

# Chapitre 5

## Approximation $C^1$ d'une couronne polygonale du plan

### 5.1 Introduction

A la deuxième étape de la construction de notre modèle de surfaces, nous avons vu au chapitre ?? qu'il fallait mettre en correspondance des points des primitives qui approchent le maillage  $\mathcal{M}$  en définissant des fonctions de transition entre les domaines de paramétrisation de ces primitives (figure 5.1).

Pour cela, nous paramétrisons des parties de différents domaines sur un même lieu : la fonction de transition entre des parties de deux domaines est alors simplement définie comme la composée de la réciproque de la paramétrisation d'une partie d'un des deux domaines avec la paramétrisation d'une partie de l'autre domaine. De plus, il faut que les fonctions de transition soient des  $C^1$ -difféomorphismes. Nous cherchons donc naturellement à paramétrer les parties de chaque domaine par un  $C^1$ -difféomorphisme. Or il s'avère, comme nous le verrons à la fin de ce chapitre, que les parties des domaines à mettre en correspondance appartiennent à une couronne définie dans chaque domaine au voisinage de sa frontière. Par ailleurs, les primitives définies dans le chapitre précédent sont des polygones. Les couronnes correspondantes sont donc polygonales ce qui interdit leur paramétrisation par un  $C^1$ -difféomorphisme. Il est donc indispensable d'approcher cette couronne polygonale par une couronne continue paramétrée par un  $C^1$ -difféomorphisme. C'est l'objet de l'étude conduite dans ce chapitre.

Pour réaliser cette étude, nous procédons en trois temps. Nous commençons par décrire une boucle par un paramètre orthoradial. La boucle est alors paramétrée sur le cercle unité  $\mathcal{C}$  par une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  évaluant ce paramètre orthoradial en fonction d'un angle qui, lui, repère un point de  $\mathcal{C}$ .

Nous observons ensuite que ce procédé ne peut être généralisé à la description de toute couronne polygonale du plan. Nous étudions alors l'approximation d'une couronne polygonale quelconque du plan par une couronne polygonale que nous savons décrire par deux paramètres, l'un radial et l'autre orthoradial. Cette dernière couronne est alors paramétrée

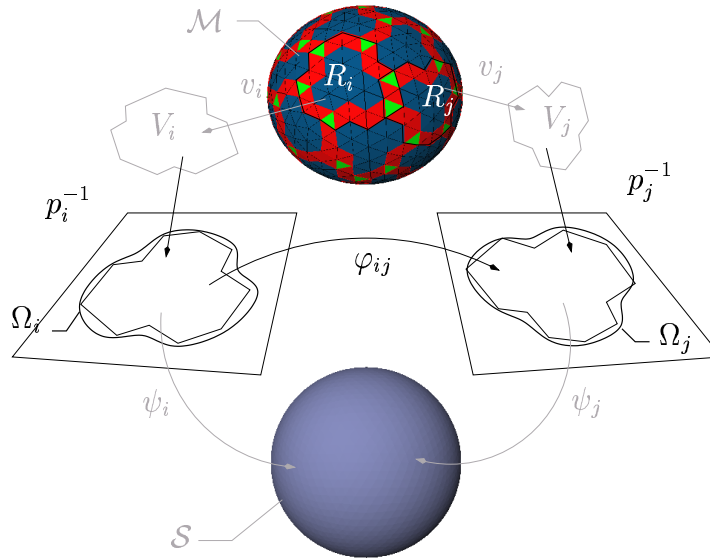


FIG. 5.1 – Deuxième étape de la construction de notre modèle : mise en correspondance des points des primitives

sur un anneau circulaire par une fonction évaluant deux paramètres décrivant la couronne en fonction des deux paramètres (radial et orthoradial) qui décrivent l'anneau circulaire. Finalement, l'approximation d'une couronne polygonale par une couronne continue se déroule en deux temps. Nous commençons par approcher la couronne polygonale par une couronne polygonale paramétrée sur un anneau circulaire. Puis nous lisons les fonctions de paramétrisation pour qu'elles décrivent une couronne continue.

Nous verrons à la fin de ce chapitre comment nous choisissons les parties des couronnes à mettre en correspondance et donc finalement comment nous définissons les fonctions de transition de l'atlas du modèle de surfaces que nous construisons. Nous remarquerons également que la paramétrisation proposée par un paramètre radial et un paramètre orthoradial simplifie grandement la définition de la partition de l'unité subordonnée aux domaines. Nous utilisons ces fonctions pour définir les poids de la combinaison convexe indispensable au raccord des primitives entre elles.

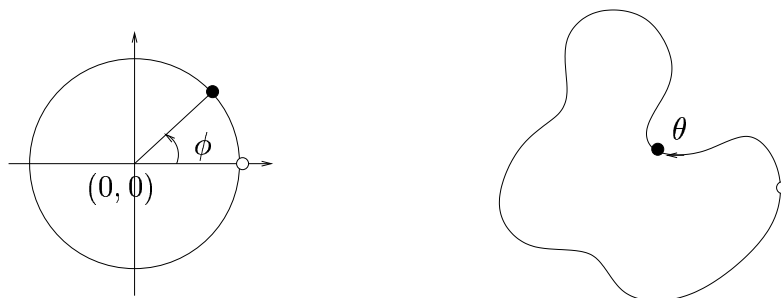


FIG. 5.2 – Description d'une boucle par un paramètre orthoradial

## 5.2 Description d'une boucle du plan par un paramètre orthoradial

### 5.2.1 Introduction

Nous présentons dans cette section la description d'une boucle du plan par un paramètre orthoradial. Nous utilisons l'expression "par un paramètre orthoradial" pour qualifier une description des points de la boucle qui est semblable à celle des points du cercle unité par leur coordonnée angulaire dans la base polaire dont l'origine du repère est le centre. Nous verrons que le cas d'une boucle étoilée est particulièrement bien adapté à cette description. Malheureusement, toutes les boucles ne sont pas étoilées. Cependant, nous baserons la description d'une boucle quelconque par un paramètre orthoradial sur cette première constatation, en décrivant la boucle par morceaux, chaque morceau étant étoilé.

#### 5.2.1.1 Définitions

Commençons par définir ce qu'est une boucle :

**Définition 1 (Boucle)** *On appelle boucle tout ensemble de points du plan homéomorphe à  $\mathcal{C}$ .*

où  $\mathcal{C} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$  est le cercle unité du plan.

**Définition 2 (Partie centrale, Partie extérieure)** *Une boucle divise le plan en deux parties disjointes : une partie centrale bornée et une partie extérieure non bornée.*

Tout point du cercle unité  $\mathcal{C}$  est repérable par  $\phi$ , sa coordonnée orthoradiale (ou angulaire) dans la base polaire de centre  $(0, 0)$ . Il s'agit à présent de définir  $\vartheta$ , une coordonnée semblable repérant les points d'une boucle donnée, puis de définir un homéomorphisme de  $\mathcal{C}$  sur la boucle (figure 5.2).

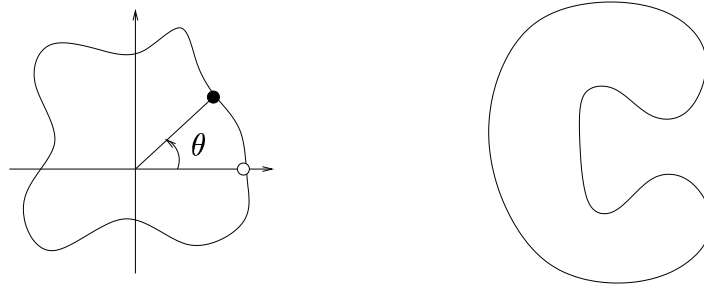


FIG. 5.3 – A gauche, une boucle étoilée. A droite, une boucle non étoilée

### 5.2.1.2 Cas d'une boucle étoilée

La description d'une boucle par une coordonnée orthoradiale se fait naturellement dans le cas d'une boucle étoilée.

**Définition 3 (Boucle étoilée)** *Une boucle est étoilée s'il existe un point  $C$  du plan tel que, tout point  $M$  de la boucle est l'unique point de la boucle appartenant au segment  $[C, M]$ .*

En effet, la coordonnée orthoradiale dans la base polaire de centre  $C$  repère convenablement les points de la boucle étoilée. Malheureusement toute boucle n'est pas étoilée (figure 5.3).

### 5.2.1.3 Généralisation par l'intermédiaire de bases polaires locales

Nous cherchons alors à généraliser ce premier résultat à une boucle quelconque. L'idée est de décomposer la boucle en portions, chaque portion étant étoilée et donc repérée par une coordonnée orthoradiale dans une base polaire locale de centre  $C_n$  appelé *pivot*.

Aussi, tout point de la boucle doit posséder une unique coordonnée orthoradiale. Il doit donc être repéré dans une et une seule de ces bases locales. Nous présentons dans ce chapitre comment définir des pivots qui satisfont à cela, puis nous définissons l'homéomorphisme sur  $\mathcal{C}$ . Tout cela sera traité dans le cadre particulier d'une boucle polygonale.

## 5.2.2 Construction des pivots

### 5.2.2.1 Introduction

Il s'agit de définir une succession de bases polaires locales centrées en des points  $C_n$  nommés pivots de telle sorte que tout point d'une boucle polygonale soit repéré par une et une seule base.

Pour cela, nous proposons de définir alternativement un pivot dans la partie centrale et dans la partie extérieure (parties du plan séparées par la boucle) de telle sorte que chaque segment  $[C_n, C_{n+1}]$  n'intersecte la boucle qu'en un seul point. Ce point sera repéré par l'une des deux bases centrées en  $C_n$  ou  $C_{n+1}$ .

La qualité de la définition de tels pivots est déterminée par l'utilisation que l'on en fait. Ces pivots vont permettre de décrire une couronne. Afin de minimiser la place mémoire nécessaire à cette description, il convient de définir le plus petit nombre possible de pivots. A l'inverse, nous approcherons une couronne polygonale par une couronne continue en lissant ses boucles frontières par un algorithme qui demande aux segments de la portion décrite par la base locale de centre  $C_n$  d'être orientés le moins radialement possible. Enfin, la ligne polygonale joignant les pivots successifs doit être sans auto-intersection afin de pouvoir discriminer les points appartenant à la partie centrale, à l'intérieur ou à la partie extérieure de la couronne (voir paragraphe 5.5.2.2, page 129).

