

vers une Analyse Multirésolution Non-Uniforme fondée sur le Nombre d'Or

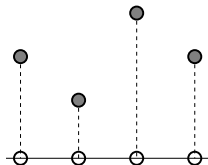
C. Gérot, V. Nivoliers, N. Stewart, V. Ostromoukhov

Séminaire du DIS - GIPSA-lab

jeudi 26 juin 2012

Schéma de Subdivision et Multirésolution

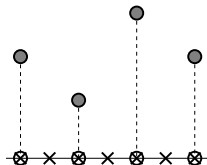
Schéma de Subdivision = Synthèse Multirésolution sans détails



I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelets* (1992)

Schéma de Subdivision et Multirésolution

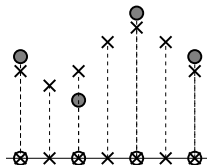
Schéma de Subdivision = Synthèse Multirésolution sans détails



I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelets* (1992)

Schéma de Subdivision et Multirésolution

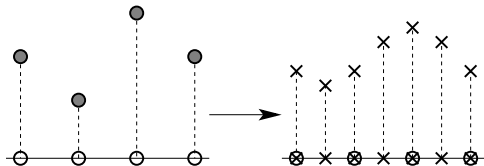
Schéma de Subdivision = Synthèse Multirésolution sans détails



I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelets* (1992)

Schéma de Subdivision et Multirésolution

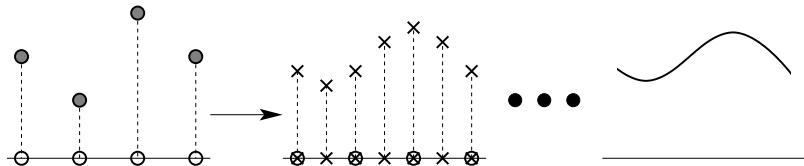
Schéma de Subdivision = Synthèse Multirésolution sans détails



I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelets* (1992)

Schéma de Subdivision et Multirésolution

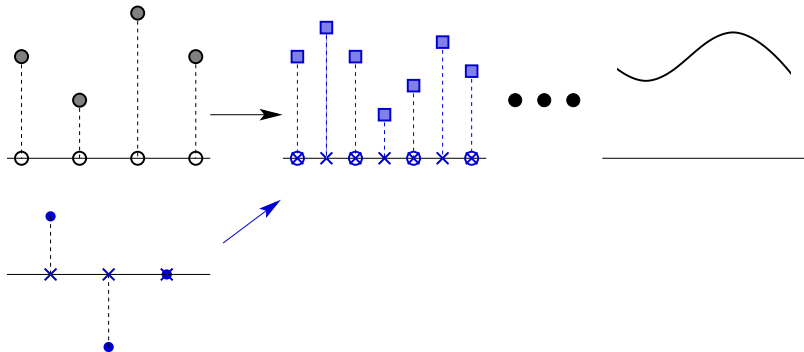
Schéma de Subdivision = Synthèse Multirésolution sans détails



I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelets* (1992)

Schéma de Subdivision et Multirésolution

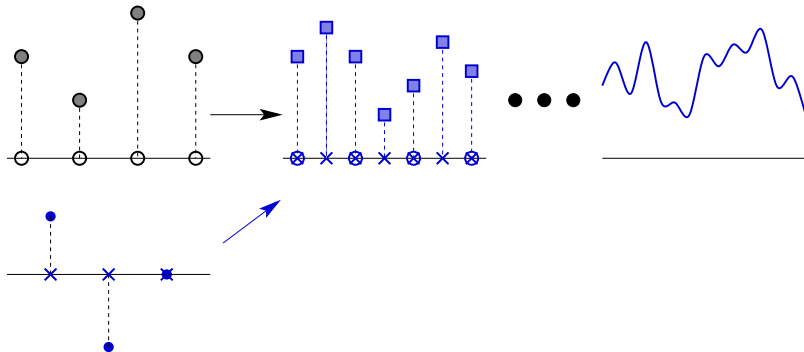
Schéma de Subdivision = Synthèse Multirésolution sans détails



I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelets* (1992)

Schéma de Subdivision et Multirésolution

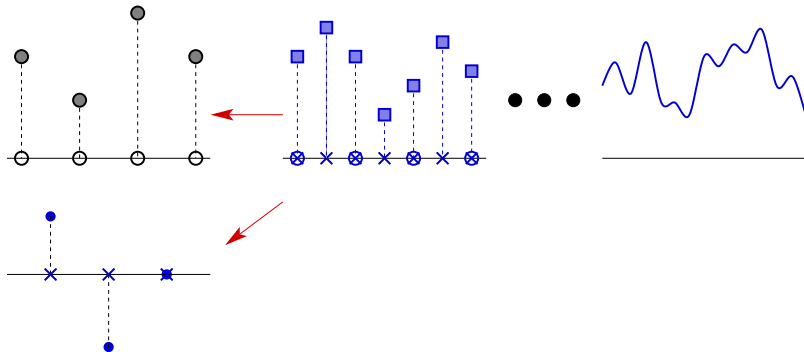
Schéma de Subdivision = Synthèse Multirésolution sans détails



I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelets* (1992)

Schéma de Subdivision et Multirésolution

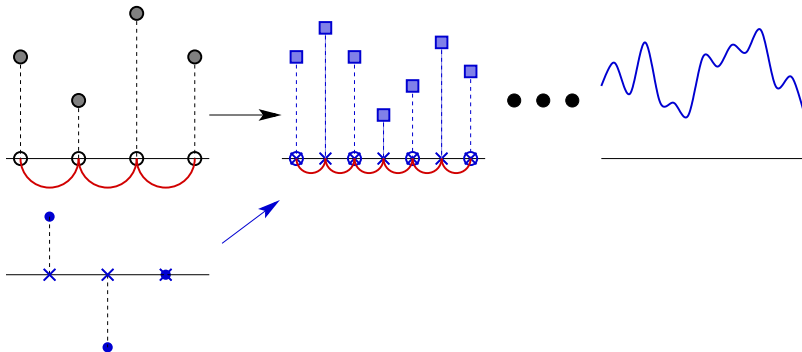
Schéma de Subdivision = Synthèse Multirésolution sans détails



I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelets* (1992)

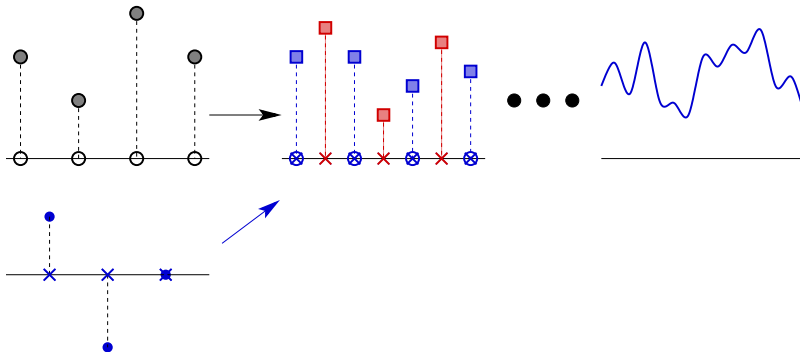
Multirésolution Uniforme

Des **intervalles identiques** (et donc division n -adique)



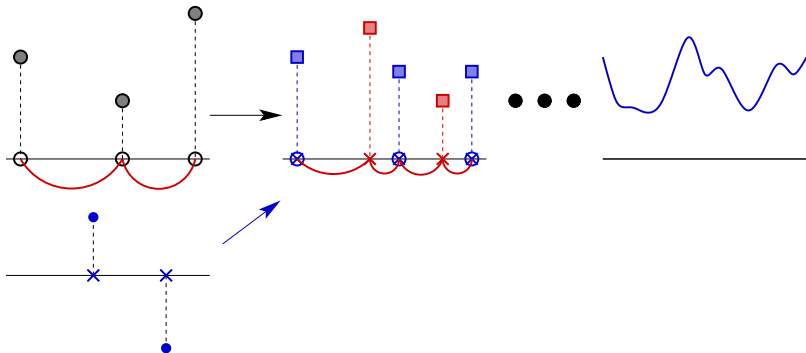
Multirésolution Uniforme

Des intervalles identiques (et donc division n -adique)



