnaire: finalement la référence reste en zéro (couple désiré zéro).

C'est pendant la phase d'inversion qu'apparaît la valeur maximale d'erreur de poursuite; nous observons une différence de performance pendant cette phase; en effet, l'erreur maximale pour la stratégie NFC est $1.3Rad/Sec$ tandis que pour OPEC est $1.7Rad/Sec$. Cela est dû à une différence de performance en couple, comme montre la Figure 6.6; malheureusement le signal du couple mesuré est très bruité pour l'analyse, mais notons simplement que la référence du couple pour le fonctionnement à NFC a des valeurs supérieures à celle obtenue en utilisant OPEC. Supposons que la représentation du moteur peut se simplifier à: $y(t) = k_{eq}y_d(t)$ pour l'analyse de la dynamique lente de la vitesse; en observant les Figures 6.5 et 6.6, il semble que le gain k_{eq} est inférieur pour la stratégie OPEC à celui de la stratégie NFC (le signal d'erreur de vitesse pour NFC est plus bruité, a un pic inférieur et oscille plus), alors si nous voulons

garder les mêmes performances en vitesse avec la stratégie OPEC, une augmentation du gain proportionnel k_{pv} serait envisageable.

Les références du flux et les flux estimés, sont présentés dans la Figure 6.7. Les erreurs de poursuite en couple et flux sont dûs aux incertitudes paramétriques, aux erreurs d'implantation en temps discret et principalement à la pauvre réponse dynamique en boucle fermée de la commande des courants statoriques. Cette dynamique a été limitée dans notre cas par la basse fréquence d'échantillonnage utilisée; celle-ci a été définie par la fréquence de hachage de la MLI. Le tableau 6.1 présente l'intégrale des erreurs quadratiques (IEQ) de vitesse, couple et flux. Nous observons que les IEQ de vitesse sont du même ordre; ceci n'est pas le cas pour les performances en couple et flux. L'erreur de poursuite du flux est inférieure à l'erreur de régulation pour l'opération à NFC; ceci est dû principalement au fait que dans ce mode, la norme du flux est plus grande et donc, le terme de 'perturbation' $\eta(aI - v\omega J)U^T(v\theta)\Phi_r$ dans (2.5) est plus difficile à annuler, ce qui diminue les performances des boucles de courants et la performance globale de la poursuite de couple et flux.

Tableau 6.1: Integral des erreurs quadratiques de vitesse, couple et flux

	Vitesse	Couple	Flux
OPEC	1.16	65.6	.017
NFC	.77	542.2	.32

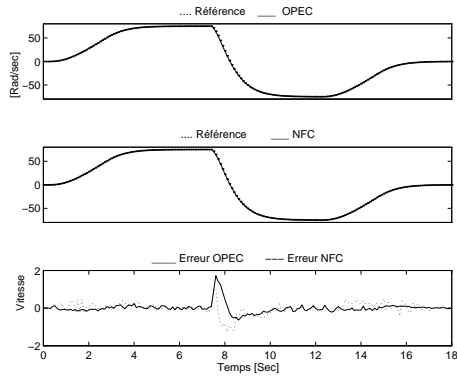


Figure 6.5: Vitesse désirée et réponses de vitesse, pour les modes d'opération à flux variable (OPEC) et à flux constant (NFC).

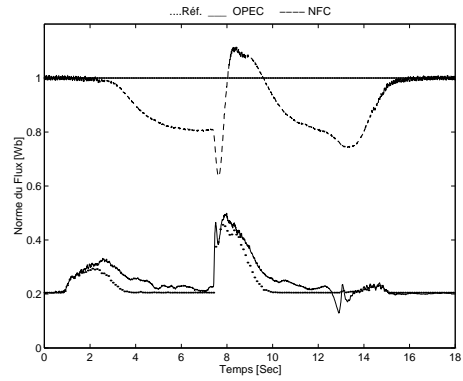


Figure 6.7: Flux désiré et réponses du flux, pour les modes d'opération à flux variable (OPEC) et à flux constant (NFC).

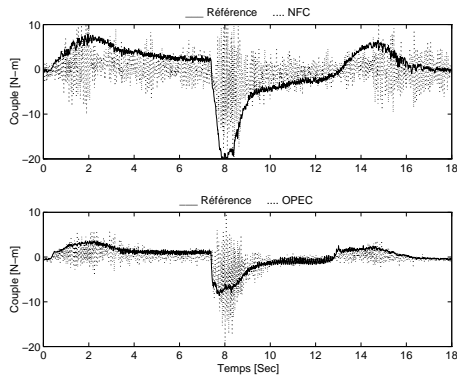


Figure 6.6: Couple désiré et réponse du couple, pour les modes d'opération à flux variable (OPEC) et à flux constant (NFC).