Pour positionner les pivots, nous procédons en deux temps : nous commençons par définir les pivots appartenant à la partie centrale, puis les pivots appartenant à la partie extérieure. Pour cela, nous utilisons un pseudo-squelette de la partie centrale.

### 5.2.2.2 Pseudo-squelette d'une région polygonale

**Définition d'un pseudo-squelette** Soit  $R$  une région du plan délimitée par un polygone simple.

Le squelette de  $R$  est une représentation filiforme et centrée de  $R$  [Blu67, Att95]. Une de ses principales propriétés est d'être de même homotopie que  $R$ .

REMARQUE —

Deux ensembles  $X$  et  $Y$  sont de même homotopie s'il existe deux applications continues  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  ainsi que deux familles  $\{\varphi_t\}$  et  $\{\psi_t\}$  de fonctions continues de  $Y$  dans  $Y$  et de  $X$  dans  $X$  respectivement ( $t \in [0; 1]$ ) telles que

- $\varphi_t$  est continue par rapport à  $t$  et à  $y \in Y$  simultanément et  $\varphi_0 = f \circ g$ ,  
 $\varphi_1 = id_Y$
- $\psi_t$  est continue par rapport à  $t$  et à  $x \in X$  simultanément et  $\psi_0 = g \circ f$ ,  
 $\psi_1 = id_X$

où  $id_Y$  est l'application identité sur  $Y$  et  $id_X$  est l'application identité sur  $X$ .

Intuitivement, si l'on faisait le vide dans  $R$ , ses parois s'écraseraient sur son squelette.

Dans notre cas nous n'avons pas besoin de la géométrie exacte du squelette de  $R$ . C'est pourquoi nous utilisons un pseudo-squelette qui est plus facile et plus rapide à calculer. Il s'agit d'une région polygonale du plan de même homotopie que  $R$ , incluse dans  $R$  et d'épaisseur nulle sauf au niveau des embranchements.

**Construction du pseudo-squelette** Notre construction du pseudo-squelette utilise une triangulation de  $R$ . Pour cela, on utilise un algorithme classique de triangulation d'un polygone simple. La triangulation obtenue prend appui sur les sommets de la ligne polygonale frontière de  $R$ , et s'effectue sans ajout de points à l'intérieur de la région. Sous ces conditions, les arêtes de la triangulation sont de deux types : les arêtes dont l'intérieur est

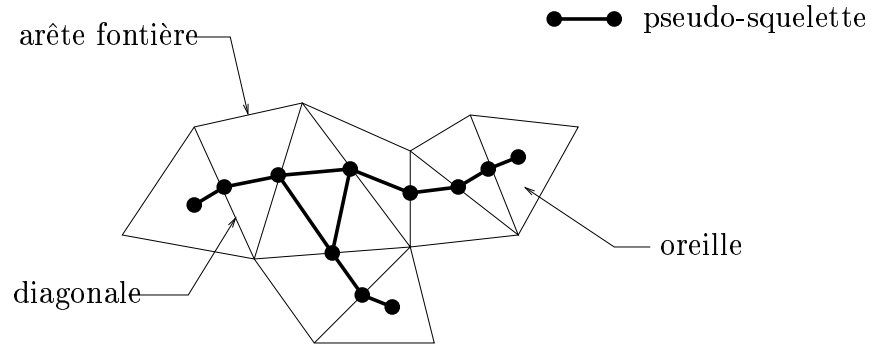


FIG. 5.4 – Pseudo-squelette d'une région polygonale

strictement inclus dans  $R$  que nous appellerons les diagonales de la triangulation et des arêtes incluses dans la frontière de  $R$ , que nous appellerons arêtes frontières. Nous appelons oreilles de la triangulation les triangles possédant exactement deux arêtes frontières (figure 5.4).

La frontière du pseudo-squelette est construite de la façon suivante : un sommet est placé au milieu des diagonales et au barycentre des oreilles. On relie ensuite deux sommets s'ils appartiennent au même triangle.

**Propriétés du pseudo-squelette** Ce pseudo-squelette nous est utile pour trois raisons :

- les pivots de la partie centrale sont définis sur la frontière du pseudo-squelette : nous sommes assurés qu'ils appartiennent à la partie centrale ;
- les extrémités du pseudo-squelette (barycentre des oreilles) sont de bons candidats pour être des pivots appartenant à la partie centrale ;
- le pseudo-squelette définit un mur dans la partie centrale, séparant les pivots de la partie centrale qui sont en regard de deux parties de la frontière de  $R$  diamétralement opposées : cela permettra d'éviter les auto-intersections de la ligne polygonale joignant les pivots successifs.

### 5.2.2.3 Construction des pivots appartenant à la partie centrale

Pour placer les pivots appartenant à la partie centrale, nous parcourons la boucle dans le sens trigonométrique et en repérons les parties qui tournent à gauche. Nous plaçons un pivot dans la partie centrale en regard de chacune de ces parties.

REMARQUE —

Un couple  $(e_1, e_2)$  d'arêtes successives de la boucle tourne à gauche si le produit scalaire  $(e_1^\perp | e_2)$  est positif, où  $e_1^\perp$  est le vecteur directement orthogonal à  $e_1$ .

Aussi pour définir les pivots appartenant à la partie extérieure, nous aurons besoin que ces parties ne s'enroulent pas sur elles-mêmes, que ce soit à gauche comme à droite (voir le paragraphe 5.2.2.4). C'est pourquoi nous avons choisi l'heuristique suivante.

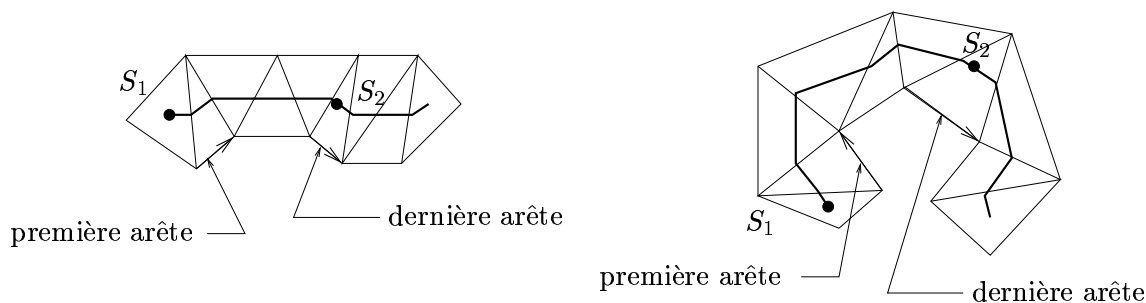


FIG. 5.5 – Arêtes extrêmes d'une séquence tournant à droite

Le barycentre de chaque oreille de la triangulation est choisi comme pivot appartenant à la partie centrale. Il est en regard des deux arêtes frontières de l'oreille. Nous parcourons alors chaque partie de la boucle délimitée par deux arêtes frontières appartenant à deux oreilles différentes.

Si lors de ce parcours la boucle tourne à droite, nous arrêtons le parcours dès lors qu'elle tourne à gauche ou que les deux arêtes extrêmes de cette sous-séquence forment un angle supérieur à  $\pi$ . On définit alors comme nouveau pivot appartenant à la partie centrale un point de l'arête frontière du pseudo-squelette qui est parallèle à la dernière arête du parcours (sauf si cette arête appartient à une oreille). On reprend ensuite le parcours jusqu'à ce que l'on rejoigne la prochaine arête appartenant à une oreille (figure 5.5).

Si lors de ce parcours la boucle tourne à gauche, nous arrêtons le parcours dès qu'elle tourne à droite ou qu'un des segments  $[S_1; P]$  et  $[P; S_2]$  intersecte la frontière du pseudo-squelette.  $S_1$  est le dernier pivot créé en date,  $S_2$  est le candidat pour être le prochain et  $P$  est un point médian de la séquence d'arêtes de la boucle parcourue. Cette condition est nécessaire pour éviter les auto-intersections de la ligne polygonale reliant les pivots successifs entre eux (figure 5.6).

#### 5.2.2.4 Construction des pivots appartenant à la partie extérieure

Il s'agit à présent de définir un pivot appartenant à l'extérieur de la boucle, entre chaque paire de pivots successifs appartenant à la partie centrale. Là encore nous proposons une heuristique.

Soit  $(S_1, S_2)$  une paire de pivots successifs appartenant à la partie centrale. S'ils correspondent au parcours d'une partie de la boucle qui tourne à droite, on note  $C$  le milieu de  $[S_1, S_2]$ . On recherche le point d'intersection de la boucle avec la médiatrice de  $[S_1, S_2]$ , le plus proche de  $C$  et se trouvant à droite de la droite dirigée par  $(S_1, S_2)$ . Si ce point n'existe pas ou correspond à une entrée de la médiatrice dans la région centrale, alors  $C$  est à l'extérieur de la boucle. On l'accepte comme pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$  (figure 5.7-a).