Multirésolution Non-Uniforme

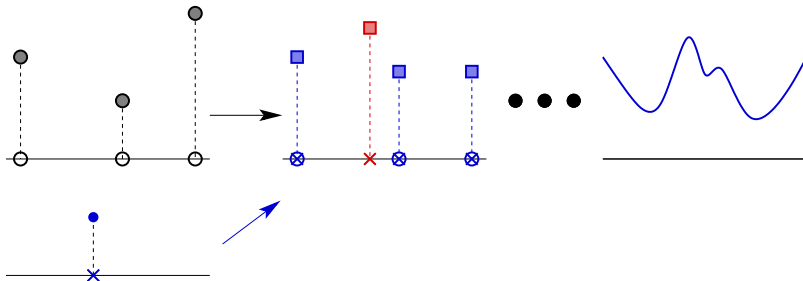
Des intervalles quelconques mais division n -adique



W. Sweldens *The lifting scheme : A construction of second generation wavelets* (1997)

Multirésolution Non-Uniforme

Des intervalles quelconques et **division non n -adique**



Multirésolution Non-Uniforme

Des intervalles quelconques et **division non n -adique**

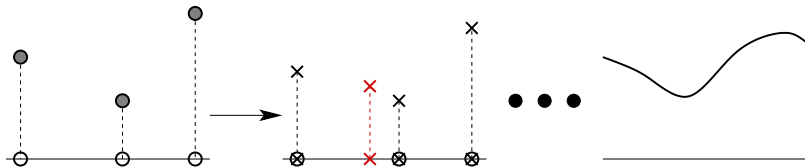


Schéma de Subdivision Non-Uniforme non n -adique

- efficace : nombre fini de règles différentes
- divisions d'intervalle décrites par un L-système
- convergence non pas en $(\frac{1}{n})^2$ mais $(\frac{1}{\varphi})^2$

Multirésolution Non-Uniforme

Des intervalles quelconques et **division non n -adique**

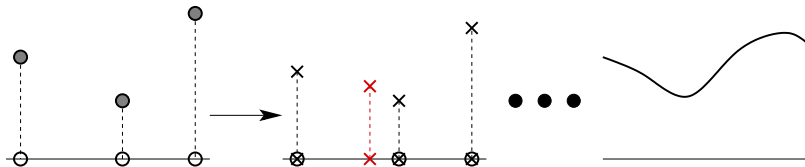


Schéma de Subdivision Non-Uniforme non n -adique

- efficace : nombre fini de règles différentes
- divisions d'intervalle décrites par un L-système
- convergence non pas en $(\frac{1}{n})^2$ mais $(\frac{1}{\varphi})^2$

Question ouverte : sur-échantillonnage non-uniforme non n -adique a-t-il un intérêt du point de vue TS ?

Plan

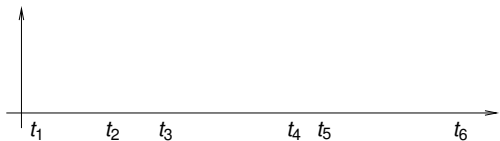
- 1 Subdivision fondée sur des B-splines non-uniformes
- 2 L-système pour la subdivision d'intervalles
- 3 Validité d'un L-système
- 4 Un nombre réduit de règles

Plan

- 1 Subdivision fondée sur des B-splines non-uniformes
- 2 L-système pour la subdivision d'intervalles
- 3 Validité d'un L-système
- 4 Un nombre réduit de règles

B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

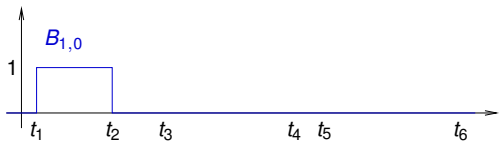
input : ensemble de nœuds



B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

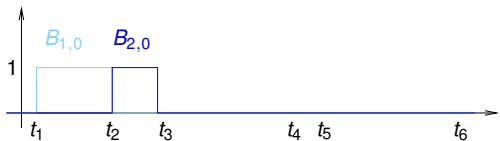
$$d = 0$$



B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

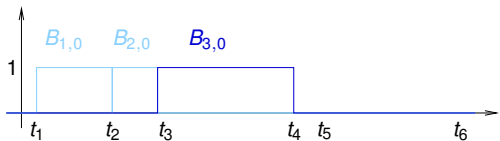
$$d = 0$$



B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

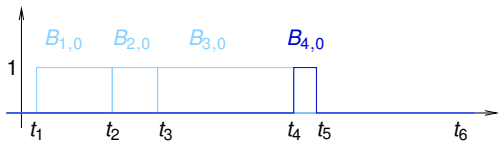
$$d = 0$$



B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

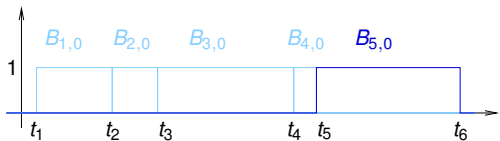
$$d = 0$$



B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

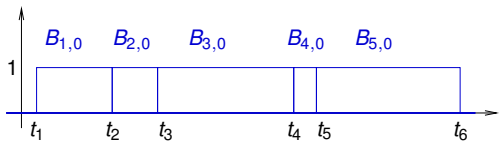
$$d = 0$$



B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

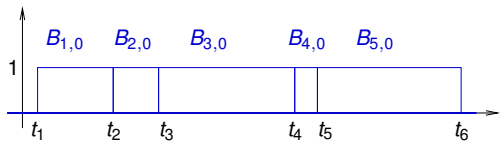
$$d = 0$$



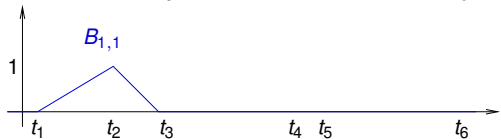
B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

$d = 0$



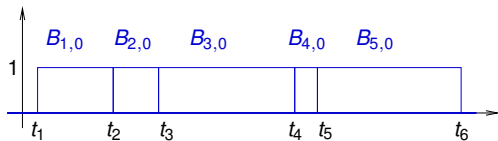
$d = 1$



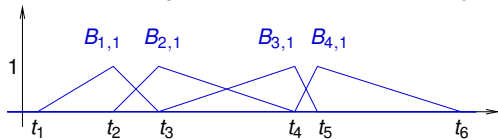
B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

$d = 0$



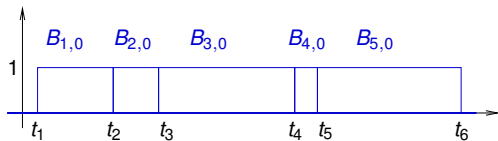
$d = 1$



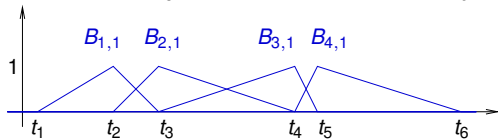
B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

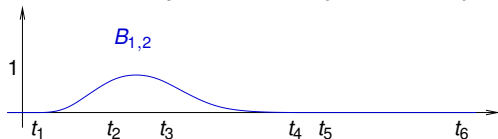
$d = 0$



$d = 1$



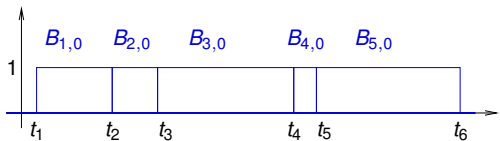
$d = 2$



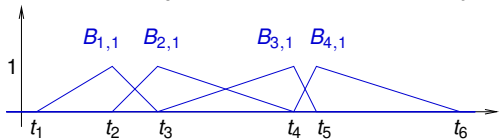
B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