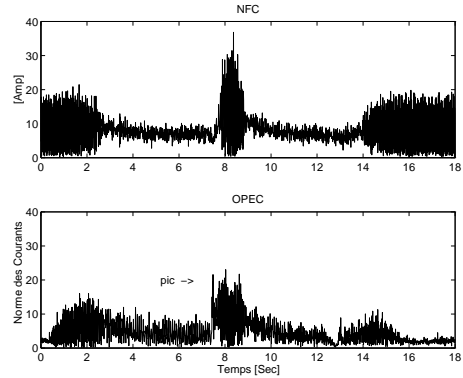


Figure 6.8: Normes des courants statoriques pour les modes d'opération à flux variable (OPEC) et à flux constant (NFC).

Remarque 6.2 *L'opération à flux variable n'entraîne pas nécessairement une diminution de la performance dynamique en vitesse; cette diminution de performance a été observée pour la loi de commande (6.1)-(6.9), mais nous ne pouvons pas généraliser ceci à n'importe quelle structure de commande; le changement de performance en couple, vitesse et flux est très lié à la sensibilité de la commande vis-à-vis les incertitudes paramétriques et au changement de performance de la commande de courants pour les modes d'opération à flux constant et variable. Les aspects plus importants à considérer sont:*

1. *il faut s'attendre à des variations plus importantes des inductances (en fonction de la norme du flux) pour la commande à flux variable; en revanche, la amélioration du rendement avec ce mode d'opération, diminue les variations des résistances.*
2. *Le terme de couplage non-linéaire $\eta(aI - v\omega J)U^T(v\theta)\Phi_r$ est moins important pour l'opération à flux variable qu'à flux constant (nominal), car la norme du flux en ce mode est toujours inférieure ou égal à la nominale. Cela favorise les lois de commande de courants linéarisantes qui annulent cette non-linéarité.*
3. *Avec la stratégie OPEC, la référence de courant i_{sd}^d varie en fonction du flux désiré; nous notons aussi que la dérivée de la référence i_{sd}^q est:*

$$\left[\frac{di_{sd}^q}{dt}\right]_{OPEC} = \frac{d}{dt} \frac{y_d}{cx_d} = \frac{\dot{y}_d}{cx_d} + \frac{y_d \dot{x}_d}{cx_d^2}$$

cette dérivée au point d'opération: $y_d = 0$, $\dot{y}_d \neq 0$ et $x_d(0) = x_{min}$ (au début de la phase d'inversion, par exemple), est:

$$\left[\frac{di_{sd}^q}{dt}\right]_{OPEC} = \frac{\dot{y}_d}{cx_{min}} > \frac{\dot{y}_d}{cx_n} = \left[\frac{di_{sd}^q}{dt}\right]_{NFC}$$

elle est donc $\frac{x_n}{x_{min}}$ fois plus élevée que celle de l'opération à flux constant, en ce point de fonctionnement. Alors, la plage fréquentielle des références des courants est plus élevée pour l'opération à flux variable qu'à flux constant; si nous avons les mêmes bandes passantes pour les stratégies de commande à flux constant et variable, il est possible d'avoir une diminution des performances en poursuite de couple, vitesse et flux, dans certains modes spécifiques d'opération.

c'est la juxtaposition de ces phénomènes qui définit l'effet final sur les performances en poursuite de couple, vitesse et flux.

Les normes des courants statoriques pour les deux stratégies de commande, sont présentées dans la Figure 6.8. La norme des courants pour le mode OPEC est inférieure à celle de NFC, la plus part du temps. Le différence de norme est plus importante à bas vitesse (les deux premières et dernières secondes) o la stratégie OPEC impose la limite inférieure de la norme du flux. Nous notons qu'au début de la phase d'inversion (en 7.5Seg.), il existe un pic dans la

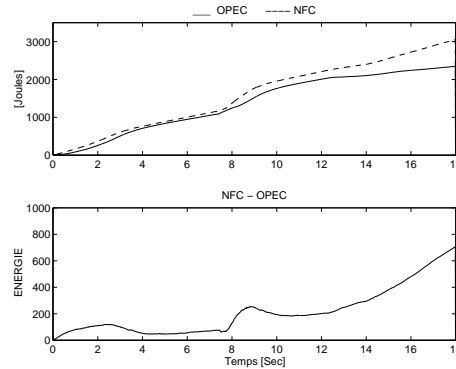


Figure 6.9: Évolutions des énergies totales pour les deux modes d'opération.

norme des courants pour le mode OPEC; il vient du terme \dot{x}_d de la référence de courant i_{sd}^d dans (6.2); ce pic fournit l'énergie nécessaire pour le fluxage rapide de la machine au début de la phase d'inversion (voir la Figure 6.7).