Sinon, on le note  $P$ . On note  $I$  le point d'intersection, le plus proche de  $P$ , de la demi-droite  $[C; P)$  avec la boucle. Le segment  $]P; I[$  appartient à la partie extérieure. Si  $I$  n'existe

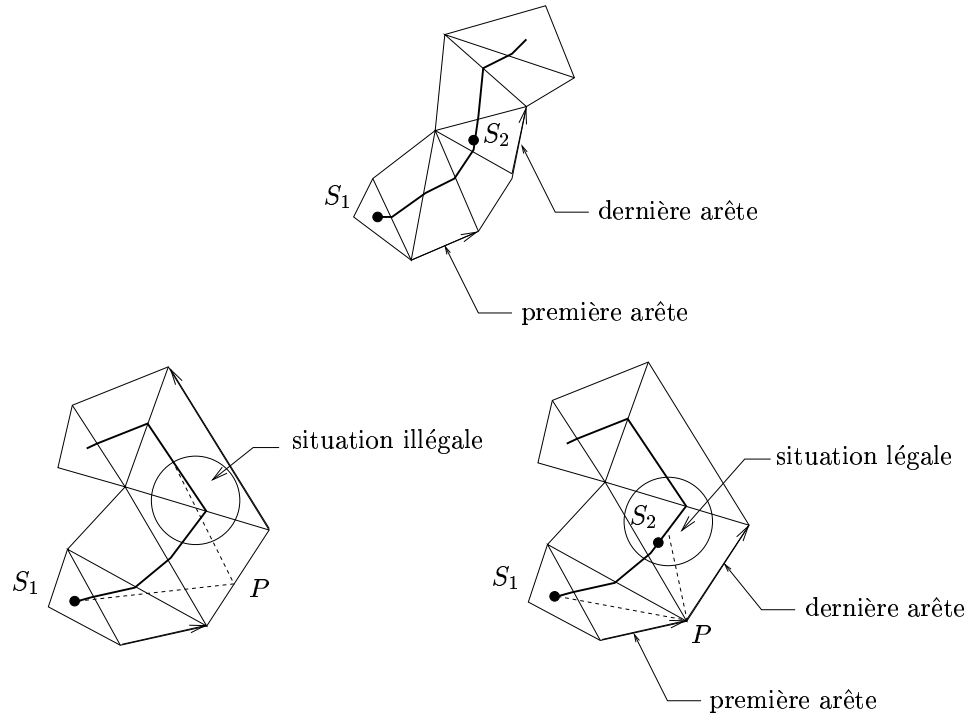


FIG. 5.6 – Arêtes extrêmes d'une séquence tournant à gauche

pas, le pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$  est défini par  $E = P + \lambda \vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire dirigeant  $[C; P)$ , et  $\lambda > 0$  (figure 5.7-b). Si  $I$  existe, le pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$  est défini par la même formule mais avec  $\lambda = \|PI\|/2$  (figure 5.7-c).

Si  $S_1$  et  $S_2$  correspondent au parcours d'une partie de la boucle qui tourne à gauche, nous avons déjà défini un  $P$  dans le paragraphe précédent (figure 5.7-d). On note  $I$  le point d'intersection, le plus proche de  $P$ , de la demi-droite perpendiculaire à  $[S_1, S_2]$  et se trouvant à droite de ce segment, avec la boucle et entrant dans la partie centrale. Le pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$  est alors défini par les mêmes formules que ci-dessus, selon l'existence ou non de  $I$ .

On peut remarquer que les deux segments  $[S_1; E]$  et  $[E; S_2]$  n'intersectent jamais la partie de la frontière du pseudo-squelette délimitée par  $S_1$  et  $S_2$ .

### 5.2.2.5 Compléments

Ces heuristiques ont deux défauts.

D'une part, elles n'interdisent pas les intersections dans une séquence de cinq pivots successifs  $(S_1, E_1, S_2, E_2, S_3)$  contenant deux pivots extérieurs  $E_1$  et  $E_2$  (figure 5.8). Cette configuration intervient lorsque deux séquences d'arêtes tournant à droite peuvent en fait être repérées par le même pivot extérieur. On supprime donc les pivots  $S_2$  et  $E_2$ . D'autre part, elles n'interdisent pas les intersections entre deux séquences de trois pivots successifs



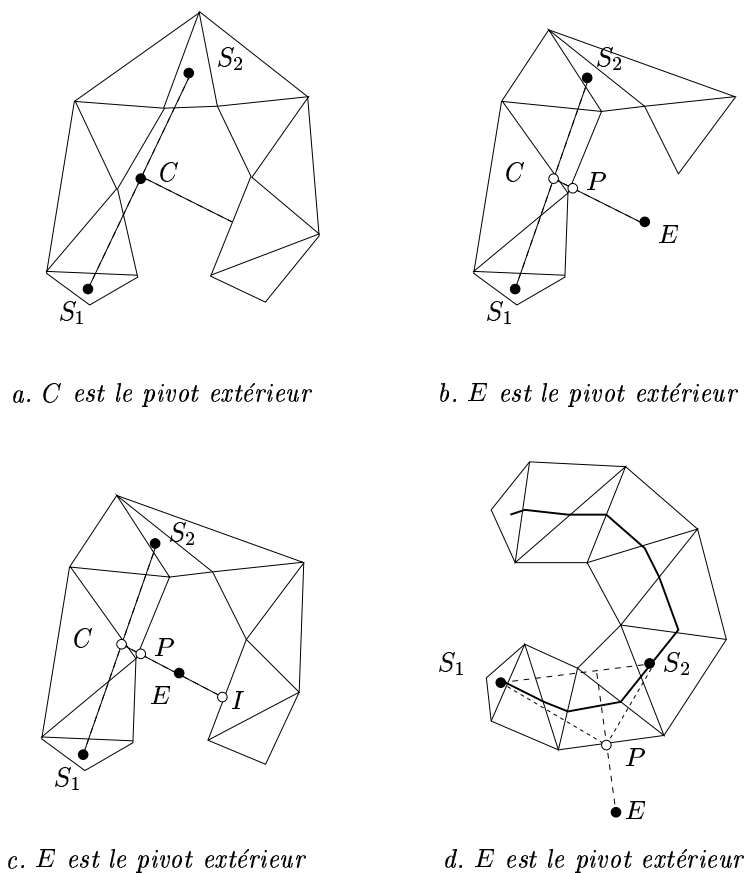


FIG. 5.7 – Construction des pivots appartenant à la partie extérieure

$(S_1, E_1, S_2)$  et  $(S_3, E_3, S_4)$  dont le pivot central est un pivot extérieur (figure 5.9). Pour résoudre cela, on rapproche  $E_1$  et  $E_3$  de la boucle en les faisant glisser sur les segments  $[M; P]$ .

### 5.2.3 Définition de l'homéomorphisme

#### 5.2.3.1 Description dans une base polaire locale

Nous avons défini des pivots  $\{C_n\}$  positionnés alternativement dans la partie centrale et dans la partie extérieure, de telle sorte que chaque segment  $[C_{n-1}; C_n]$  intersecte la boucle en un unique point noté  $B_n$ , et que la portion de la boucle délimitée par  $B_n$  et  $B_{n+1}$  (dans un parcours dans le sens trigonométrique de la boucle) soit étoilée par rapport à  $C_n$ .

Les points de cette portion sont alors décrits dans la base polaire locale de centre  $C_n$  par

$$M = C_n + \rho_n(\theta)\vec{u}(\theta)$$

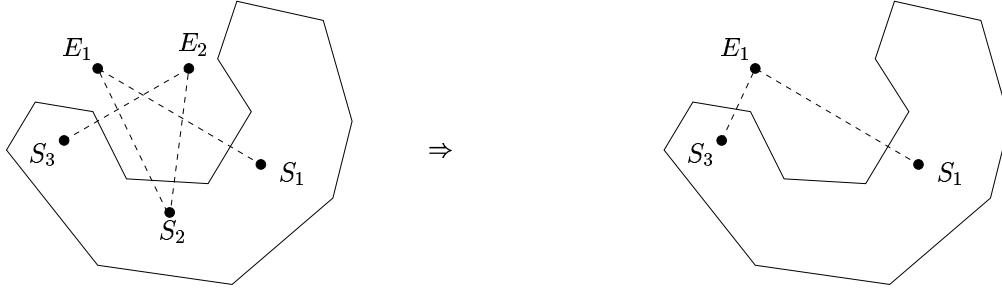


FIG. 5.8 – Correction du premier défaut de l'heuristique proposée

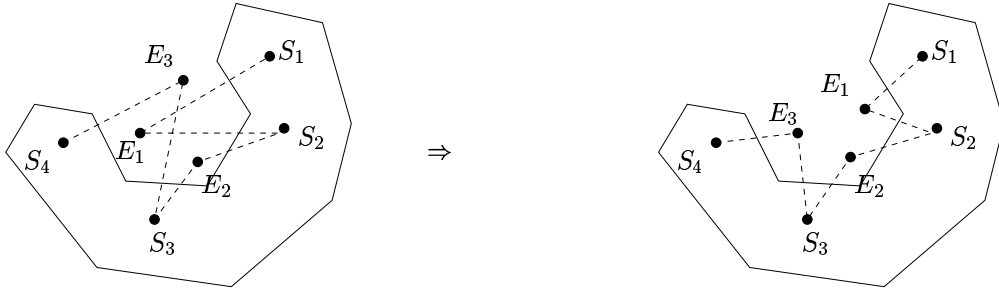


FIG. 5.9 – Correction du deuxième défaut de l'heuristique proposée

avec  $u(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$  où  $\theta$  est la coordonnée angulaire et  $\rho_n$  la coordonnée radiale définies par la base polaire.

Comme la boucle est une ligne polygonale, il existe deux réels  $d_n$  et  $\theta_n^o$  tels que

$$\rho_n(\theta) = \frac{d_n}{\cos(\theta - \theta_n^o)}$$

### 5.2.3.2 Paramétrisation sur un arc de $\mathcal{C}$

Rappelons que nous cherchons à paramétrer la boucle sur le cercle unité  $\mathcal{C}$ .

Aussi, nous l'avons décrite par morceaux dans des bases polaires locales successives. Il suffit alors de paramétrer chaque morceau décrit dans une base de centre  $C_n$ , sur un arc de  $\mathcal{C}$  correspondant à  $\phi \in [\phi_{n,1}, \phi_{n,2}]$ , où  $\phi$  est la coordonnée orthoradiale dans la base polaire de centre  $(0, 0)$ .

La paramétrisation s'écrit alors

$$M(\phi) = C_n + \rho_n(\theta(\phi))\vec{u}(\theta(\phi))$$

avec  $M$  parcourant la boucle dans le sens trigonométrique quand  $\phi$  augmente.

Alors, si  $C_n$  appartient à la partie centrale,  $\theta(\phi)$  est croissante. Si  $C_n$  appartient à la partie extérieure,  $\theta(\phi)$  est décroissante.