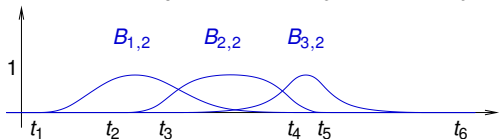
$d = 0$



$d = 1$

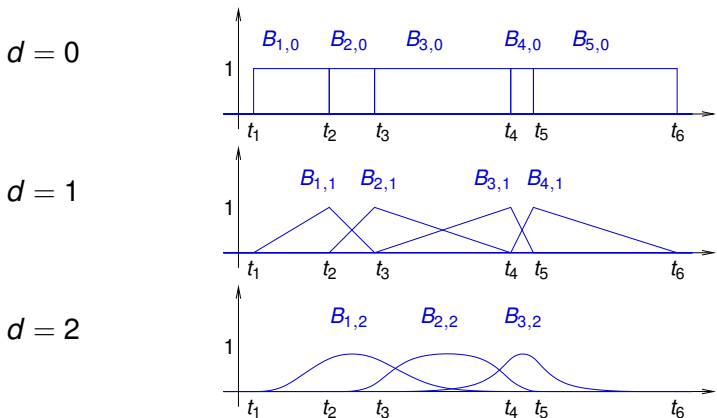


$d = 2$



B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

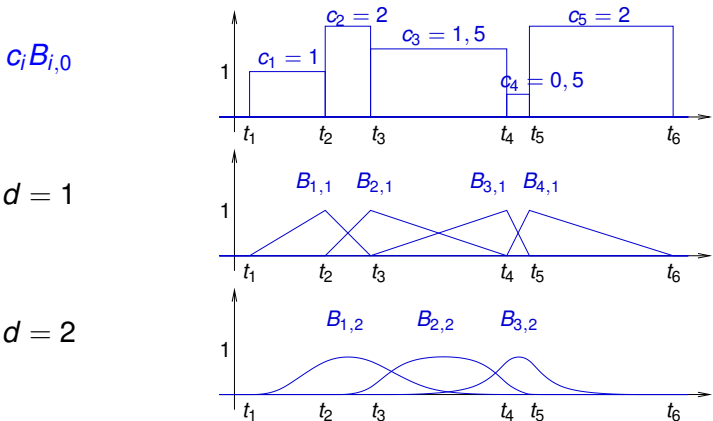
input : ensemble de nœuds + degré polynomial d



fonc. déf. sur $[t_{1+d}, t_{m-d}]$, de continuité $d - 1$ en chaque t_i (si \neq)

B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

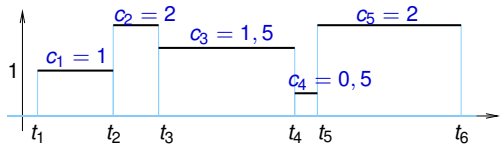


fonc. déf. sur $[t_{1+d}, t_{m-d}]$, de continuité $d - 1$ en chaque t_i (si \neq)

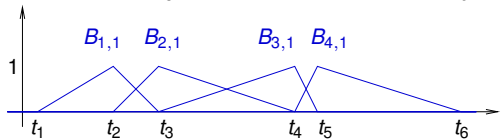
B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

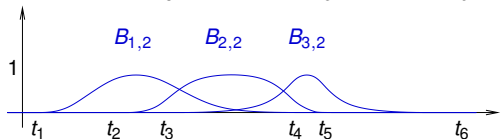
$$S_0 = \sum_i c_i B_{i,0}$$



$d = 1$



$d = 2$



fonc. déf. sur $[t_{1+d}, t_{m-d}]$, de continuité $d - 1$ en chaque t_i (si \neq)

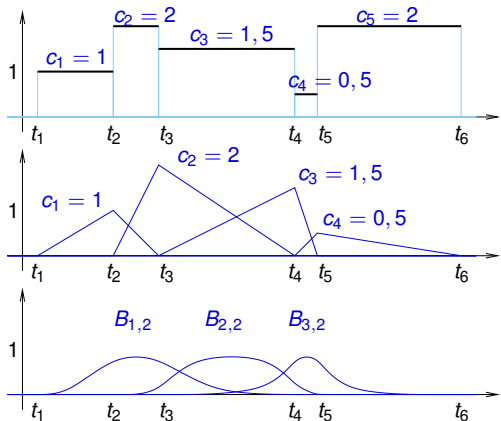
B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

$$S_0 = \sum_i c_i B_{i,0}$$

$$c_i B_{i,1}$$

$$d = 2$$



fonc. déf. sur $[t_{1+d}, t_{m-d}]$, de continuité $d - 1$ en chaque t_i (si \neq)

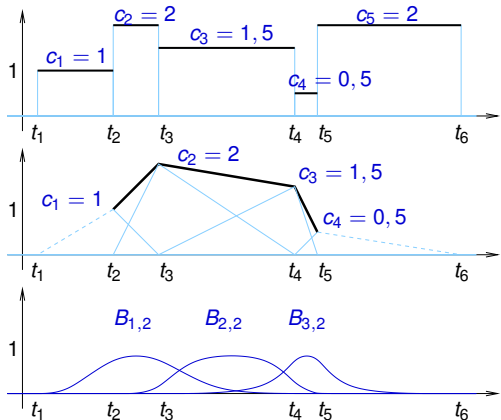
B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

$$S_0 = \sum_i c_i B_{i,0}$$

$$S_1 = \sum_i c_i B_{i,1}$$

$$d = 2$$



fonc. déf. sur $[t_{1+d}, t_{m-d}]$, de continuité $d - 1$ en chaque t_i (si \neq)

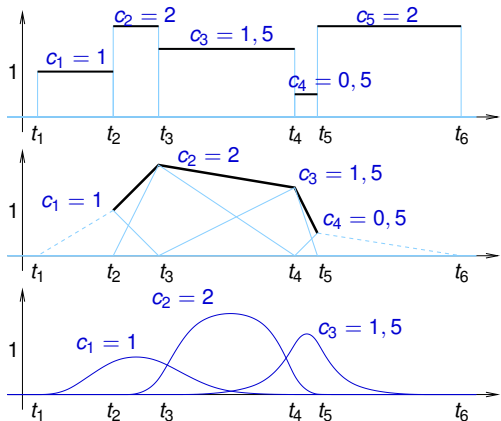
B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

$$S_0 = \sum_i c_i B_{i,0}$$

$$S_1 = \sum_i c_i B_{i,1}$$

$$c_i B_{i,2}$$

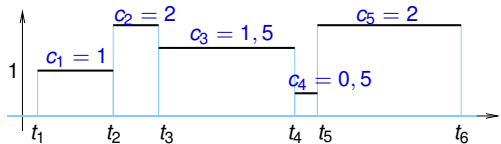


fonc. déf. sur $[t_{1+d}, t_{m-d}]$, de continuité $d - 1$ en chaque t_i (si \neq)

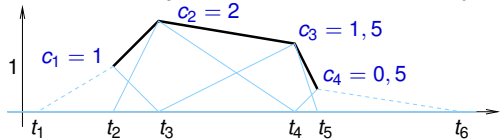
B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial d

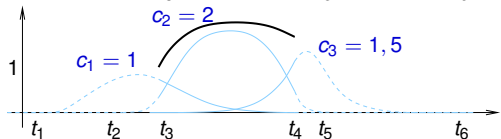
$$S_0 = \sum_i c_i B_{i,0}$$



$$S_1 = \sum_i c_i B_{i,1}$$

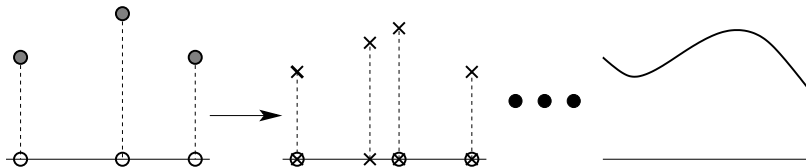


$$S_2 = \sum_i c_i B_{i,2}$$



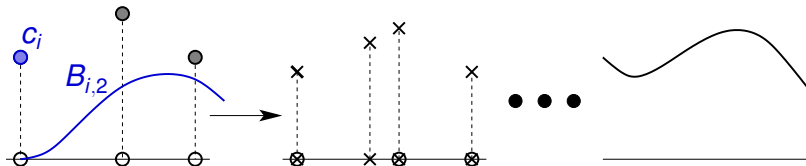
fonc. déf. sur $[t_{1+d}, t_{m-d}]$, de continuité $d - 1$ en chaque t_i (si \neq)