La Figure 6.9 montre les évolutions des énergies totales (calculées en intégrant la puissance active totale) pour les deux modes d'opération. À la fin de l'intervalle, la consommation pour le mode d'opération OPEC est de $2345J$ et de $3050J$ pour l'opération à norme du flux constant. Nous avons donc, une diminution de la consommation de 23 %, dans cette expérience. Ces résultats montrent que la stratégie OPEC améliore le rendement du moteur, en gardant des performances adéquates de poursuite de couple, flux et vitesse.

6.5.2 Commande de couple

L'amélioration en rendement du moteur a été analysée par rapport à la vitesse de variation du couple désiré, en utilisant plusieurs stratégies de commande du flux. Nous avons commandé le moteur en couple avec une référence sinusoïdale: $y_d(t) = 5 \cos(w_s t)$ de fréquence w_s variable; pour la référence du flux, nous avons utilisé la solution approchée, la solution OPEC et la norme du flux constant. La Figure 6.10 montre l'énergie totale consommée en 4 secondes, en fonction des différentes fréquences du couple (les fréquences w_s utilisées, ont été multiples entières de $\pi/2$) pour les trois références du flux. Nous observons que la consommation d'énergie pour la solution approchée est supérieure à celle du flux constant, aux fréquences élevées de couple désiré; cela est dû à l'énergie additionnelle demandée par la solution approchée pour suivre une référence du flux avec une vitesse de variation élevée. Par contre, la solution OPEC est moins sensible aux composantes de haute fréquence du couple désiré, elle est la plus performante parmi les stratégies utilisées, dans toute la plage fréquentielle testée.

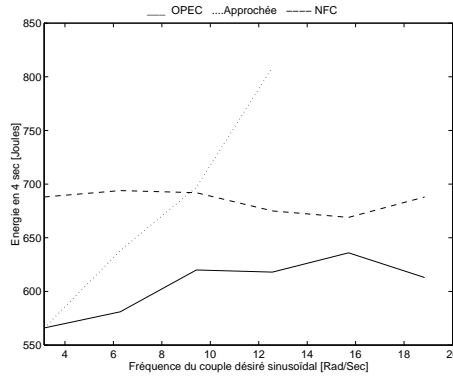


Figure 6.10: Énergies consommées en 4 sec. vs. la fréquence du couple désiré, pour les références du flux approchée, OPEC et constante

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons validé expérimentalement l'amélioration du rendement de la machine en utilisant la commande sous-optimale OPEC. En particulière nous avons validé notre approche pour des asservissements électriques avec des références de la norme du flux, du couple et de vitesse, variables dans le temps. Pour rendre invariantes ces références, nous avons conçu une loi de commande du type vectorielle qui est asymptotiquement stable, avec stabilité interne des états.

Nous avons proposé des solutions aux principaux problèmes de sa mise en oeuvre:

1. limitation de la référence du flux pour éviter des références nulles et dans la région de saturation;
2. filtrage des références de vitesse et flux et de la mesure de vitesse, pour assurer les conditions de différentiabilité du couple et du flux;
3. nous avons utilisé une compensation des non-linéarités et des termes d'avance de phase pour améliorer la poursuite des courants;
4. nous avons proposé une stratégie qui permet des changements sans sauts entre les références sous-optimal et d'affaiblissement du flux, en évitant ainsi la saturation de tension de l'onduleur à haute vitesse.

Nous avons montré que par sa simplicité, la stratégie de commande OPEC est compatible avec les schémas de commande du type vectorielle.

Nous avons vu que la faible bande passante des boucles des courants a dégradé les performances en poursuite de couple, vitesse et flux pour les deux modes d'opération. La bande passante des boucles de courants a été limitée par la fréquence de hachage de la MLI. Une amélioration de ces performances peut s'obtenir en réalisant la loi de commande de courant entièrement dans le repère dq .