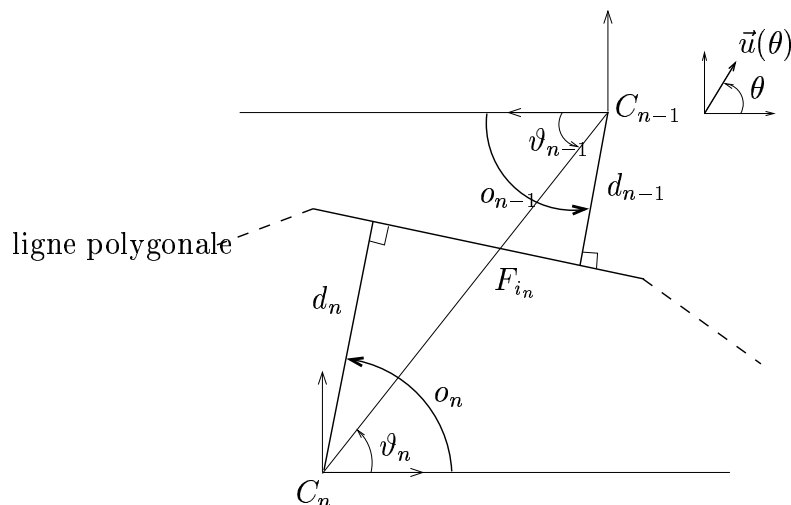


FIG. 5.10 – Notations à la limite entre les portions repérées par deux pivots successifs

Afin d'homogénéiser les situations, nous notons  $\vartheta_n = \theta$  et  $o_n = \theta_n^o$  si  $C_n$  appartient à la partie centrale, et  $\vartheta_n = \pi - \theta$  et  $o_n = \pi - \theta_n^o$  si  $C_n$  appartient à la partie extérieure (figure 5.10). Nous avons ainsi

$$M(\phi) = C_n + \rho_n(\vartheta_n)\vec{u}(\theta)$$

où  $\theta = \vartheta_n$  ou  $\theta = \pi - \vartheta_n$ ,  $\vartheta_n = \vartheta_n(\phi)$  et

$$\rho_n(\vartheta_n) = \frac{d_n}{\cos(\vartheta_n - o_n)}$$

REMARQUE —

En fait, la boucle étant constituée de plusieurs segments,  $d_n$  et  $o_n$  sont des fonctions de  $\vartheta_n$  constantes par morceaux.

### 5.2.3.3 Paramétrisation par un homéomorphisme

Pour que cette paramétrisation soit un homéomorphisme, il suffit d'assurer que

- $\rho_n \neq 0$
- $\vartheta_n(\phi)$  est bijectif

car alors la paramétrisation est bijective. Elle est de plus continue ainsi que sa réciproque.

La première condition est assurée de par la construction des pivots.

Pour vérifier la deuxième, il suffit de définir  $\vartheta_n(\phi)$  comme une fonction linéaire croissante interpolant les deux conditions  $\vartheta_n(\phi_{n,1}) = \vartheta_{n,1}$  et  $\vartheta_n(\phi_{n,2}) = \vartheta_{n,2}$  où  $\vartheta_{n,1}$  et  $\vartheta_{n,2}$  sont des constantes déterminées par la position des pivots  $C_{n-1}$  et  $C_{n+1}$ .

### 5.2.3.4 Paramétrisation par un $C^1$ -difféomorphisme

En revanche, si l'on souhaite que cette paramétrisation soit un  $C^1$ -difféomorphisme, nous butons sur un problème : il faudrait pour cela que la dérivée de  $\vartheta_n$  s'annule à chaque sommet de la boucle polygonale, ce qui interdirait alors à la paramétrisation d'être bijective.

Nous pouvons cependant traiter le problème suivant. Supposons que tous les segments  $[C_{n-1}; C_n]$  coupent la boucle à l'intérieur d'un segment. Quelles conditions doit satisfaire la paramétrisation pour être un homéomorphisme qui soit de classe  $C^1$  en ce point d'intersection  $M_n$  ?

Nous montrons en annexe C qu'une condition suffisante est d'avoir en ce point

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial \phi} = \frac{\|C_{n-1}M_n\|}{\|C_nM_n\|} \frac{\partial \vartheta_{n-1}}{\partial \phi} \quad (5.1)$$

Nous choisissons donc de définir  $\vartheta_n$  de la façon suivante. Elle est une fonction continue et strictement croissante, interpolant en plus des conditions de position évoquées dans le paragraphe précédent, deux conditions de tangence en chaque sommet de la séquence d'arêtes. Aux extrémités de la séquence (points d'intersection  $M_n$  et  $M_{n+1}$  entre la boucle et les segments  $[C_{n-1}; C_n]$  et  $[C_n; C_{n+1}]$  respectivement), nous choisissons de demander que la dérivée de  $\vartheta_n$  soit égale à

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial \phi}(\phi_{n,1}) = \frac{\lambda}{\|C_nM_n\|} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial \phi}(\phi_{n,2}) = \frac{\lambda}{\|C_nM_{n+1}\|} \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

où  $\lambda$  est indépendant de  $n$ . Cela nous assure que l'équation 5.1 est vérifiée, et donc que la paramétrisation est bien de classe  $C^1$  aux points d'intersection de  $[C_{n-1}; C_n]$  et de  $[C_n; C_{n+1}]$  avec la boucle.

Il nous reste à définir une telle fonction. Pour résumer, il s'agit de définir, pour chaque morceau, une fonction strictement croissante interpolant deux doubles conditions de position et tangence  $(\phi_1, \vartheta_1, \vartheta'_1)$  et  $(\phi_2, \vartheta_2, \vartheta'_2)$ . Nous ajoutons de plus que l'on souhaite expliciter sa réciproque. C'est pour cette dernière raison que nous n'utiliserons pas un polynôme de degré trois mais deux polynômes de degré deux se rejoignant au milieu de l'intervalle des paramètres (figure 5.11). Nous montrons en annexe C qu'une condition suffisante pour que cette fonction soit strictement croissante est

$$\max(\vartheta'_1, \vartheta'_2) \leq \text{pente} \quad (5.5)$$

où  $\text{pente} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\phi_2 - \phi_1}$ .

C'est pourquoi nous choisissons pour  $\lambda$ ,

$$\lambda = \min_n \{ \min(\text{pente}_{n-1} \|C_{n-1}M_n\|, \text{pente}_n \|C_nM_n\|) \} \quad (5.6)$$

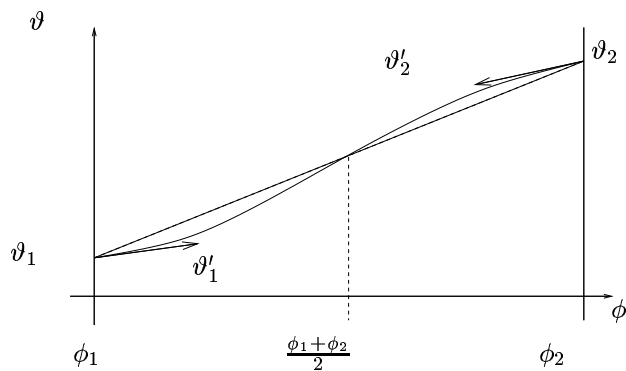


FIG. 5.11 – Interpolation bijective de conditions d'Hermite par deux polynômes de degré deux (schéma)

où  $\text{pente}_{n-1}$  est la pente du dernier morceau repéré par la base de centre  $C_{n-1}$ , et  $\text{pente}_n$  est la pente du premier morceau repéré par la base de centre  $C_n$ . La condition de tangence au sommet intérieur commun à la  $i - 1$ ème et à la  $i$ ème arêtes de la séquence est

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial \phi} = \min(\text{pente}_{n,i-1}, \text{pente}_{n,i}) \quad (5.7)$$

où  $\text{pente}_{n,i}$  est défini comme précédemment mais avec les conditions de position aux extrémités de la  $i$ ème arête de la portion de la boucle repérée par la base polaire locale de centre  $C_n$ .

## 5.3 Approximation d'une couronne polygonale quelconque par une couronne polygonale décrite dans une succession de bases polaires locales

### 5.3.1 Introduction

#### 5.3.1.1 Définitions

Après avoir paramétré une boucle du plan par un homéomorphisme sur le cercle unité, nous cherchons à paramétrer une couronne du plan par un homéomorphisme sur l'anneau circulaire unité.

**Définition 4 (Anneau circulaire)** On appelle anneau circulaire l'ensemble des points du plan compris entre deux cercles concentriques.

On appelle anneau circulaire unité l'ensemble  $\mathcal{A} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{u^2 + v^2} \leq 2\}$ .

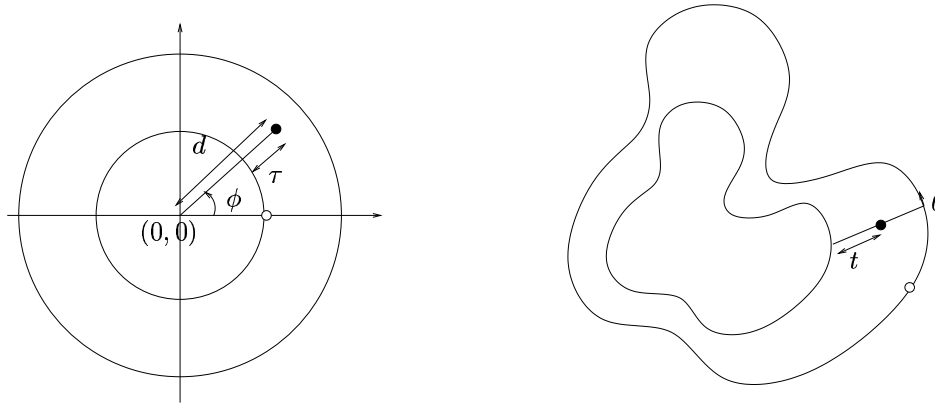


FIG. 5.12 – Description d'un couronne par un paramètre radial et un paramètre orthoradial

**Définition 5 (Couronne, partie centrale, intérieur, extérieur)** On appelle couronne tout ensemble de points du plan homéomorphe à  $\mathcal{A}$ .

La frontière de la couronne est composée de deux boucles, l'une (frontière intérieure) incluse dans la partie centrale de l'autre (frontière extérieure).

Une couronne partage le plan en trois régions : sa partie centrale qui est la partie centrale de sa frontière intérieure, son intérieur qui est l'ensemble de ses points, et son extérieur qui est la partie extérieure de sa frontière extérieure.

**Définition 6 (Couronne polygonale)** On appelle couronne polygonale une couronne dont les frontières sont des lignes polygonales.

Tout point de  $\mathcal{A}$  est repérable de façon unique par  $\phi$ , sa coordonnée orthoradiale (ou angulaire) et  $l$ , sa coordonnée radiale dans la base polaire de centre  $(0, 0)$ . On peut également choisir comme coordonnée radiale le rapport  $\tau = (l - r_1)/(r_2 - r_1)$  (dans le cas de l'anneau circulaire unité  $r_1 = 1$  et  $r_2 = 2$ ) qui donne la position relative du point par rapport aux points des frontières intérieure et extérieure de même coordonnée angulaire.

