

# Chapitre 3

## Définition par un atlas d'une surface approchant une surface triangulée

### 3.1 Introduction

Dans ce troisième chapitre, nous présentons un nouveau modèle de surfaces fondé sur la représentation de surfaces par un atlas de cartes et résolvant intrinsèquement le problème de continuité entre les morceaux ordinairement rencontré dans les modèles de surfaces paramétriques. Nous avons présenté ce modèle dans la *Revue de CFAO et d'informatique graphique* [GAM01].

Nous commençons par mettre en évidence la qualité de ce modèle avant d'évoquer les utilisations en informatique graphique pour lesquelles il apparaît particulièrement bien adapté. Enfin, nous proposons une méthode en trois étapes pour construire un tel modèle de surfaces à partir d'une surface triangulée. Nous faisons l'hypothèse que cette surface maillée est une variété de dimension 2 connexe et compacte.

### 3.2 Atlas : un modèle issu de la géométrie différentielle

Nous restreignons les surfaces que nous représentons aux surfaces régulières (voir chapitre ??). Ce cadre reste malgré tout suffisamment général pour représenter de nombreuses surfaces en informatique graphique ou en imagerie médicale. Pour de telles surfaces, la géométrie différentielle propose une description naturelle par un atlas de cartes. Nous choisissons alors de concevoir notre modèle de surfaces directement à partir de cette représentation.

Ce modèle peut être interprété comme la généralisation de la représentation paramétrique par morceaux à des morceaux qui se superposent. Ce modèle allie donc les qualités de ces représentations évoquées dans le chapitre ?? à celles héritées de la géométrie différentielle. En particulier, nous avons observé que pour définir une notion de continuité entre les morceaux d'une représentation paramétrique, on se ramenait localement au cadre de la représentation par un atlas de cartes (voir les travaux de Hahn rappelés au paragraphe ??,

page ??). De plus, cette représentation semble tout particulièrement indiquée pour ramener des traitements à réaliser sur la surface à des traitements sur  $\mathbb{R}^2$  et pour travailler localement sans se soucier d'une quelconque perte de la cohérence globale (pour cela, on utilisera volontiers une partition de l'unité).

Parmi les qualités que ce modèle partage avec les représentations évoquées dans le chapitre ??, nous notons d'une part qu'il s'agit d'une représentation paramétrique. Elle permet donc une construction de la surface plus souple et maîtrisée qu'une représentation implicite. D'autre part, les paramétrisations locales sont définies sur des domaines de  $\mathbb{R}^2$  connus explicitement. Cette représentation semble alors toute indiquée pour des applications telles que le plaquage de texture (contrairement au modèle de subdivision par exemple). Et comme les paramétrisations locales sont connues elles aussi explicitement et sont continues par définition (de classe au moins  $C^1$ ) un travail sur la continuité différentielle du plaquage de la texture peut être envisagé (contrairement au cas du maillage où la paramétrisation n'est que de classe  $C^0$ ).

### 3.3 Utilisation en informatique graphique

Observons plus précisément à quelles applications propres à l'informatique graphique cette nouvelle représentation peut être utile.

**Simplification** On recherche à simplifier un maillage pour réduire sa place en mémoire ou pour construire une étape d'une représentation hiérarchique, représentation idéale pour la transmission progressive de celle-ci. La méthode généralement utilisée pour cela est de diminuer le nombre de faces [TP75, SZL92, RB93, Hop96].

La représentation de surfaces par un atlas permet une simplification efficace en remplaçant de nombreuses faces par un seul morceau de surface régulière décrit par une des cartes de l'atlas.

**Paramétrisation d'une surface** La paramétrisation d'une surface peut se comprendre de deux façons différentes. Ce peut être la construction d'une description paramétrique d'un objet, généralement une triangulation [LMH00, EDD<sup>+</sup>95]. Ce peut également être l'approximation par une surface paramétrique d'un ensemble désordonné de données [HDD<sup>+</sup>94] ou d'une surface implicite [Har00].

Dans tous les cas, ce qui est recherché au travers de la paramétrisation est le dépliement de la surface. Une fois la surface dépliée, on peut y appliquer une texture ou bien encore proposer une nouvelle paramétrisation du même objet (on peut ainsi définir un nouveau maillage dont les sommets reposent sur un maillage original mais avec une organisation différente entre les faces, les arêtes et les sommets [EDD<sup>+</sup>95]).

La représentation de surfaces par cartes est tout naturellement adaptée au dépliement.

**Régularisation d'une surface** On peut chercher à approcher une surface donnée (le plus souvent un maillage) par une surface plus lisse. Une solution élégante est l'utilisation

d'une méthode de subdivision. Mais quelle que soit l'étape de cet algorithme nous avons toujours un maillage, c'est-à-dire une surface  $C^0$  affine. Ce n'est qu'à la limite (théorique) du processus que la surface est régulière (voir au chapitre ??).