Nous avons remarqué qu'il peut y avoir des changements de performance en poursuite de couple, vitesse et flux, entre les modes d'opération à flux constant et variable. Ces changements sont très liés à:

- la sensibilité de la commande par rapport aux incertitudes paramétriques,
- la différence de performance de la commande des courants pour les deux modes d'opération.

En particulier, la commande à flux variable requiert des bandes passantes des boucles de courants plus élevées car les plages fréquentielles des références des courants augmentent pour ce mode d'opération.

Malgré les erreurs de poursuite du couple et du flux, nous avons constaté que la stratégie de commande sous-optimale OPEC améliore le rendement du moteur, en gardant des performances adéquates de poursuite de couple, flux et vitesse.

Chapitre 7

Conclusions

7.1 Bilan

Etant donné les degrés de liberté, les contraintes sur l'état et la commande et la difficulté de bien modéliser les pertes, le problème d'optimisation du rendement du moteur est très complexe, d'autant plus pour des applications à haute performance dynamique avec des couples inconnus à l'avance et une plage fréquentielle élevée. Notre approche a été de simplifier le problème en utilisant des hypothèses raisonnables, pour essayer d'obtenir au moins une solution sous-optimale du problème simplifié. Cela n'a pas été facile, car il s'agit de trouver la trajectoire qui minimise une fonction de coût non quadratique dans l'état, variable dans le temps en respectant une restriction dynamique linéaire. Ce problème a été traité dans [18] où nous présentons et analysons les propriétés des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, en utilisant les outils du calcul variationnel. Mais le problème resté encore ouvert, car il fallait résoudre l'équation d'Euler avec des valeurs limites en deux points et d'autre part, la solution approchée proposée dans le même article, montrée des pertes importantes d'optimalité pour des signaux de couples désirés avec des composantes de haute fréquence.

'Chemin faisant'¹; c'est ainsi que ce parcours nous a permis de résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi associée au problème, pour le couple désiré constant [69]. Cette solution est une trajectoire optimale, variable dans le temps du problème. Elle est issue d'une équation différentielle linéaire de premier ordre, en la norme au carré du flux. Pour des trajectoires du couple désiré variables dans le temps, cette équation différentielle donne des références sous-optimales de la norme du flux qui minimisent une limite supérieure de la fonction du coût optimal, à l'horizon infini. Il s'agit donc d'une solution approchée du problème dynamique d'optimisation, avec un critère analytique de sous-optimalité. Nous considérons que cette solution débouche au niveau théorique, la problématique de l'optimisation du rendement de la machine asynchrone pour les régimes dynamiques.

¹Vox populi

Les résultats de son évaluation expérimentale [68, 70], pour des conditions d'opération des asservissements électriques, sont encourageants. Ces résultats et l'analyse des problèmes de mise en oeuvre avec les solutions proposées, nous permettent de conclure qu'en utilisant cette stratégie de commande, il est possible d'améliorer le rendement du moteur, en gardant des performances adéquates de poursuite de couple, flux et vitesse; ceci, ajouté à sa simplicité et compatibilité avec les schémas de commande industriels, nous amènent à penser qu'un transfert vers l'industrie est envisageable.

Nous avons aussi obtenu les conditions nécessaires d'optimalité sans utiliser la contrainte forte de poursuite de couple et nous avons proposé deux lois de commande pour la régulation optimale autour de la solution optimale stationnaire, au sens H_2 et H_∞ [30]. Ces résultats restent pour l'instant au niveau théorique mais ils s'avèrent fondamentaux pour de futures recherches qui intègrent dans la conception de la commande, l'amélioration des performances dynamiques et l'optimisation du rendement.

7.2 Perspectives

Le sujet est loin d'être épuisé. Plusieurs problèmes restent encore ouverts et de nouveaux chemins de recherche s'ouvrent:

1. pousser vers l'optimum la solution sous-optimale; plusieurs voies sont à explorer, entre autres:
 - i) relaxer la contrainte forte de poursuite de couple; pour cela il faudrait trouver une solution 'du genre OPEC', pour l'équation d'Hamilton-Jacobi associée au problème 4.5;
 - ii) utiliser des techniques de décomposition, pour minimiser l'ensemble des énergies du système: énergie mécanique et énergie électrique;
 - iii) combiner la stratégie OPEC avec des stratégies basées sur la mesure de la puissance électrique, pour atteindre l'optimum en régime stationnaire;
 - iv) Exploiter au maximum l'information disponible du système. Serait-il possible d'utiliser l'information stochastique des trajectoires du couple pour améliorer le rendement? peut on améliorer la stratégie OPEC, en exploitant l'information en avance de phase du signal d'erreur (par rapport au couple désiré) du contrôleur PI de vitesse?
2. Relaxer les hypothèses de linéarité du circuit magnétique et des paramètres constants; ceci amène à la conception de lois de commande robustes vis-à-vis des incertitudes paramétriques des inductances et résistances; pour l'optimisation, la saturation rend la restriction dynamique du flux, non-linéaire; d'autre coté, pour OPEC on pourrait adapter en ligne, la valeur de la résistance rotorique.
3. Étant donné le succès de la commande directe du couple il est important de pouvoir adapter la stratégie OPEC à ce genre de commande rapprochée. L'évaluation d'autres

stratégies de commande sans capteur de vitesse, avec la stratégie OPEC, s'avère aussi nécessaire pour de futures recherches.

4. Améliorer les performances de commandes des courants, pour garantir les mêmes performances de poursuite du couple pour l'opération à flux variable; la prise en compte des retards dus au échantillonnage, amène à la conception des lois de commande non linéaires échantillonnés.

Annexe A

Annexe

Paramètres du moteur du LAG

R_s	résistance statorique = 0.4ohms
R_r	résistance rotorique = 0.6ohms
L_s	Inductance statorique = 0.123H
L_r	inductance rotorique = 0.128H
L_{sr}	inductance mutuelle = 0.120H
J	inertie du rotor = 0.22Kgm ²
f	frottement du moteur = 0.006Kgm ² s ⁻¹
v	nombre de paires de pôles = 2
ω_n	vitesse nominale = 150Rads ⁻¹
y_n	couple nominale = 50N m
x_n	flux nominale = 1.025Wb
γ	$:= \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r L_{sr}^2}{L_r^2 \sigma L_s}$
σ	$:= 1 - \frac{L_{sr}^2}{L_s L_r}$
η	$:= \frac{L_{sr}}{\sigma L_s L_r}$
a	$:= \frac{R_r}{L_r}$
b	$:= a L_{sr}$
c	$:= \frac{L_{sr} v}{L_r}$

Bibliographie

- [1] H. Akagi, Y. Kanazawa, et A. Nabae. Instantaneous reactive power compensators comprising switching devices without energy storage components. *IEEE Trans. on Industry Application*, 20(3):625–630, 1984.
- [2] P. Alger. *Induction Machines, Their Behavior and uses*. Gordon and Breach, New York, 1970.
- [3] P. Alger, G. Angst, et E. Davies. Stray load losses in polyphase induction machines. *Trans. IEEE*, 78:349–357, 1959.
- [4] P. Anderson et J. Moore. *Optimal Control*. Mc. Graw Hill, New York, 1990.
- [5] V. Athans. *Optimal Control*. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1968.
- [6] A. Baba. *Optimisation du flux dans la Machine induction par une commande vectorielle: minimisation des pertes*. Thèse de Doctorat, Universit Paris VI, Paris, France, 1996.
- [7] C. Barbier, B. Nogarede, et H. Meyer. Global control strategy optimization of an asynchronous drive system for an electric vehicle. *Control Eng. Practice*, 4(8):1053–1066, 1996.
- [8] J. Barnier, T. Blanc, L. Dugard, et D. Lubineau. Plateforme expérimentale moteur asynchrone. Grenoble, France, 1997. Rapport interne.
- [9] R. Bellman et S. Dreyfus. *Applied Dynamic Programming*. Princeton University Press, New Jersey, 1962.
- [10] N. Benamrouche, A. Bousbaine, W. Low, et M. McCormick. An analysis of iron loss models used for inverter fed induction motors. Dans *Proc. of Electrimacs Congres*, pages 999–1004, Saint Nazaire, France, 1996.
- [11] P. Bernhard. *Commande Optimale, decentralisation et jeux dynamiques*. Dunod, Paris, 1976.