Il s'agit à présent de définir  $\vartheta$  et  $t$ , des coordonnées semblables à  $\phi$  et  $\tau$  repérant les points d'une couronne donnée, puis de définir un homéomorphisme de  $\mathcal{A}$  sur la couronne (figure 5.12).

### 5.3.1.2 Cas d'une couronne étoilée

La description d'une couronne par deux coordonnées radiales et orthoradiales se fait naturellement dans le cas d'une couronne étoilée.

**Définition 7 (Couronne étoilée)** Une couronne est étoilée si ses deux frontières sont étoilées autour d'un même point.

Malheureusement toute couronne n'est pas étoilée (figure 5.13).

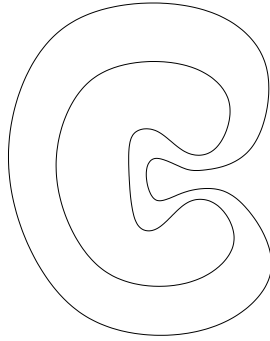


FIG. 5.13 – Une couronne non étoilée

### 5.3.1.3 Généralisation par l'intermédiaire de bases polaires locales

Tout comme nous l'avons fait pour la boucle, nous décomposons la couronne en portions, chaque portion étant étoilée et donc repérée par une coordonnée orthoradiale et une coordonnée radiale dans une base polaire locale de centre  $C_n$  appelé *pivot*.

Aussi, tout point de la boucle doit posséder une unique paire de coordonnées. Il doit donc être repéré dans une et une seule de ces bases locales. Pour cela nous généralisons ce qui a été fait pour la boucle : nous positionnons des pivots alternativement dans la partie centrale et à l'extérieur de la couronne de telle sorte que chaque segment  $[C_{n-1}; C_n]$  intersecte la couronne en une unique composante connexe.

Malheureusement, il existe des couronnes pour lesquelles on ne peut construire de tels pivots. C'est pourquoi nous proposons dans ce chapitre la construction d'une couronne polygonale décrite dans une succession de bases polaires locales et approchant une couronne polygonale donnée.

## 5.3.2 Construction des pivots et modification éventuelle de la boucle extérieure

### 5.3.2.1 Introduction

Pour réaliser une telle approximation nous suivons la philosophie suivante : nous faisons comme si la couronne polygonale donnée pouvait être décrite par une succession de bases polaires locales, et si à une étape de la construction une situation s'avère insoluble, nous modifions la frontière extérieure. Nous préférons modifier la frontière extérieure plutôt que la frontière intérieure car lors de l'application de l'approximation d'une couronne à la construction d'un atlas, la frontière intérieure est la frontière de la zone pure d'une région. Ce sont donc des points que la région ne partage avec aucune autre. Au contraire, la frontière extérieure va se mélanger avec des points d'autres régions. On accepte donc plus volontiers des erreurs sur elle en pensant qu'elles seront compensées lors du mélange.

La construction de l'approximation se déroule en trois temps :

- Positionnement des pivots.
- Modification éventuelle de la frontière extérieure.
- Paramétrisation de la couronne modifiée par un homéomorphisme défini sur  $\mathcal{A}$ .

### 5.3.2.2 Adaptation des étapes de la construction des pivots d'une boucle à celle des pivots d'une couronne

Il s'agit de définir une succession de bases polaires locales centrées en des points  $C_n$  nommés pivots de telle sorte que tout point d'une couronne polygonale soit repéré par une et une seule base.

Pour cela, nous proposons de définir alternativement un pivot dans la partie centrale et dans la partie extérieure de telle sorte que l'intersection de chaque segment  $[C_n, C_{n+1}]$  avec la couronne soit connexe (autrement dit un seul segment). Cette intersection sera repérée par l'une des deux bases centrées en  $C_n$  ou  $C_{n+1}$ .

Les qualités de la définition de tels pivots sont les mêmes que dans le cas d'une boucle. Nous utilisons donc la même démarche :

- Positionnement des pivots appartenant à la partie centrale
- Positionnement des pivots appartenant à la partie extérieure

La première étape est identique à celle proposée dans le cadre d'une boucle, appliquée à la frontière intérieure.

La deuxième étape demande quelques adaptations. Soit  $(S_1, S_2)$  une paire de pivots successifs appartenant à la partie centrale. S'ils correspondent au parcours d'une partie de la boucle intérieure qui tourne à droite, on note  $C$  le milieu de  $[S_1, S_2]$ . On recherche le point d'intersection de la boucle extérieure avec la médiatrice de  $[S_1, S_2]$ , le plus proche de  $C$  et se trouvant à droite de la droite dirigée par  $(S_1, S_2)$ . Si ce point n'existe pas ou correspond à une entrée de la médiatrice dans l'intérieur de la couronne, alors  $C$  est à l'extérieur de la couronne. On l'accepte comme pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$ .

Sinon, on le note  $P$ . On note  $I$  le point d'intersection, le plus proche de  $P$  (mais au-delà de  $P$  vis-à-vis de  $C$ ), de la demi-droite  $[C; P)$  avec l'une des deux frontières. Si l'intersection la plus proche se fait avec la frontière intérieure, alors  $[P, I]$  appartient à l'intérieur de la couronne : il faudra modifier la frontière extérieure ultérieurement. Si elle se fait avec la frontière extérieure, alors  $[P, I]$  appartient à la partie extérieure. Dans les deux cas, le pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$  est défini par  $M = P + \lambda \vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire dirigeant  $[C; P)$ , et  $\lambda = \|PI\|/2$ . Si  $I$  n'existe pas, le pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$  est défini par la même formule mais avec  $\lambda > 0$ .

Enfin, comme pour le cas d'une boucle, on est amené à supprimer des pivots si la ligne polygonale qui les lie a de mauvaises propriétés.



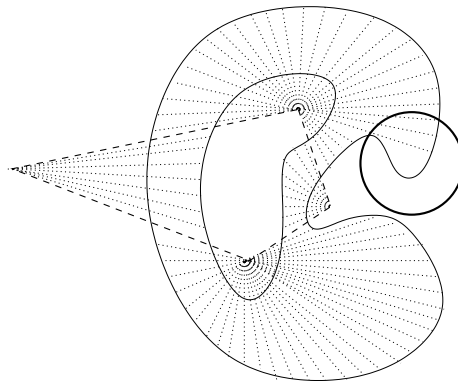


FIG. 5.14 – La partie encerclée n'est pas étoilée dans la base locale construite à partir de la boucle intérieure

### 5.3.2.3 Modification éventuelle de la boucle extérieure

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que certains pivots extérieurs pouvaient être définis dans l'intérieur de la couronne. Par ailleurs, rien ne garantit que les portions repérées par chaque base locale soient étoilées (figure 5.14). Nous présentons comment nous modifions la frontière extérieure lorsque ce n'est pas le cas.

Nous considérons la portion repérée par la base polaire locale de centre  $C_n$ . Celle-ci doit être délimitée par deux séquences d'arêtes qui ne se croisent pas et dont chacune a ses sommets de coordonnée angulaire croissante lorsqu'on la parcourt (ou décroissante selon que  $C_n$  appartient à la partie centrale ou à l'extérieur). Cela est vrai pour la séquence d'arêtes appartenant à la frontière intérieure. Cela doit être vérifié et, le cas échéant forcé, pour les arêtes appartenant à la frontière extérieure.

Nous commençons par nous assurer que chaque segment  $[C_{n-1}, C_n]$  intersecte deux segments appartenant chacun à l'une des deux frontières de la couronne. Si ce n'est pas le cas, on en crée une artificiellement qui appartiendra à la frontière extérieure modifiée. Ensuite, dans chaque portion repérée par une base polaire de centre  $C_n$ , nous parcourons la séquence d'arêtes appartenant à la frontière extérieure en commençant par l'arête qui intersecte  $[C_{n-1}, C_n]$ . On note  $\theta_{dern}$  la coordonnée angulaire dans cette base locale de l'origine du segment qui intersecte  $[C_{n+1}, C_n]$ . Si lors du parcours des arêtes, la coordonnée angulaire des sommets recule ou dépasse  $\theta_{dern}$ , on retire l'arête courante et son origine devient celle de l'arête suivante. Il en est de même si elle croise la séquence d'arêtes appartenant à la frontière intérieure.

Enfin, si l'arête qui intersecte  $[C_{n-1}, C_n]$  ou celle qui intersecte  $[C_{n+1}, C_n]$  a été créée artificiellement, on ne fait que relier ces deux arêtes par une troisième. Une des contraintes considérée lors de la création artificielle de ces arêtes est donc que la coordonnée angulaire de la pointe de la première arête soit plus petite que la coordonnée angulaire de l'origine de la dernière arête. Si cette arête coupe  $[C_{n-1}, C_n]$  ou  $[C_{n+1}, C_n]$ , on la remplace par deux arêtes comme l'indique la figure 5.15.

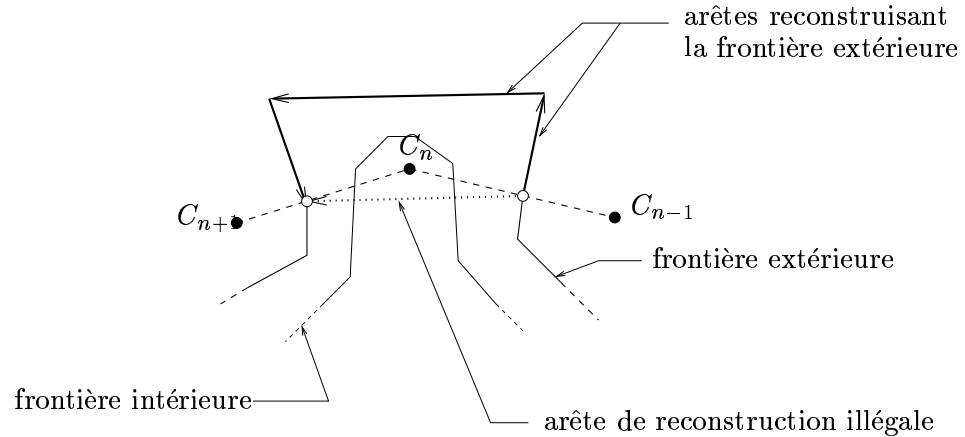


FIG. 5.15 – Cas particulier de reconstruction de la frontière extérieure

### 5.3.3 Définition de l'homéomorphisme

#### 5.3.3.1 Description dans une base polaire locale

Nous avons défini des pivots  $\{C_n\}$  positionnés alternativement dans la partie centrale et dans la partie extérieure, de telle sorte que chaque segment  $[C_{n-1}; C_n]$  intersecte la couronne en un unique segment, et que la portion de la couronne délimitée par les intersections de  $[C_{n-1}; C_n]$  et de  $[C_n; C_{n+1}]$  avec la couronne, soit étoilée par rapport à  $C_n$ .