Une autre solution est d'approcher la surface par une surface paramétrée dont on maîtrise la régularité. Mais les solutions proposées sont soit un patchwork de surfaces lisses, raccordées entre elles (B-Splines) ou non [LMH00], soit un seul morceau continu [Flo97].

La représentation de surfaces par cartes propose un cadre idéal pour l'approximation d'une surface par une surface régulière, au sens donné au chapitre ??.

**Edition** Enfin on peut envisager l'utilisation d'une représentation par un atlas à des fins d'édition (on dit également synthèse) de surfaces. Une des idées possibles serait de venir placer des primitives simples (quadriques) décrites par une équation de degré faible (deux) sur des domaines de  $\mathbb{R}^2$  simples, connus et reliés par des fonctions de transitions connues. Ces primitives seraient par la suite reliées continûment les unes aux autres grâce à la structure proposée par la représentation par cartes (voir au chapitre ??).

**Application choisie** Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi de construire l'atlas d'une surface régulière  $\mathcal{S}$  approchant un maillage triangulaire  $\mathcal{M}$ .  $\mathcal{S}$  est naturellement dépliée. Elle constitue une régularisation de  $\mathcal{M}$  car l'atlas est de classe  $C^1$ . Enfin, le nombre de cartes sera aussi petit que possible faisant ainsi de cette représentation une simplification de  $\mathcal{M}$ . Comme nous l'exposons dans le paragraphe suivant, le mode de construction de l'atlas est très semblable à celui décrit ci-dessus pour l'édition de surfaces.

## 3.4 Construction de l'atlas

Pour construire l'atlas d'une surface régulière  $\mathcal{S}$  approchant un maillage  $\mathcal{M}$ , nous procédons en trois temps :

1. nous approchons  $\mathcal{M}$  par une famille de primitives (morceaux de plan approchant une région définie sur  $\mathcal{M}$ ),
2. les primitives sont paramétrées sur des domaines de  $\mathbb{R}^2$  reliés par des fonctions de transition qui sont des  $C^1$ -difféomorphismes,
3. grâce à cette structure d'atlas et à la définition d'une partition de l'unité sur celle-ci, nous fondons les primitives entre elles par combinaison convexe.

Nous proposons à présent des notations et un schéma illustrant cette construction et que nous retrouverons, tel un guide, tout au long de ce manuscrit.

Pour construire notre modèle, nous définissons donc dans un premier temps une famille de primitives simples  $V_i$  approchant les régions  $R_i$  d'un recouvrement défini sur  $\mathcal{M}$  (voir chapitre ??). Nous avons choisi de définir  $V_i$  comme la projection sans repliement (donc bijective) de  $R_i$  sur un plan qui approche cette région :  $V_i = v_i(R_i)$ .

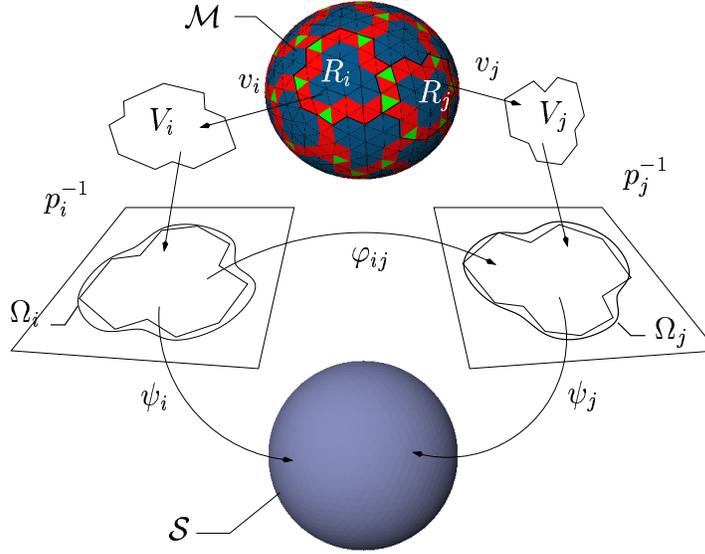


FIG. 3.1 – Atlas de classe  $C^1$  d'une surface  $\mathcal{S}$  approchant le maillage  $\mathcal{M}$