- [12] M. Bodson et J. Chiasson. A systematic approach to selecting optimal flux references in induction motors. Dans *Proc. 27th Annu. Meet. Ind. Applicat. Soc.*, pages 531–537, Houston, USA, 1992.
- [13] M. Bodson, J. Chiasson, et R. Novotnak. High-performance motion control of an induction motor by input-output linearization. Dans *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3386–3390, San Antonio, USA, 1993.
- [14] M. Bodson, J. Chiasson, et R. Novotnak. High-performance induction motor control via input-output linearization. *Control Systems Magazine*, 14(4):25–33, 1994.
- [15] M. Bodson, J. Chiasson, et R. Novotnak. Non-linear servo control of an induction motor with saturation. Dans *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1832–1837, Lake Buena Vista, USA, 1994.
- [16] M. Bodson, J. Chiasson, et R. Novotnak. A systematic approach to selecting flux references for torque maximization in induction motors. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 3(4):388–397, 1995.
- [17] B. K. Bose. Power electronics and motion control-technology status and recent trends. *IEEE Trans. on Industry Application*, 29(5):902–909, 1993.
- [18] C. Canudas de Wit et J. Ramirez. Optimal torque control for current-fed induction motors. Dans *Proc. of the American Control Conference*, pages 629–630, Albuquerque, USA, 1997. Acepté au IEEE Trans. on Automatic Control.
- [19] C. Canudas de Wit et S. I. Seleme. Robust torque control design for induction motors: The minimum energy approach. *Automatica*, 33(1):63–79, 1997.
- [20] J. Chatelain. *Machines Electriques*. Dunod, Paris, 1983.
- [21] J. Doyle, K. Glover, Khargonekar, et P. Francis. State-space solutions to standard h_2 and h_∞ control problems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 34(5):831–846, 1989.
- [22] H. El-Zobaidi, D. Brown, et J. Leigh. H_∞ control with lq approximate linearization of an induction motor. Dans *Proc. of the American Control Conference*, pages 1511–1512, Baltimore, USA, 1994.
- [23] G. Espinosa, R. Ortega, et P. Nicklasson. Torque and flux tracking of induction motors. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 7(1):1–9, 1997.
- [24] P. Famouri et J. J. Cathey. Loss minimization control of an induction motor drive. *IEEE Trans. on Industry Application*, 27(1):32–37, 1991.
- [25] J. Fetz et K. Obayashi. High efficiency induction motor drive with good dynamic performance for electric vehicles. Dans *Proc. of the Power Electronics Specialist Conference*, pages 921–927, Seattle - USA, 1993.

- [26] G. Figalli, M. La Cava, et L. Tomasi. An optimal feedback control for a bilinear model of induction motor drives. *Int. Journal of Control*, 39(5):1007–1016, 1984.
- [27] D. Galler. Energy efficient control of ac induction motor drive vehicles. Dans *Proc. of IEEE Conf. IAS Annu. Meeting*, pages 301–308, Cincinnati, USA, 1980.
- [28] G. Garcia, J. Mendes, L. Stephan, et E. Watanabe. An efficient controller for an adjustable speed induction motor drive. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 41(5):533–539, 1992.
- [29] I. M. Gelfand et S. V. Fomin. *Calculus of Variations*. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1963.
- [30] D. Georges, C. Canudas de Wit, et J. Ramirez. Nonlinear h_2 and h_∞ optimal controllers for current-fed induction motors. Dans *Proc. of the European Control Conference*, pages 669–674, Bruxelles, Belgique, 1997. Accepté au IEEE Trans. on Automatic Control.
- [31] G. Hainemann et W. Leonhard. Self-tuning field-oriented control of an induction motor drive. Dans *Proc. of the 1990 Int. Power Electronics Conference*, Tokyo, Japan, 1990.
- [32] V. Hosinger. Induction motor operating from inverter. Dans *Proc. of IEEE Conf. IAS Annu. Meeting*, pages 1276–1285, Cincinnati, USA, 1980.
- [33] A. Isidori. Feedback control of nonlinear systems. Dans *Proc. of the European Control Conference*, pages 1001–1012, Grenoble, France, 1991.
- [34] A. Isidori. Disturbance attenuation and h_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(9):1283–1293, 1992.
- [35] R. Joetten et H. Schierling. Control of the induction machine in the field weakening range. *Proc. of the IFAC World Congress*, (2):297–304, 1983.
- [36] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Mc Millan Pub., New Jersey, 1996.
- [37] D. Kim, I. Ha, et M. Ko. Control of induction motors via feedback linearization with input-output decoupling. *Int. Journal of Control*, 51(4):863–883, 1990.
- [38] G. Kim, I. Ha, et M. Ko. Control of induction motors for both high dynamic performance and high power efficiency. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 39(4):323–333, 1992.
- [39] S. Kim et S. Sul. Voltage control strategy for maximum torque operation of an induction machine in the field weakening region. Dans *IECON'94*, pages 599–604, Bologne, Italy, 1994.
- [40] D. E. Kirk. *Optimal Control Theory*. Prentice-Hall, New Jersey, 1970.
- [41] D. S. Kirschen, D. W. Novotny, et T. A. Lipo. On-line efficiency optimization of a variable frequency induction motor drive. *IEEE Trans. on Industry Application*, 21(4):610–616, 1985.