Comme pour le cas de la boucle, tout point  $M^{\text{int}}$  de cette portion appartenant à la frontière intérieure est décrit par

$$M^{\text{int}} = C_n + \rho_n(\theta)\vec{u}(\theta)$$

On exprime alors la frontière extérieure comme l'“homothétique” de la frontière intérieure avec un coefficient d'homothétie  $b_n$  variable avec la coordonnée angulaire dans la base polaire locale :

$$M^{\text{ext}} = C_n + b_n(\theta)\rho_n(\theta)\vec{u}(\theta)$$

Si  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie centrale,  $b_n \in ]0; 1[$ , sinon,  $b_n > 1$ .

Tout point  $M$  de la couronne est alors décrit grâce aux points  $M^{\text{int}}$  et  $M^{\text{ext}}$  des deux frontières repérés par la même coordonnée angulaire, et par un coefficient  $t_n \in [0; 1]$  qui le situe sur le segment  $[M^{\text{int}}; M^{\text{ext}}]$ .

$$\begin{aligned} M &= (1 - t_n)M^{\text{int}} + t_nM^{\text{ext}} \\ M &= C_n + [(1 - t_n) + t_nb_n(\theta)]\rho_n(\theta)\vec{u}(\theta) \end{aligned}$$

### 5.3.3.2 Paramétrisation sur l'anneau circulaire

Rappelons que nous cherchons à paramétrer la couronne sur l'anneau circulaire unité  $\mathcal{A}$ .

Aussi, nous avons décrit cette couronne par morceaux dans des bases polaires locales successives. Il suffit alors de paramétrer chaque morceau de description sur une portion de  $\mathcal{A}$  correspondant à  $\phi \in [\phi_{n,1}, \phi_{n,2}]$  et  $l \in [r_1, r_2]$ , où  $\phi$  est la coordonnée orthoradiale et  $l$  la coordonnée radiale dans la base polaire de centre  $(0, 0)$ .

La paramétrisation s'écrit alors

$$M(l, \phi) = C_n + [(1 - t_n(l, \phi)) + t_n(l, \phi)b_n(\theta(\phi))] \rho_n(\theta(\phi)) \vec{u}(\theta(\phi))$$

avec  $M$  parcourant la boucle dans le sens trigonométrique quand  $\phi$  augmente.

Remarquons que  $b_n$  est calculé dans le plan de la couronne et non dans le plan de l'anneau circulaire : il dépend de  $l$  et  $\phi$  par l'intermédiaire de  $\theta$ , contrairement à  $t_n$ .

Comme pour le cas de la boucle, nous notons  $\vartheta_n = \theta$  et  $o_n = \theta_n^o$  si  $C_n$  appartient à la partie centrale, et  $\vartheta_n = \pi - \theta$  et  $o_n = \pi - \theta_n^o$  si  $C_n$  appartient à la partie extérieure (figure 5.10, page 103).

Nous avons ainsi

$$M(l, \phi) = C_n + [(1 - t_n(l, \phi)) + t_n(l, \phi)b_n(\vartheta_n)] \rho_n(\vartheta_n) \vec{u}(\theta)$$

où  $\theta = \vartheta_n$  ou  $\theta = \pi - \vartheta_n$ ,  $\vartheta_n = \vartheta_n(\phi)$  et

$$\rho_n(\vartheta_n) = \frac{d_n}{\cos(\vartheta_n - o_n)} \quad (5.8)$$

REMARQUE —

Notons que dans le cas d'une couronne polygonale, la frontière intérieure est constituée de plusieurs segments.  $d_n$  et  $o_n$  sont donc des fonctions de  $\vartheta_n$  constantes par morceaux.

Enfin, nous choisissons de paramétrer la couronne par strates (figure 5.16).

Comme nous avons défini  $t_n$  pour situer un point de la couronne par rapport aux points des frontières de même coordonnée angulaire, nous définissons sur l'anneau circulaire

$$\tau = \frac{l - r_1}{r_2 - r_1}$$

et nous paramétrons  $t_n$  par

$$t_n(l, \phi) = \tau(l, \phi)$$

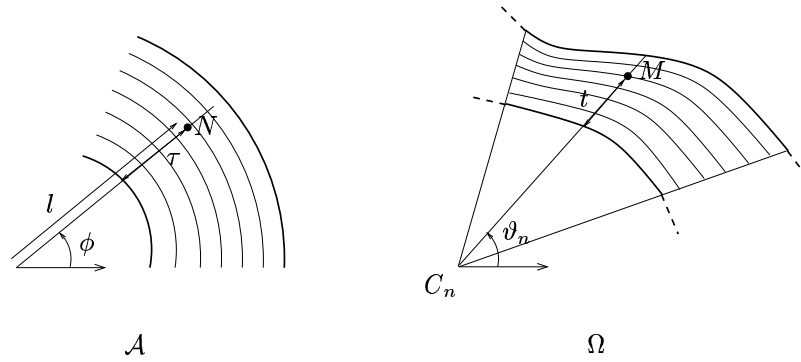


FIG. 5.16 – La paramétrisation d'une couronne est définie par strates. Ses lignes à  $t$  constant sont paramétrées sur les lignes à  $\tau$  constant de  $\mathcal{A}$

REMARQUE —

$\tau$  étant défini sur un anneau circulaire, il ne dépend pas de  $\phi$ . Mais dans l'application que nous faisons de ces travaux à la construction d'un atlas, nous définirons la paramétrisation sur un autre domaine et  $\tau$  sera alors défini par

$$\tau(l, \phi) = \frac{l - r_1(\phi)}{r_2(\phi) - r_1(\phi)}$$

### 5.3.3.3 Paramétrisation par un homéomorphisme

Pour que cette paramétrisation soit un homéomorphisme, il suffit de vérifier qu'elle est continue, inversible et d'inverse continue.

Elle est continue par construction puisqu'elle décrit un objet continu. Son inverse se calcule de la façon suivante. Soit un point  $M = (x, y)$  de la portion repérée par la base polaire locale de centre  $C_n = (x_n, y_n)$ . Alors si  $C_n$  appartient à la partie centrale,

$$\vartheta = \arctan \frac{y - y_n}{x - x_n}$$

sinon

$$\vartheta = \pi - \arctan \frac{y - y_n}{x - x_n}.$$

On peut alors définir  $t_n$  par

$$t_n = \frac{\|C_n M\| - \rho_n(\vartheta)}{(b_n(\vartheta) - 1)\rho_n(\vartheta)} \quad (5.9)$$

dont on déduit  $l$  par

$$l = (1 - t_n)r_1 + t_n r_2$$

Par hypothèse,  $b_n \neq 1$  et  $\rho_n \neq 0$ . L'équation 5.9 est donc bien définie.

REMARQUE —

Dans le cas où l'on ne paramétrise pas la couronne sur un anneau circulaire, il faut d'abord évaluer  $\phi$  afin de calculer  $r_1(\phi)$  et  $r_2(\phi)$  puis en déduire  $l$ .

Si l'on ne demande pas que la paramétrisation soit de continuité supérieure à la continuité  $C^0$ , on utilise la même définition linéaire par morceaux de  $\vartheta_n(\phi)$  que celle proposée pour la paramétrisation d'une boucle. On peut alors écrire

$$\phi = \vartheta_n^{-1}(\vartheta)$$

De plus, pour que cette paramétrisation décrive la couronne polygonale, il faut

$$b_n(\vartheta) = \frac{\rho_n^{\text{ext}}(\vartheta)}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta)}$$

où  $\rho_n^{\text{ext}}$  est l'équation d'une arête de la séquence de la frontière extérieure et  $\rho_n^{\text{int}}(\vartheta) = \rho_n(\vartheta)$ . En pratique,  $b_n$  est défini ainsi par morceaux, chaque morceau correspondant à un intervalle d'angles  $\vartheta$  où les deux séquences d'arêtes appartenant aux deux frontières de la couronne polygonale sont chacun un segment d'arête.

Enfin, cette paramétrisation est bien un homéomorphisme si les différentes portions ne se superposent pas, ce qui doit être vérifié lors de la mise en conformité de la frontière extérieure.

### 5.3.3.4 Paramétrisation par un $C^1$ -difféomorphisme

En revanche, si l'on souhaite que cette paramétrisation soit un  $C^1$ -difféomorphisme, même aux points de l'intersection des segments  $[C_{n-1}; C_n]$  avec la couronne, la définition proposée pour la paramétrisation d'une boucle nécessite la condition 5.1 qui ne peut être assurée pour deux strates différentes.

Il faut alors définir  $\vartheta_n$  comme une fonction dépendant des deux variables  $\phi$  et  $l$ . Plus précisément nous écrivons

$$\vartheta = \vartheta_n(\tau, \phi)$$

ou encore

$$\vartheta(l, \phi) = \vartheta_n(\tau(l, \phi), \phi)$$

Pour chaque strate, autrement dit pour un  $\tau$  fixé,  $\vartheta_n$  est définie par une succession de polynômes de degré deux interpolant des conditions de position et de tangence, comme nous l'avons exposé dans le cas d'une boucle.

Aussi, on peut remarquer que chacune de ces solutions dépend continûment des conditions de position et de tangence. Les conditions de position varient naturellement de façon continue. De plus nous proposons de conserver une condition de tangence en un sommet intérieur à une séquence d'arêtes identique pour toutes les traces et définie par

l'équation 5.4. Enfin, nous montrons en annexe C qu'une condition suffisante pour avoir une paramétrisation de classe  $C^1$  est

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial v}(u, \phi_{n,1}) = \frac{\|C_{n-1}M_n\|}{\|C_nM_n\|} \frac{\partial \vartheta_{n-1}}{\partial v}(u, \phi_{n-1,2}) \quad (5.10)$$

$$\frac{db_n}{d\vartheta}(\vartheta_n(u, \phi_{n,1})) = \frac{db_{n-1}}{d\vartheta}(\vartheta_{n-1}(u, \phi_{n-1,2})) = 0 \quad (5.11)$$

pour tout  $u$ , où l'on note  $u$  la première variable de  $\vartheta_n$  et  $v$  la deuxième.