Subdivision par insertion de nœud B-spline



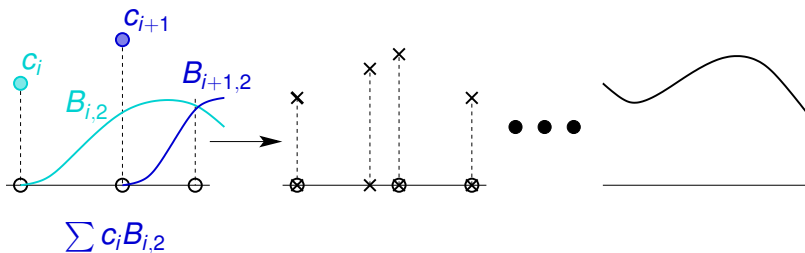
- Associer une B-spline B_i à chaque c_i
- Définir $\{d_j\}$ pour conserver la même spline S :

Subdivision par insertion de nœud B-spline



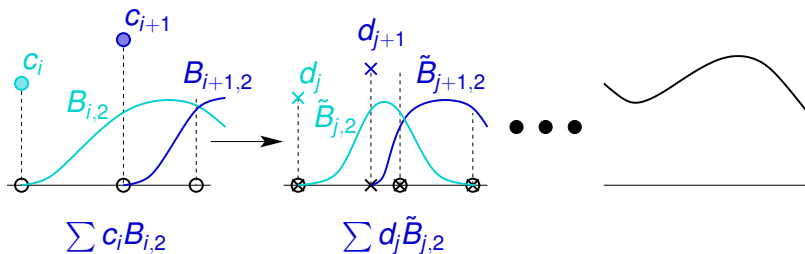
- Associer une B-spline B_i à chaque c_i
- Définir $\{d_j\}$ pour conserver la même spline S :

Subdivision par insertion de nœud B-spline



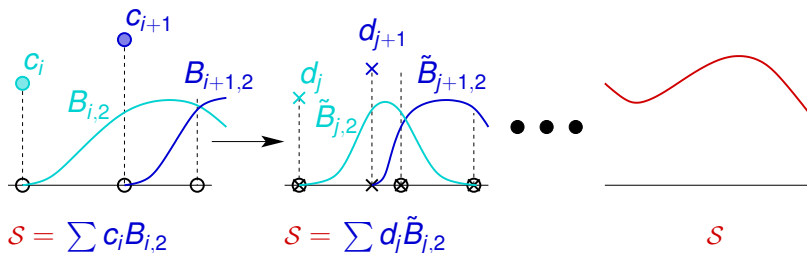
- Associer une B-spline B_j à chaque $c_j \Rightarrow$ une spline
- Définir $\{d_j\}$ pour conserver la même spline S :

Subdivision par insertion de nœud B-spline



- Associer une B-spline B_i à chaque $c_i \Rightarrow$ une spline à chaque résolution
- Définir $\{d_j\}$ pour conserver la même spline S :

Subdivision par insertion de nœud B-spline



- Associer une B-spline B_i à chaque $c_i \Rightarrow$ une spline à chaque résolution
- Définir $\{d_j\}$ pour conserver la même spline S :

$$d_j = \sum_k \alpha_k c_{j-k}$$

Règles indépendantes du pas de subdivision

$$d_j = \sum_k \alpha_k c_{j-k}$$

Règles indépendantes du pas de subdivision

$$c_j^{(s+1)} = \sum_k \alpha_k^{(s)} c_{j-k}^{(s)}$$

Règles indépendantes du pas de subdivision

$$c_j^{(s+1)} = \sum_k \alpha_k^{(s)} c_{j-k}^{(s)}$$

En notant $l_j^{(s)}$ la longueur d'un intervalle à l'étape s :

$$\alpha_k^{(s)} = \sum \Pi \frac{\sum l_j^{(s+1)}}{\sum l_i^{(s)}}$$

Règles indépendantes du pas de subdivision

$$c_j^{(s+1)} = \sum_k \alpha_k^{(s)} c_{j-k}^{(s)}$$

En notant $l_i^{(s)}$ la longueur d'un intervalle à l'étape s :

$$\alpha_k^{(s)} = \sum \prod \frac{\sum l_j^{(s+1)}}{\sum l_i^{(s)}}$$

Une solution pour rendre $\alpha_k^{(s)}$ indépendant de s :

$$l_i^{(s)} = \frac{l_i}{\rho^s} \Rightarrow \alpha_k^{(s)} = \sum \prod \frac{1}{\rho} \frac{\sum l_j}{\sum l_i}$$

Règles indépendantes du pas de subdivision

$$c_j^{(\mathbf{s}+1)} = \sum_k \alpha_k^{(\mathbf{s})} c_{j-k}^{(\mathbf{s})}$$

En notant $l_j^{(\mathbf{s})}$ la longueur d'un intervalle à l'étape \mathbf{s} :

$$\alpha_k^{(\mathbf{s})} = \sum \prod \frac{\sum l_j^{(\mathbf{s}+1)}}{\sum l_i^{(\mathbf{s})}}$$

Une solution pour rendre $\alpha_k^{(\mathbf{s})}$ indépendant de \mathbf{s} :

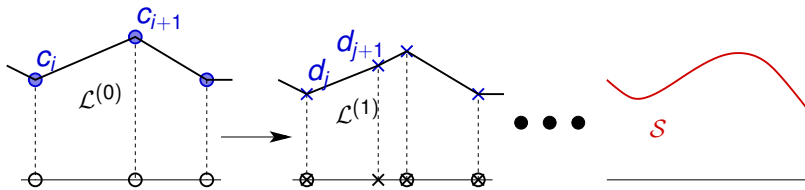
$$l_i^{(\mathbf{s})} = \frac{l_i}{\rho^{\mathbf{s}}} \Rightarrow \alpha_k^{(\mathbf{s})} = \sum \prod \frac{1}{\rho} \frac{\sum l_j}{\sum l_i}$$

On obtient alors la convergence suivante :

$$\|\mathcal{L}^{(\mathbf{s})} - \mathcal{S}\| \leq K \left(\frac{1}{\rho^2} \right)^{\mathbf{s}} \|\mathcal{S}''\|$$

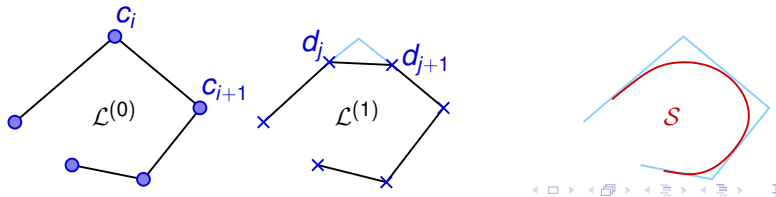
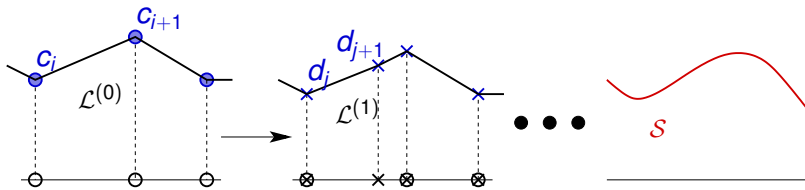
Règles indépendantes du pas de subdivision

$$\|\mathcal{L}^{(s)} - \mathcal{S}\| \leq K \left(\frac{1}{\rho^2} \right)^s \|\mathcal{S}''\|$$



Règles indépendantes du pas de subdivision

$$\|\mathcal{L}^{(s)} - S\| \leq K \left(\frac{1}{\rho^2} \right)^s \|S''\|$$



Nécessité d'un subdiviseur d'intervalles

peut-on définir un procédé de subdivision d'intervalles tel que

$$l_i^{(\mathbf{s})} = \frac{l_i}{\rho^{\mathbf{s}}}$$

- des règles de subdivision indépendantes de l'étape \mathbf{s} :

$$c_j^{(\mathbf{s}+1)} = \sum_k \alpha_k c_{j-k}^{(\mathbf{s})}$$

- assurant une convergence vers un objet \mathcal{S} connu :

$$\mathcal{S} = \sum_i c_i^{(0)} B_{i,2}$$

- avec une vitesse connue :

$$\|\mathcal{L}^{(\mathbf{s})} - \mathcal{S}\| \leq K \left(\frac{1}{\rho^2} \right)^{\mathbf{s}} \|S''\|$$

Plan

- 1 Subdivision fondée sur des B-splines non-uniformes
- 2 L-système pour la subdivision d'intervalles
- 3 Validité d'un L-système
- 4 Un nombre réduit de règles

Système de Lindenmayer

L-système $G = (\Sigma, \Pi, \alpha)$

- $\Sigma = \{A_1, \dots, A_n\}$: alphabet ;
- $\Pi = \{A_i \rightarrow A_{i_1} \cdots A_{i_r}\}_{i=1}^n$: règles de ré-écriture ;
- $\alpha \in \Sigma^+$: configuration initiale.