- [42] D. S. Kirschen, D. W. Novotny, et T. A. Lipo. Optimal efficiency control of an induction motor drive. *Trans. on Energy Conversion*, 2(1):70–76, 1987.
- [43] D. S. Kirschen, D. W. Novotny, et W. Suwanwisoot. Minimizing induction motor losses by excitation control in variable frequency drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, 20(5):1244–1250, 1984.
- [44] A. Kusko et D. Galler. Control means for minimisation of losses in ac and dc motor drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, 19(4):561–570, 1983.
- [45] W. Leonhard. *Control of Electric Drives*. Springer-Verlag, 1996.
- [46] W. Leonhard. Controlled ac drives, a successful transition from ideas to industrial practice. *Control Eng. Practice*, 7(1):897–908, 1996.
- [47] R. Lessmeier, W. Schumacher, et W. Leonhard. Microprocessor-controlled ac-servo drives with synchronous or induction motors: Which is preferable ? *IEEE Trans. on Industry Application*, 22(5):812–819, 1986.
- [48] R. D. Lorenz et S. Yang. Efficiency-optimized flux trajectories for closed-cycle operation of field-orientation induction machine drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, 28(3):574–580, 1992.
- [49] K. Matsuse, M. T. Sukakoshi, L. Huang, et T. Yamada. A determining method of flux level for deadbeat flux level controlled direct-field-oriented induction motors using adaptive flux observer. Dans *IECON'94*, pages 287–392, Bologne, Italy, 1994.
- [50] E. Mendes, J. P. Ingrassia, S. I. Seleme Jr., C. Canudas de Wit, et A. Razek. Robust torque control of induction motors with power factor optimization : Experimental implementation. Dans *IECON'94*, pages 2143–2148, Bologne, Italy, 1994.
- [51] E. Mendes et A. Razek. Mathematical stability analysis of field oriented control in induction motor drives. Dans *IMACS/IFAC - MIM-S2'93*, pages 288–295, Bruxelles, Belgique, 1993.
- [52] T. Murata, T. Tsuchia, et I. Takeda. A new synthesis method for efficiency optimized speed control system of vector-controlled induction machine. Dans *Proc. of the Power Electronics Specialist Conference*, pages 862–869, 1988.
- [53] T. Murata, T. Tsuchia, et I. Takeda. Vector control for induction machine on the application of optimal control theory. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 37(4):283–290, 1990.
- [54] J.M.D. Murphy et V.B. Honsinger. Efficiency optimization of invert-fed induction motor drives. Dans *Conf. Rec. IEEE Ind. Applic. Soc.*, pages 544–552, Bruxelles, Belgique, 1982.