La première condition est vérifiée si les conditions de tangence aux extrémités de la séquence vérifient

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial \phi}(\tau, \phi_{n,i}) = \frac{\lambda}{\|C_nM(\tau)\|} \quad (5.12)$$

où  $\lambda$  est non seulement indépendant de  $n$  mais également de  $\tau$  et où  $M(\tau) = \tau M^{\text{ext}}(\phi_{n,i}) + (1 - \tau)M^{\text{int}}(\phi_{n,i})$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .  $\lambda$  doit de plus être tel que l'équation 5.5 soit vérifiée. C'est pourquoi nous choisissons

$$\lambda = \min_n \{ \min(\text{pente}_{n-1} \|C_{n-1}M_{n-1}\|, \text{pente}_n \|C_nM_n\|) \} \quad (5.13)$$

où  $M_n$  est le point appartenant à la frontière intérieure si  $C_n$  appartient à la partie centrale, et  $M_n$  est le point appartenant à la frontière extérieure si  $C_n$  appartient à la partie extérieure.

La deuxième condition est vérifiée si les arêtes extrêmes de la séquence appartenant à la frontière extérieure sont parallèles aux arêtes extrêmes de la séquence appartenant à la frontière intérieure. Cela donne une nouvelle condition à vérifier lors de la mise en conformité de la frontière extérieure.

REMARQUE —

Pour l'application à la construction d'un atlas, cette dernière condition n'est pas à vérifier car  $b_n$  définira une approximation continue de cette frontière extérieure satisfaisant l'équation 5.11.

## 5.4 Approximation d'une couronne polygonale quelconque par une couronne continue

### 5.4.1 Introduction

#### 5.4.1.1 Définitions

Nous nous proposons enfin de définir l'approximation d'une couronne polygonale par une couronne continue incluse dans son intérieur. Cette contrainte d'inclusion est posée pour l'application de cette approximation à la construction de notre modèle. En effet, pour utiliser une fonction définie sur une couronne polygonale ( $p_i$  sur la couronne d'échange de  $\Omega_i^0$ ) sur une autre couronne approchant celle-ci (la couronne d'échange de  $\Omega_i$ ), cette nouvelle couronne doit être incluse dans celle qu'elle approche.

**Définition 8 (Couronne continue)** *Une couronne continue est une couronne du plan paramétrée par un  $C^1$ -difféomorphisme.*

#### 5.4.1.2 Une solution par une surface de Bézier et ses limites

Une première idée serait de considérer la couronne polygonale comme le polyèdre de contrôle d'une surface de Bézier (voir paragraphe ??). Pour cela, il faudrait ajouter des sommets aux deux lignes polygonales fermées de telle sorte que tous les sommets soient repérés par le même angle dans une base polaire locale. Les sommets étant ainsi associés deux à deux entre les deux lignes polygonales, ils constituent un polyèdre de contrôle plan d'une surface de Bézier elle-même plane et qui peut être considérée comme une approximation continue de la couronne polygonale (figure 5.17). Malheureusement, étant donné un point de la surface de Bézier, on ne connaît pas les valeurs des paramètres qui lui correspondent. On ne peut donc proposer une réciproque de la paramétrisation qui soit explicite. De plus, la surface de Bézier n'est pas nécessairement incluse dans l'enveloppe convexe de son polyèdre de contrôle, même s'il est contenu dans le plan.

#### 5.4.1.3 Une solution par une étape intermédiaire : l'approximation par une couronne polygonale décrite dans une succession de bases polaires locales

Nous proposons donc de procéder en deux temps :

- approcher la couronne polygonale par une couronne polygonale décrite par une succession de bases polaires locales ;
- approcher, dans cette description, cette dernière couronne polygonale par une couronne continue qui lui est contenue.

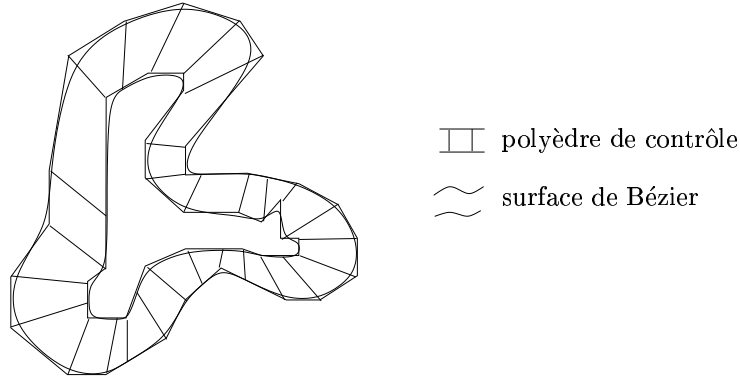


FIG. 5.17 – Une première solution : considérer la couronne polygonale comme étant le polyèdre de contrôle d'une surface de Bézier

La première étape a été décrite dans la section précédente. Nous avons conclu par des conditions suffisantes pour que cette couronne soit paramétrée par un homéomorphisme de classe  $C^1$  lors du passage d'une base polaire locale à une autre. Il nous reste donc à en déduire une paramétrisation de classe  $C^1$  en tous les autres points, telle que la couronne alors décrite soit incluse dans l'intérieur de cette deuxième couronne polygonale.

Or la fonction  $\vartheta_n(\tau, \phi)$  définie dans la section précédente est déjà de classe  $C^1$ . Il suffit donc de lisser les fonctions  $\rho_n$  et  $b_n$ .

#### 5.4.2 Approximation de la boucle intérieure : lissage du paramètre $\rho_n$

La fonction  $\rho_n$  définie dans la section précédente est l'équation polaire de segments de droites partageant successivement une de leurs extrémités. De plus, ces segments appartiennent à la frontière intérieure. Il faut donc définir la nouvelle fonction  $\rho_n(\vartheta)$  comme une fonction de classe  $C^1$  majorant l'ancienne fonction si  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie centrale ou la minorant si  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie extérieure (figure 5.18). Afin de les différencier, nous notons l'ancienne fonction décrivant la frontière intérieure polygonale  $\rho_n^{\text{int}}(\vartheta)$  et la nouvelle fonction décrivant la frontière lissée  $\rho_n(\vartheta)$ .

Les seules discontinuités de l'ancienne fonction résident aux points de jonction entre deux segments successifs. Nous proposons d'arrondir chacune de ces discontinuités en l'approchant, dans le plan de la couronne, par un morceau de spirale raccordée continuellement avec les deux segments qui s'y rejoignent. Cette solution rejoint les idées développées par Szilvási-Nagy *et al.* [SNV00] et Meek *et al.* [MW98]. En coordonnées polaires, ce morceau de spirale est décrit par une équation affine. Nous travaillons donc avec les coordonnées polaires plutôt qu'avec les coordonnées cartésiennes. Nous définissons, au voisinage de chaque valeur de  $\vartheta$  correspondant à une discontinuité de l'ancienne fonction, une fonction affine. Cette fonction affine majore l'ancienne fonction en tout point de ce voisinage. En pratique,



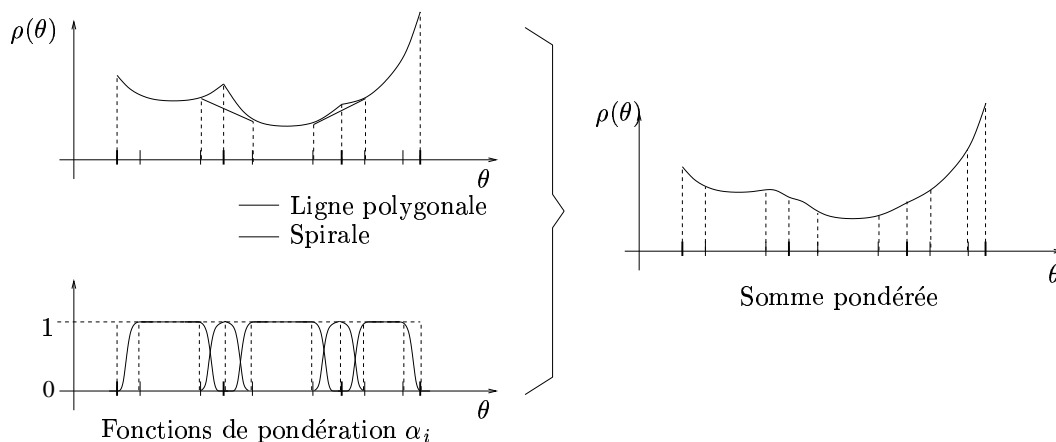


FIG. 5.18 – Minoration de l'équation polaire d'une ligne polygonale par la combinaison convexe d'équations de droites et de spirales

le voisinage recouvre le tiers de chacun des intervalles où sont définies les équations des deux segments qui se rejoignent au point de discontinuité concerné.

On définit ensuite une partition de l'unité  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  subordonnée au recouvrement du domaine de définition de  $\rho_n^{\text{int}}$ , constitué des intervalles de définition de l'équation de chaque segment de droite ainsi que des intervalles de définition de l'équation affine de chaque morceau de spirale défini ci-dessus. Si  $\alpha_i$  est définie sur l'intervalle de définition de l'équation d'un segment, elle est égale à 1 sur le tiers central de son intervalle de définition et 0 en ses extrémités. Si  $\alpha_i$  est définie sur l'intervalle de définition de l'équation d'un morceau de spirale, elle est égale à 1 à la valeur de  $\vartheta$  correspondant à la jonction des deux segments et à 0 aux extrémités de son intervalle de définition. Enfin, chaque  $\alpha_i$  est positive et de classe  $C^1$  sur son intervalle de définition, et leur somme en tout point est égale à 1. Nous verrons dans la section suivante comment construire une telle partition de l'unité dans un cadre plus général.