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha \in \Sigma^+$: configuration initiale.

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSL**S**LLSL

SLLSL**L**SLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSL**SLLSL**

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S

L

SL

LSL

SLLSL

LSLSLLSL

SLLSLLSLSLLSL

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

<i>S</i>	1
<i>L</i>	1
<i>SL</i>	2
<i>LSL</i>	3
<i>SLLSL</i>	5
<i>LSLSLLSL</i>	8
<i>SLLSLLSLSLLSL</i>	13

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

<i>S</i>	1
<i>L</i>	1
<i>SL</i>	2
<i>LSL</i>	3
<i>SLLSL</i>	5
<i>LSLSLLSL</i>	8
<i>SLLSLLSLSLLSL</i>	13

$$F_i + F_{i+1} = F_{i+2}$$

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

<i>S</i>	1
<i>L</i>	1
<i>SL</i>	2
<i>LSL</i>	3
<i>SLLSL</i>	5
<i>LSLSLLSL</i>	8
<i>SLLSLLSLSLLSL</i>	13

$$F_i + F_{i+1} = F_{i+2}$$

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S	1
L	1
SL	2
LSL	3
SLLSL	5
LSLSLLSL	8
SLLSLLSLSLLSL	13

$$F_i + F_{i+1} = F_{i+2}$$

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

<i>S</i>	1
<i>L</i>	1
<i>SL</i>	2
<i>LSL</i>	3
<i>SLLSL</i>	5
<i>LSLSLLSL</i>	8
<i>SLLSLLSLSLLSL</i>	13

$$F_i + F_{i+1} = F_{i+2}$$

Système de Lindenmayer

L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

<i>S</i>	1
<i>L</i>	1
<i>SL</i>	2
<i>LSL</i>	3
<i>SLLSL</i>	5
<i>LSLSLLSL</i>	8
<i>SLLSLLSLSLLSL</i>	13

$$F_i + F_{i+1} = F_{i+2}$$

Système de Lindenmayer

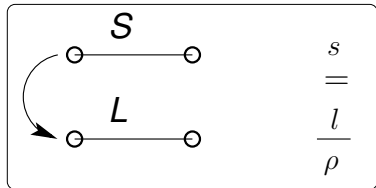
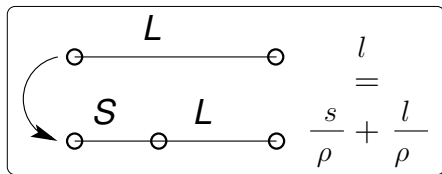
L-système Fibonacci

- $\Sigma = \{S, L\}$;
- $\Pi = \{S \rightarrow L; L \rightarrow SL\}$;
- $\alpha = S$.

S	1
L	1
SL	2
LSL	3
$SLLSL$	5
$LSLSLLSL$	8
$SLLSLLSLLSL$	13

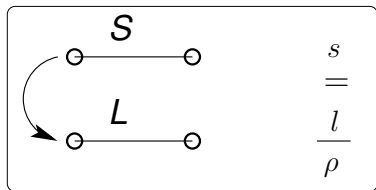
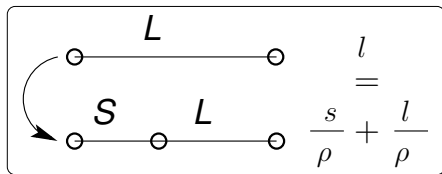
$$F_i + F_{i+1} = F_{i+2}$$

Descripteur de subdivision d'intervalles



$$\left. \begin{array}{l} l + s \\ l \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \rho l \\ = \rho s \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ s \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} l \\ s \end{bmatrix}$$

Descripteur de subdivision d'intervalles



$$\left. \begin{array}{l} l + s \\ l \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \rho l \\ = \rho s \end{array} \left. \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} l \\ s \end{array} \right] \\ = \rho \left[\begin{array}{c} l \\ s \end{array} \right] \end{array} \right.$$

$$\left(\rho, \left[\begin{array}{c} l \\ s \end{array} \right] \right) = \left(\varphi, \left[\begin{array}{c} \varphi \\ 1 \end{array} \right] \right) \quad \text{éléments propres de } \mathbf{M} := \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right]$$

Descripteur de subdivision d'intervalles

L-système $G = (\Sigma, \Pi, \alpha)$

- $\Sigma = \{A_1, \dots, A_n\}$: alphabet ;
 - $\Pi = \{A_i \rightarrow A_{i_1} \cdots A_{i_r}\}_{i=1}^n$: règles de ré-écriture ;
 - $\alpha \in \Sigma^+$: configuration initiale.
-
- l_i : longueur d'un intervalle avec le label A_i ; $\mathbf{l} = [l_i]$.
 - m_{ij} : nombre de A_j à droite de la règle de ré-écriture de A_i ;
 $\mathbf{M} := [m_{ij}]$.

Un L-système définit un procédé de subdivision d'intervalles tel que $l_i^{(\mathbf{s})} = \frac{l_i}{\rho^{\mathbf{s}}}$ si (ρ, \mathbf{l}) sont éléments propres de \mathbf{M} .

Descripteur de subdivision d'intervalles

L-système $G = (\Sigma, \Pi, \alpha)$

- $\Sigma = \{A_1, \dots, A_n\}$: alphabet ;
 - $\Pi = \{A_i \rightarrow A_{i_1} \cdots A_{i_r}\}_{i=1}^n$: règles de ré-écriture ;
 - $\alpha \in \Sigma^+$: configuration initiale.
-
- l_i : longueur d'un intervalle avec le label A_i ; $\mathbf{l} = [l_i]$.
 - m_{ij} : nombre de A_j à droite de la règle de ré-écriture de A_i ;
 $\mathbf{M} := [m_{ij}]$.

Un L-système définit un procédé de subdivision d'intervalles tel que $l_i^{(\mathbf{s})} = \frac{l_i}{\rho^{\mathbf{s}}}$ si (ρ, \mathbf{l}) sont éléments propres de \mathbf{M} .

Descripteur de subdivision d'intervalles

L-système $G = (\Sigma, \Pi, \alpha)$

- $\Sigma = \{A_1, \dots, A_n\}$: alphabet ;
 - $\Pi = \{A_i \rightarrow A_{i_1} \cdots A_{i_r}\}_{i=1}^n$: règles de ré-écriture ;
 - $\alpha \in \Sigma^+$: configuration initiale.
-
- l_i : longueur d'un intervalle avec le label A_i ; $\mathbf{l} = [l_i]$.
 - m_{ij} : nombre de A_j à droite de la règle de ré-écriture de A_i ;
 $\mathbf{M} := [m_{ij}]$.

Un L-système définit un procédé de subdivision d'intervalles tel que $l_i^{(\mathbf{s})} = \frac{l_i}{\rho^{\mathbf{s}}}$ si (ρ, \mathbf{l}) sont éléments propres de \mathbf{M} .

Plan

- 1 Subdivision fondée sur des B-splines non-uniformes
- 2 L-système pour la subdivision d'intervalles
- 3 Validité d'un L-système**
- 4 Un nombre réduit de règles

Validité d'un L-système

L-système valide (descripteur de subdivision d'intervalles)

Il existe (ρ, \mathbf{l}) éléments propres de \mathbf{M} tels que

- l_i longueurs d'intervalles : $l_i > 0$ *i.e.* \mathbf{l} positif ;
- convergence : $\rho > 1$.