- [55] A. Nabae, K. Otsuka, H. Uchino, et R. Kurosawa. An approach to flux control of induction motors operated with variable-frequency power supply. *IEEE Trans. on Industry Application*, (3):342–350, 1980.
- [56] Naslin. *Thorie de la commande et conduite optimale*. Bibliothèque de l'Automatique, Paris, 1978.
- [57] P. Nicklasson, R. Ortega, et G. Espinosa. Passivity-based control of a class of blondel-park transformable electric machines. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 42(5):283–290, 1997.
- [58] F. Nola. *Power Factor Control Systems for Induction Motor*. Brevet Américain 4 052 648, USA, 1977.
- [59] T. Nondahl. Evolution of electrical machines for motion control. Dans *Proc. of the IFAC World Congress*, pages 439–443, San Francisco, USA, 1996.
- [60] R. Novotnak. *Non-linear control of un Induction Motor with Saturation: Theory and Experiment*. Thèse de Doctorat, University of Pittsburgh, Pittsburgh, Usa, 1995.
- [61] R. Novotnak, J. Chiasson, et M. Bodson. High performance motion control of an induction motor with magnetic saturation. Dans *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2145–2150, New Orleans, USA, 1995.
- [62] O. Ojo, I. Bhat, et G. Sugita. Steady-state optimization of induction motor drives operating in the field weakening region. Dans *Proc. of the Power Electronics Specialist Conference*, pages 979–985, Seattle, USA, 1993.
- [63] R. Ortega, C. Canudas, et S. I. Seleme. Nonlinear control of induction motors: Torque tracking with unknown load disturbance. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 38(11):1675–1680, 1993.
- [64] M. H. Park et S. K. Sul. Microprocessor-based optimal-efficiency drive of an induction motor. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 31(1):69–73, 1984.
- [65] E. R. Pinch. *Optimal control and the calculus of variations*. Oxford Science Pub., Oxford, 1995.
- [66] Powell. *Digital control systems*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [67] J. Ramirez. Etude des aspects d'implantation des lois de commande non linaires pour la poursuite de couple d'une machine asynchrone. Master's thesis, LAG, INPG, Grenoble, France, 1994.
- [68] J. Ramirez et C. Canudas. Optimal torque-flux control for induction motors: experimental evaluation. Dans *Proc. of Electrimacs Congres*, pages 763–768, Saint Nazaire, France, 1996.

- [69] J. Ramirez et C. Canudas. Dispositif pour minimiser les pertes elctriques des machines asynchrones. Grenoble, France, 1997. Rapport interne.
- [70] J. Ramirez et C. Canudas. Performance evaluation of induction motors under optimal-energy control. Dans *Mem. Ecole d'Et, LAG*, Grenoble, France, 1997. A soumettre au IEEE Trans. on Control Systems Technology.
- [71] Schultz et Melsa. *State functions and linear control systems*. McGraw-Hill, New York, 1967.
- [72] S. I. Seleme Jr. Optimal energy reference observer-based torque tracking : A nonlinear feedback control in the $\alpha\beta$ frame. Grenoble, France, 1994. Rapport interne.
- [73] S. I. Seleme Jr. et C. Canudas de Wit. Minimum energy operation conditions of induction motors under torque regulation. Dans *Workshop on Motion Control for Intelligent Automation*, pages 127–133, Perugia, Italy, 1992.
- [74] S. I. Seleme Jr., E. Mendes, C. Canudas de Wit, et A. Razek. Experimental validation of the minimum energy approach for induction motor control. Dans *Proc. of the IEEE/SMC'93 Conference*, pages 78–83, Le Touquet, France, 1993.
- [75] S. I. Seleme Jr., M. Petersson, et C. Canudas de Wit. The torque tracking of induction motors via magnetic energy optimization. Dans *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1838–1843, Lake Buena Vista, USA, 1994.
- [76] G. Sousa, B. Bose, et G. Cleland. Fuzzy logic based on-line efficiency optimization control of an indirect vector-controlled induction motor drive. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 42(2):192–198, 1995.
- [77] V. R. Stefanovic et T. H. Barton. Static torque characteristics of an induction motor with a variable frequency supply. Dans *Proc. of the IEEE/PES Winter Meet.*, pages 1–3, New York, USA, 1972.
- [78] G. C. Verghese et S. R. Sanders. Observers for flux estimation in induction machines. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 35(1):85–94, 1988.
- [79] T. von Raumer. *Commande à Énergie Minimale de la Machine Asynchrone: Application à la Robotique de Machine Asynchrone*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, 1994.
- [80] T. von Raumer, J. M. Dion, et L. Dugard. Adaptive nonlinear control of induction motors with flux observer. Dans *Proc. of the IEEE/SMC'93 Conference*, pages 84–89, Le Touquet, France, 1993.
- [81] I. T. Wallace, D. W. Novotny, R. D. Lorenz, et D.M. Divan. Increasing the dynamic torque per ampere capability of induction machines. *IEEE Trans. on Industry Application*, 30(1):146–153, 1994.

- [82] X. Xu et D. W. Novotny. Selection of the flux reference for induction machines drives in the field weakening region. *IEEE Trans. on Industry Application*, 28(6):1356–1358, 1992.
- [83] M. Young et R. Hoft. Optimal control of vehicle-drive. Dans *Proc. of IEEE Conf. 1978 IAS Annu. Meeting*, pages 401–407, USA, 1978.
- [84] Y. Yu et H. Wu. Lqr/ltr control of an ac induction servo drive. *IEEE Trans. on Power Electronics*, 10(2):214–221, 1995.