Chaque primitive  $V_i$  admet une paramétrisation naturelle  $p_i$  sur un domaine  $\Omega_i^0$  de  $\mathbb{R}^2$ . Comme nous le verrons dans le paragraphe ??, le recouvrement est défini de telle sorte que chaque région  $R_i$  de  $\mathcal{M}$  est composée d'une zone pure (ensemble des points de  $\mathcal{M}$  n'appartenant qu'à  $R_i$ ) entourée d'une couronne polygonale d'échange (ensemble des points de  $R_i$  qu'elle partage avec d'autres régions du recouvrement). Le recouvrement sera dit *bien formé*. On définit des zones pures et des couronnes d'échange sur les domaines  $\Omega_i^0$  comme les images par les fonctions  $p_i^{-1} \circ v_i$ , de celles définies sur  $R_i$ . On définit les domaines  $\Omega_i$  dans  $\mathbb{R}^2$  en approchant la couronne polygonale d'échange de  $\Omega_i^0$  par une couronne continue (voir chapitre ??). Chaque primitive  $V_i$  est alors approchée par la primitive  $p_i(\Omega_i)$ .

Si  $R_i$  et  $R_j$  sont deux régions dont l'intersection est non vide, nous mettons en correspondance les points de  $p_i(\Omega_i)$  et de  $p_j(\Omega_j)$  qui approchent le même point de  $R_i \cap R_j$ . Plus précisément, nous notons  $\Omega_{ij}^0$  la partie de la couronne d'échange de  $\Omega_i^0$  définie par  $p_i^{-1} \circ v_i(R_i \cap R_j)$ . Nous notons  $\Omega_{ij}$  la partie correspondante de la couronne d'échange de  $\Omega_i$ . La mise en correspondance entre les points de  $p_i(\Omega_i)$  et de  $p_j(\Omega_j)$  est alors réalisée par la définition d'une fonction de transition  $\varphi_{ij} : \Omega_{ij} \rightarrow \Omega_{ji}$  qui doit être un  $C^1$ -difféomorphisme.

Enfin,  $\mathcal{S}$  est définie comme le raccord continu des primitives  $p_i(\Omega_i)$  par combinaison convexe des points mis en correspondance par les fonctions de transition. Les poids de la combinaison convexe sont des fonctions définies sur les domaines  $\Omega_i$  qui constituent une partition de l'unité sur  $\mathcal{S}$  (voir chapitre ??).

## 3.5 Conclusion

Après avoir mis en évidence les nombreuses qualités du modèle de surfaces fondé sur la représentation d'une surface par un atlas de cartes, nous avons proposé une méthode en trois étapes pour construire un tel modèle à partir d'un nuage de points 3D interpolés au préalable par une surface triangulée  $\mathcal{M}$ .

Chacune de ces étapes pose des problèmes géométriques que nous résolvons dans la deuxième partie de ce mémoire :

- Comment définir un recouvrement bien formé sur  $\mathcal{M}$  ?
- Comment approcher la couronne d'échange polygonale de  $\Omega_i^0$  par la couronne d'échange continue de  $\Omega_i$  ?
- Comment raccorder les primitives  $p_i(\Omega_i)$  entre elles afin de définir une surface régulière  $\mathcal{S}$  ?

Les réponses à ces questions se trouveront respectivement dans les chapitres ??, ?? et ??.



# Bibliographie

- [EDD<sup>+</sup>95] M. Eck, T. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery, and W. Stuezle. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'95*, pages 173–182, 1995.
- [Flo97] M. S. Floater. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. *Comput. Aided Geom. Design*, 14 :231–250, 1997.
- [GAM01] C. G erot, A. Attali, and A. Montanvert. D'une surface triangulée   une surface repr esent ee par cartes. *Revue de CFAO et d'informatique graphique*, 16(1) :9–24, 2001.
- [Har00] E. Hartmann. Numerical parametrization of curves and surfaces. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :251–266, 2000.
- [HDD<sup>+</sup>94] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, M. Halstead, H. Jin, J. McDonald, J. Schweiter, and W. Stuezle. Piecewise smooth surface reconstruction. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'94*, 1994.
- [Hop96] H. Hoppe. Progressive meshes. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'96*, pages 99–108, 1996.
- [LMH00] A. Lee, H. Moreton, and H. Hoppe. Displaced subdivision surfaces. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'00*, 2000.
- [RB93] J. Rossignac and P. Borrel. Multiresolution 3d approximations for rendering complex scenes. In B. Falcidieno and T. Kunii, editors, *Modeling in Computer Graphics : Methods and Applications*, pages 455–465. Springer Verlag, 1993.
- [SZL92] W. J. Schröder, J. A. Zarg, and W. E. Lorensen. Decimation of triangle meshes. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'92*, pages 65–70, 1992.
- [TP75] S.L. Tanimoto and T. Pavlidis. A hierarchical data structure for picture processing. *Computer Graphics and Image Processing*, 4(2) :104–119, 1975.