Validité d'un L-système

L-système valide (descripteur de subdivision d'intervalles)

Il existe (ρ, \mathbf{l}) éléments propres de \mathbf{M} tels que

- l_i longueurs d'intervalles : $l_i > 0$ i.e. \mathbf{l} positif ;
- convergence : $\rho > 1$.

Théorème

Si le graphe de \mathbf{M} , noté $\mathcal{G}(\mathbf{M})$,

- est fortement connexe
- possède un nœud de degré sortant supérieur ou égal à 2

alors le L-système est valide en tant que descripteur de subdivision d'intervalles.

Condition suffisante de validité

Théorème

Si le **graphe de M**, noté $\mathcal{G}(\mathbf{M})$,

- est fortement connexe
- possède un nœud de degré sortant supérieur ou égal à 2

alors le L-système est valide : $\rho > 1$ et \mathbf{l} positif.

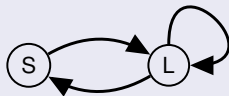
Grphe de la matrice \mathbf{M}

$\mathcal{G}(\mathbf{M})$ est le graphe orienté :

- nœuds $\{\mathcal{A}_i\}$: un par symbole
- arête $\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j$: ssi
 $A_i \rightarrow \dots A_j \dots$

Exemple Fibonacci

$$\begin{cases} S \rightarrow L \\ L \rightarrow SL \end{cases}$$



Condition suffisante de validité

Théorème

Si le graphe de \mathbf{M} , noté $\mathcal{G}(\mathbf{M})$,

- est fortement connexe
- possède un nœud de degré sortant supérieur ou égal à 2

alors le L-système est valide : $\rho > 1$ et \mathbf{l} positif.

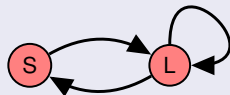
Graphe de la matrice \mathbf{M}

$\mathcal{G}(\mathbf{M})$ est le graphe orienté :

- nœuds $\{\mathcal{A}_i\}$: un par symbole
- arête $\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j$: ssi
 $A_i \rightarrow \dots A_j \dots$

Exemple Fibonacci

$$\begin{cases} S \rightarrow L \\ L \rightarrow SL \end{cases}$$



Condition suffisante de validité

Théorème

Si le graphe de \mathbf{M} , noté $\mathcal{G}(\mathbf{M})$,

- est fortement connexe
- possède un nœud de degré sortant supérieur ou égal à 2

alors le L-système est valide : $\rho > 1$ et \mathbf{l} positif.

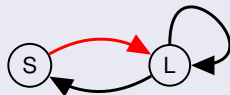
Graphe de la matrice \mathbf{M}

$\mathcal{G}(\mathbf{M})$ est le graphe orienté :

- nœuds $\{\mathcal{A}_i\}$: un par symbole
- arête $\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j$: ss_i
 $\mathcal{A}_i \rightarrow \dots \mathcal{A}_j \dots$

Exemple Fibonacci

$$\begin{cases} S \rightarrow L \\ L \rightarrow SL \end{cases}$$



Condition suffisante de validité

Théorème

Si le graphe de \mathbf{M} , noté $\mathcal{G}(\mathbf{M})$,

- est fortement connexe
- possède un nœud de degré sortant supérieur ou égal à 2

alors le L-système est valide : $\rho > 1$ et \mathbf{l} positif.

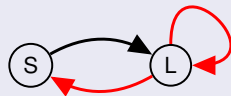
Graphe de la matrice \mathbf{M}

$\mathcal{G}(\mathbf{M})$ est le graphe orienté :

- nœuds $\{\mathcal{A}_i\}$: un par symbole
- arête $\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j$: ss_i
 $\mathcal{A}_i \rightarrow \dots \mathcal{A}_j \dots$

Exemple Fibonacci

$$\begin{cases} S \rightarrow L \\ L \rightarrow SL \end{cases}$$



Condition suffisante de validité

Théorème

Si le graphe de \mathbf{M} , noté $\mathcal{G}(\mathbf{M})$,

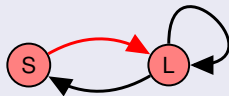
- est fortement connexe
 - possède un nœud de degré sortant supérieur ou égal à 2
- alors le L-système est valide : $\rho > 1$ et \mathbf{l} positif.

Graphe fortement connexe

$\forall (\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ il existe une suite d'arêtes orientées reliant \mathcal{A}_i à \mathcal{A}_j .

Exemple Fibonacci

$$\begin{cases} S \rightarrow L \\ L \rightarrow SL \end{cases}$$



Condition suffisante de validité

Théorème

Si le graphe de \mathbf{M} , noté $\mathcal{G}(\mathbf{M})$,

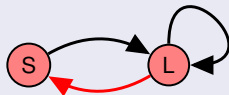
- est fortement connexe
 - possède un nœud de degré sortant supérieur ou égal à 2
- alors le L-système est valide : $\rho > 1$ et \mathbf{l} positif.

Graphe fortement connexe

$\forall (\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ il existe une suite d'arêtes orientées reliant \mathcal{A}_i à \mathcal{A}_j .

Exemple Fibonacci

$$\begin{cases} S \rightarrow L \\ L \rightarrow SL \end{cases}$$



Condition suffisante de validité

Théorème

Si le graphe de \mathbf{M} , noté $\mathcal{G}(\mathbf{M})$,

- est fortement connexe
 - possède un nœud de degré sortant supérieur ou égal à 2
- alors le L-système est valide : $\rho > 1$ et \mathbf{I} positif.

Graphe fortement connexe

$\forall (\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ il existe une suite d'arêtes orientées reliant \mathcal{A}_i à \mathcal{A}_j .

Exemple invalide



$$\left\{ \left(1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left(-1, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

Condition suffisante de validité

Théorème

Si le graphe de \mathbf{M} , noté $\mathcal{G}(\mathbf{M})$,

- est fortement connexe
- possède un nœud de degré sortant supérieur ou égal à 2

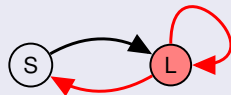
alors le L-système est valide : $\rho > 1$ et \mathbf{l} positif.

Degré sortant de \mathcal{A}_i

nombre d'arêtes $\mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j$

Exemple Fibonacci

$$\begin{cases} S \rightarrow L \\ L \rightarrow SL \end{cases}$$



Condition suffisante de validité

Théorème

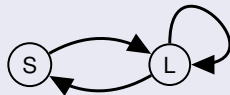
Si le graphe de \mathbf{M} , noté $\mathcal{G}(\mathbf{M})$,

- est fortement connexe
- possède un nœud de degré sortant supérieur ou égal à 2

alors le L-système est valide : $\rho > 1$ et \mathbf{l} positif.

Exemple Fibonacci

$$\begin{cases} S \rightarrow L \\ L \rightarrow SL \end{cases}$$



$$\left\{ \left(\varphi, \begin{bmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right), \left(\psi < 0, \begin{bmatrix} \psi & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

Condition non nécessaire de validité

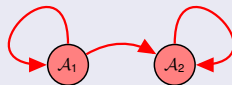
Théorème

Si le graphe de \mathbf{M} , noté $\mathcal{G}(\mathbf{M})$,

- est fortement connexe
 - possède un nœud de degré sortant supérieur ou égal à 2
- alors le L-système est valide : $\rho > 1$ et \mathbf{l} positif.

Exemple valide

$$\begin{cases} A_1 \rightarrow A_1 A_2 \\ A_2 \rightarrow A_2 A_2 A_2 \end{cases}$$



$$\left\{ \left(1, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(3, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

Nécessité d'un subdiviseur d'intervalles

- un **L-système valide** définit un procédé de subdivision d'intervalles tel que $l_i^{(\mathbf{s})} = \frac{l_i}{\rho^{\mathbf{s}}}$
- théorème : condition suffisante sur $\mathcal{G}(\mathbf{M})$

- des règles de subdivision indépendantes de l'étape \mathbf{s} :

$$c_j^{(\mathbf{s}+1)} = \sum_k \alpha_k c_{j-k}^{(\mathbf{s})}$$

- assurant une convergence vers un objet \mathcal{S} connu :

$$\mathcal{S} = \sum_i c_i^{(0)} B_{i,2}$$

- avec une vitesse connue :

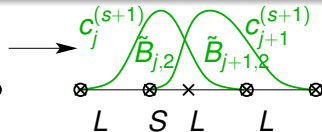
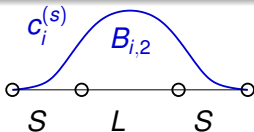
$$\|\mathcal{L}^{(\mathbf{s})} - \mathcal{S}\| \leq K \left(\frac{1}{\rho^2} \right)^{\mathbf{s}} \|S''\|$$

Plan

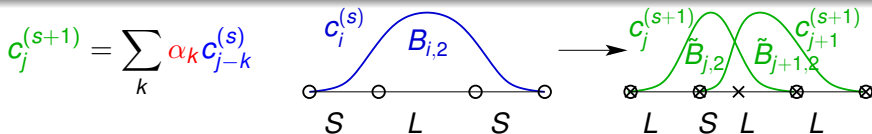
- 1 Subdivision fondée sur des B-splines non-uniformes
- 2 L-système pour la subdivision d'intervalles
- 3 Validité d'un L-système
- 4 Un nombre réduit de règles

Labels et Masques de subdivision

$$c_j^{(s+1)} = \sum_k \alpha_k c_{j-k}^{(s)}$$

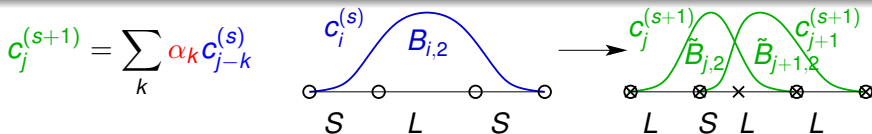


Labels et Masques de subdivision



$c_i^{(s)}$ participe à la définition de $c_j^{(s+1)}$
 si $\tilde{B}_{j,2}$ participe à la définition de $B_{i,2}$
 si $\text{Supp}(\tilde{B}_{j,2}) \subset \text{Supp}(B_{i,2})$

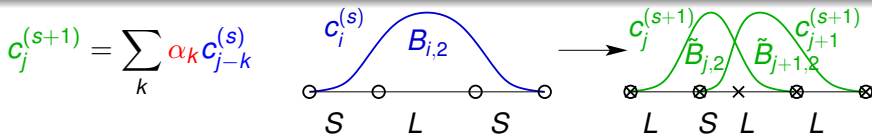
Labels et Masques de subdivision



$c_i^{(s)}$ participe à la définition de $c_j^{(s+1)}$
 si $\tilde{B}_{j,2}$ participe à la définition de $B_{i,2}$
 si $\text{Supp}(\tilde{B}_{j,2}) \subset \text{Supp}(B_{i,2})$

masque de $c_i^{(s)} = \left\{ \alpha_k : c_{i-k}^{(s)} \text{ participe à la définition de } c_{i+k}^{(s+1)} \right\}$

Labels et Masques de subdivision

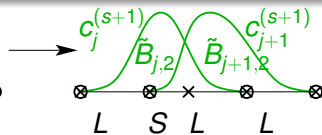
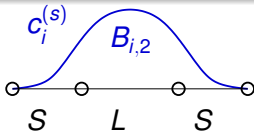


$c_i^{(s)}$ participe à la définition de $c_j^{(s+1)}$
 si $\tilde{B}_{j,2}$ participe à la définition de $B_{i,2}$
 si $\text{Supp}(\tilde{B}_{j,2}) \subset \text{Supp}(B_{i,2})$

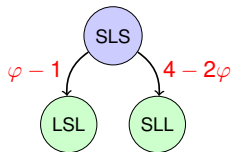
masque de $c_i^{(s)} = \left\{ \alpha_k : \text{Supp}(\tilde{B}_{i+k,2}) \subset \text{Supp}(B_{i,2}) \right\}$

Labels et Masques de subdivision

$$c_j^{(s+1)} = \sum_k \alpha_k c_{j-k}^{(s)}$$

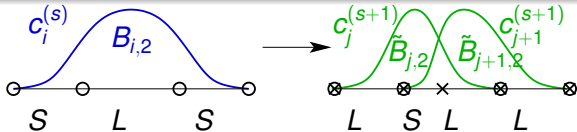


$$\text{masque de } c_j^{(s)} = \left\{ \alpha_k : \text{Supp}(\tilde{B}_{i+k,2}) \subset \text{Supp}(B_{i,2}) \right\}$$

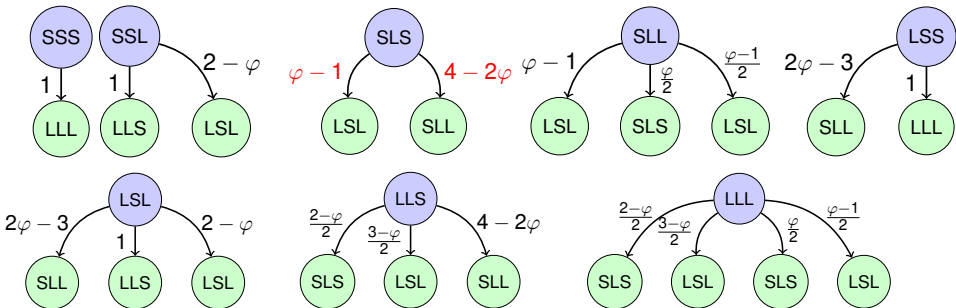


Labels et Masques de subdivision

$$c_j^{(s+1)} = \sum_k \alpha_k c_{j-k}^{(s)}$$

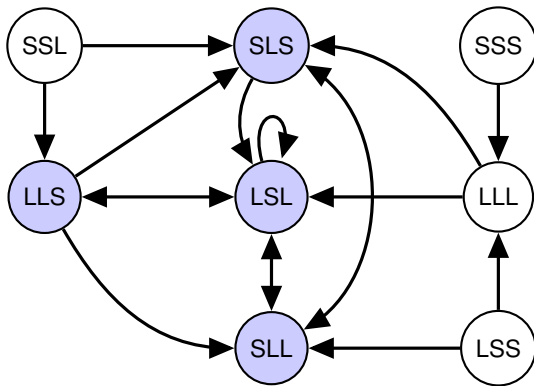


1 masque par mot de $d + 1$ symboles $\Rightarrow n^{d+1}$ masques

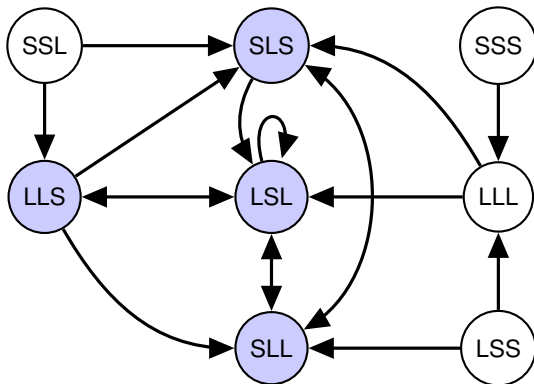


Réduction du nombre de masques utiles

Seul un sous-ensemble des n^{d+1} labels survit



Réduction du nombre de masques utiles



Mot de Fibonacci : Sturmien

ne contient que $d + 2$ sous-mots différents de longueur $d + 1$
(parmi les 2^{d+1} possibles)

Conclusion : Subdivisions Non-Uniforme non n -adique

- un procédé de subdivision d'intervalles tel que $l_i^{(\mathbf{s})} = \frac{l_i}{\rho^{\mathbf{s}}}$ fondé sur un L-système valide

- des règles de subdivision indépendantes de l'étape \mathbf{s} :

$$c_j^{(\mathbf{s}+1)} = \sum_k \alpha_k c_{j-k}^{(\mathbf{s})}$$

et en nombre limité (1 masque par mot de $d + 1$ symboles)

- assurant une convergence vers un objet \mathcal{S} connu :

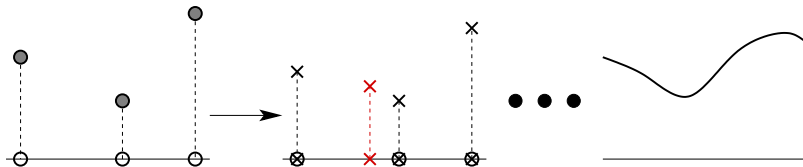
$$\mathcal{S} = \sum_i c_i^{(0)} B_{i,2}$$

- avec une vitesse connue :

$$\|\mathcal{L}^{(\mathbf{s})} - \mathcal{S}\| \leq K \left(\frac{1}{\rho^2} \right)^{\mathbf{s}} \|\mathcal{S}''\|$$

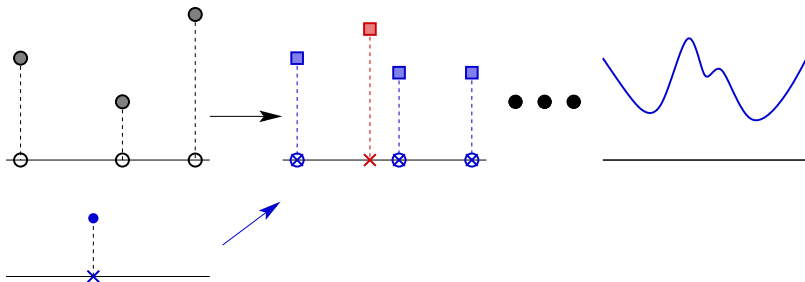
Perspective : Analyse Multirésolution Non-Uniforme ?

Des intervalles quelconques et **division non n -adique**



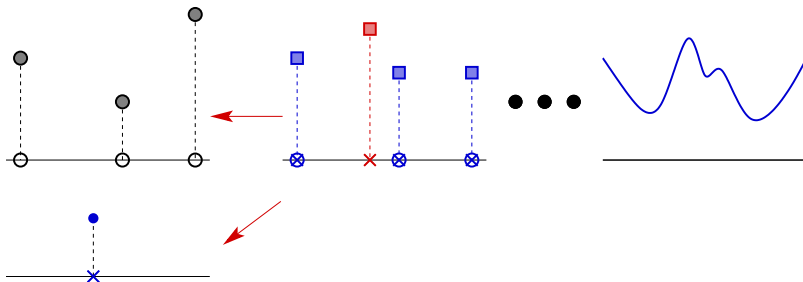
Perspective : Analyse Multirésolution Non-Uniforme ?

Des intervalles quelconques et **division non n -adique**



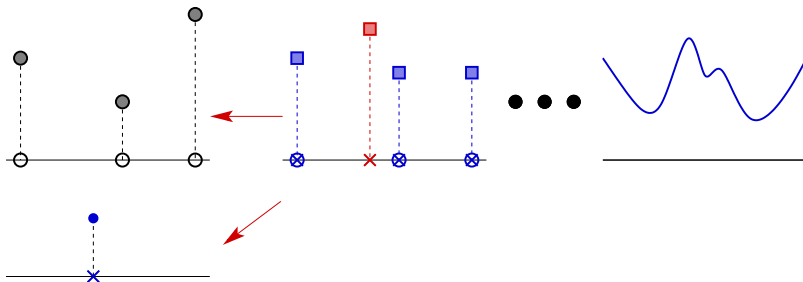
Perspective : Analyse Multirésolution Non-Uniforme ?

Des intervalles quelconques et **division non n -adique**



Perspective : Analyse Multirésolution Non-Uniforme ?

Des intervalles quelconques et **division non n -adique**



Question ouverte

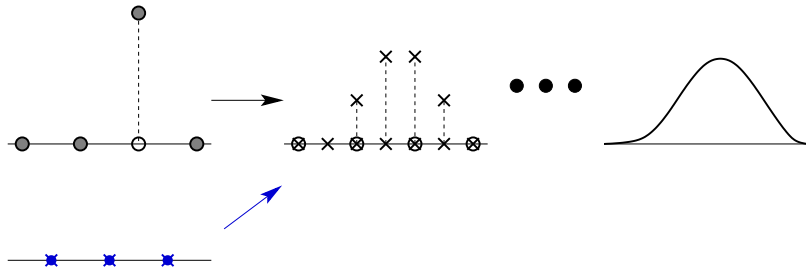
*sur-échantillonnage non-uniforme non n -adique
a-t-il un intérêt du point de vue TS ?*

Subdivision fondée sur des B-splines non-uniformes
L-système pour la subdivision d'intervalles
Validité d'un L-système
Un nombre réduit de règles

Merci

Schéma de Subdivision et Multirésolution

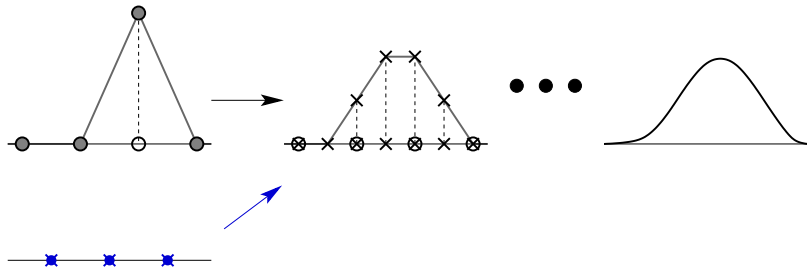
Schéma de Subdivision = outil de dessin de fonctions échelles
et ondelettes



I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelets* (1992)

Schéma de Subdivision et Multirésolution

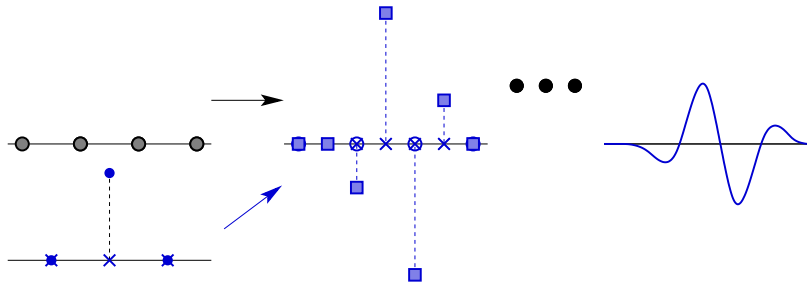
Schéma de Subdivision = outil de dessin de fonctions échelles
et ondelettes



I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelets* (1992)

Schéma de Subdivision et Multirésolution

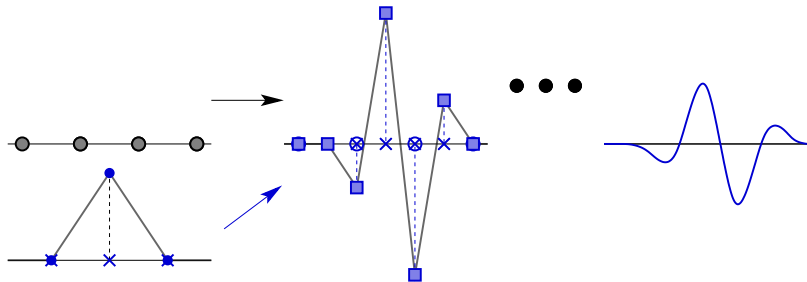
Schéma de Subdivision = outil de dessin de fonctions échelles et ondelettes



I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelets* (1992)

Schéma de Subdivision et Multirésolution

Schéma de Subdivision = outil de dessin de fonctions échelles et ondelettes



I. Daubechies *Ten Lectures on Wavelets* (1992)

Matrice \mathbf{M} valide

Théorème de Perron-Frobenius

Si \mathbf{M} non-négative est **irréductible**, alors

- le rayon spectral $\rho(\mathbf{M})$ est une valeur propre \mathbf{M} et $\rho(\mathbf{M}) > 0$;
- il existe un vecteur propre positif \mathbf{l} associé à $\rho(\mathbf{M})$.

Matrice réductible

Une matrice \mathbf{M} est réductible s'il existe une matrice de permutation \mathbf{P} telle que

$$\mathbf{PMP}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1} & \mathbf{M}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{2,2} \end{bmatrix}.$$