La nouvelle fonction  $\rho_n$  est alors définie comme la combinaison convexe des équations des segments et des morceaux de spirales, combinaison dont les fonctions  $\alpha_i$  constituent les poids. Nous étudierons plus précisément dans le chapitre suivant cette méthode de raccord de fonctions par combinaison convexe. Notons seulement que la nouvelle fonction  $\rho_n$  ainsi définie majore effectivement l'ancienne fonction grâce à la propriété suivante de la combinaison convexe : son résultat est contenu dans l'enveloppe convexe des primitives (ici les primitives sont les équations des segments et des morceaux de spirale).

REMARQUE —

En pratique, pour définir les morceaux de spirales, nous choisissons celles dont l'équation est déterminée par le minimum de paramètres : les fonctions constantes. Les morceaux de spirales sont alors des morceaux de cercle.

### 5.4.3 Approximation de la boucle extérieure : lissage du paramètre $b_n$

Dans la section précédente,  $b_n$  est définie par morceaux. Chaque morceau correspond à un intervalle de  $\vartheta$  où les deux frontières de la couronne polygonale sont sans discontinuités : ce sont deux segments, morceaux de deux arêtes qui composent les frontières. L'ancienne fonction  $b_n$  était alors définie comme le rapport des équations polaires de ces deux segments.

Nous proposons d'approcher cette définition par une cubique définie par morceaux de continuité  $C^1$ . Le domaine de définition  $[\vartheta_{n,i-1}, \vartheta_{n,i}]$ ,  $i \in \{1, \dots, I_n\}$ , de chaque morceau de cette nouvelle fonction correspond au domaine de définition d'un morceau de l'ancienne fonction ou à un sous-domaine si, parmi les points de la droite qui porte ce segment, le plus proche de  $C_n$  appartient à ce segment. Dans ce dernier cas, ce point est considéré comme un sommet de la frontière divisant l'arête en deux autres arêtes colinéaires. Sur chaque morceau, la nouvelle fonction est une cubique qui interpole des conditions de position et de tangence.

La famille de cubiques d'interpolation dont on peut aisément contrôler la localisation est celle qui interpole des conditions de tangence nulles. On est alors assuré que la valeur de la cubique en tout point de l'intervalle est bornée par les conditions de position. C'est pour cette raison que nous avons préféré l'écriture  $\rho_n^{\text{ext}} = b_n \rho_n^{\text{int}}$  à l'écriture  $\rho_n^{\text{ext}} = \rho_n^{\text{int}} + b_n$ .

Enfin les conditions de positions sont fixées de telle sorte que  $b_n(\vartheta) \rho_n^{\text{int}}(\vartheta)$  soit inférieure à  $\rho_n^{\text{ext}}(\vartheta)$ , la coordonnée radiale du point de la frontière extérieure de même coordonnée angulaire  $\vartheta$ . Aussi si le rapport  $\rho_n^{\text{ext}}/\rho_n^{\text{int}}$  a des *extrema* locaux, ils sont atteints en des valeurs prises parmi les  $\vartheta_{n,i}$ .

Notons  $e_{n,i} = \|\rho_n^{\text{ext}}(\vartheta_{n,i}) - \rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\|$  l'épaisseur de la couronne polygonale dans la coupe des points de coordonnée angulaire égale à  $\vartheta_{n,i}$ . Nous définissons alors pour chaque morceau défini sur l'intervalle  $[\vartheta_{n,i-1}, \vartheta_{n,i}]$  le nombre

$$b_{n,i-1}^{\text{cent}} = 1 + \frac{\min(e_{n,i-1}, e_{n,i})}{\max(\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i-1}), \rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i}))}$$

si  $C_n$  appartient à la partie centrale, et

$$b_{n,i-1}^{\text{ext}} = 1 - \frac{\min(e_{n,i-1}, e_{n,i})}{\max(\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i-1}), \rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i}))}$$

si  $C_n$  appartient à la partie extérieure.

Nous montrons en annexe C que  $b_n(\vartheta) \rho_n^{\text{int}}(\vartheta) \leq \rho_n^{\text{ext}}(\vartheta)$  si l'on choisit comme condition de position à interpoler en  $\vartheta_{n,i}$

$$\min(b_{n,i-1}^{\text{cent}}, b_{n,i}^{\text{cent}})$$

si  $\vartheta_{n,i}$  n'est pas une des bornes du domaine de définition de  $b_n$ ,

$$\min(b_{n,0}^{\text{cent}}, 1 + (1 - b_{n-1, I_{n-1}-1}^{\text{ext}}) \frac{\rho_{n-1}^{\text{int}}(\vartheta_{n-1, I_{n-1}-1})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,0})})$$

si  $\vartheta_{n,i}$  est la première borne du domaine de définition de  $b_n$  et

$$\min(b_{n,I_{n-1}}^{\text{cent}}, 1 + (1 - b_{n+1,0}^{\text{ext}}) \frac{\rho_{n+1}^{\text{int}}(\vartheta_{n+1,0})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n})})$$

si  $\vartheta_{n,i}$  est la dernière borne du domaine de définition de  $b_n$ . Ces valeurs sont données pour  $C_n$  appartenant à la partie centrale.

Au contraire, si  $C_n$  appartient à la partie extérieure, ces trois valeurs deviennent respectivement

$$\begin{aligned} & \max(b_{n,i-1}^{\text{ext}}, b_{n,i}^{\text{ext}}) \\ & \max(b_{n,0}^{\text{ext}}, 1 - (1 + b_{n-1,I_{n-1}-1}^{\text{cent}}) \frac{\rho_{n-1}^{\text{int}}(\vartheta_{n-1,I_{n-1}})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,0})}) \\ & \max(b_{n,I_{n-1}}^{\text{ext}}, 1 - (1 + b_{n+1,0}^{\text{cent}}) \frac{\rho_{n+1}^{\text{int}}(\vartheta_{n+1,0})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n})}) \end{aligned}$$

REMARQUE —

En théorie, ces conditions de positions ne garantissent pas que l'approximation de la frontière extérieure déterminée par la nouvelle fonction  $b_n$  soit incluse dans l'intérieur de la couronne polygonale. En effet, ces conditions ont été calculées à partir des points de la frontière intérieure de la couronne polygonale. Or celle-ci a été précédemment approchée par le lissage de  $\rho_n^{\text{int}}$  en  $\rho_n$  (dont nous ne pouvons évaluer les *extrema*). Cependant, nous considérons que les marges prises lors du calcul de ces conditions en les évaluant comme des extrema de plusieurs valeurs compensent cette imprécision.

On peut également souhaiter économiser la place mémoire nécessaire au codage de cette approximation aux dépens de la qualité de l'approximation, en définissant chaque  $b_n$  comme une unique cubique. Dans ce cas, nous redéfinissons

$$b_n^{\text{cent}} = 1 + \frac{\min_{i \in 0, \dots, I_n}(e_{n,i})}{\max_{i \in 0, \dots, I_n}(\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i}))}$$

si  $C_n$  appartient à la partie centrale, et

$$b_n^{\text{ext}} = 1 - \frac{\min_{i \in 0, \dots, I_n}(e_{n,i})}{\max_{i \in 0, \dots, I_n}(\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i}))}$$

si  $C_n$  appartient à la partie extérieure.

Les conditions de tangence sont toujours nulles. Les conditions de positions, aux bornes du domaine de définition de  $b_n$  deviennent

$$\min(b_n^{\text{cent}}, 1 + (1 - b_{n-1}^{\text{ext}}) \frac{\rho_{n-1}^{\text{int}}(\vartheta_{n-1,I_{n-1}})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,0})})$$

et

$$\min(b_n^{\text{cent}}, 1 + (1 - b_{n+1}^{\text{ext}}) \frac{\rho_{n+1}^{\text{int}}(\vartheta_{n+1,0})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n})})$$

si  $C_n$  appartient à la partie centrale, et

$$\max(b_n^{\text{ext}}, 1 - (1 + b_{n-1}^{\text{cent}}) \frac{\rho_{n-1}^{\text{int}}(\vartheta_{n-1,I_{n-1}})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,0})})$$

et

$$\max(b_n^{\text{ext}}, 1 - (1 + b_{n+1}^{\text{cent}}) \frac{\rho_{n+1}^{\text{int}}(\vartheta_{n+1,0})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n})})$$

si  $C_n$  appartient à la partie extérieure.

#### 5.4.4 Résultats

Nous consacrons ce paragraphe à la présentation de quelques résultats de la méthode d'approximation d'une couronne polygonale par une couronne continue qui lui est contenue, que nous avons proposée dans cette section.

Nous proposons trois couronnes à approcher. La première a pour frontières deux carrés, la deuxième deux hexagones et la troisième n'est pas étoilée. Dans chaque cas, nous présentons sur les deux premières lignes les étapes successives de la construction de l'approximation : couronne polygonale à approcher, triangulation de la partie centrale, construction du pseudo-squelette, et enfin construction des pivots. Sur les deux lignes suivantes nous illustrons les différents choix sur la définition de  $b_n$  qui s'offrent à nous et que nous avons évoqués dans cette section. Dans tous les cas, le définir comme un unique polynôme de degré trois dans chaque base polaire locale donne un aspect plus simple et plus lisse aux frontières que s'il est défini comme une spline. Au contraire, la couronne continue recouvre alors moins bien la couronne polygonale. Par ailleurs, si l'on approche d'abord la frontière extérieure et que l'on en déduit ensuite la frontière intérieure grâce à  $b_n$ , le résultat semble mieux couvrir la couronne polygonale mais la frontière intérieure est moins bien approchée. Or nous savons qu'il s'agit de la partie la plus importante. C'est pourquoi nous avons préféré exposer dans cette section les calculs relatifs au choix contraire : une bonne approximation de la frontière intérieure et la déduction de la frontière extérieure grâce à  $b_n$ . Nous donnons alors sur les deux lignes suivantes les approximations avec  $b_n$  défini comme une spline permettant de déduire la frontière extérieure de la frontière intérieure, puis avec  $b_n$  défini comme un polynôme de degré trois permettant de déduire la frontière intérieure de la frontière extérieure, puis avec  $b_n$  défini comme une spline permettant de déduire la frontière extérieure de la frontière intérieure, et enfin avec  $b_n$  défini comme un polynôme de degré trois permettant de déduire la frontière intérieure de la frontière extérieure.

La première couronne polygonale que nous approchons a pour frontières deux carrés. Il s'agit du cas le plus simple où tout est symétrique, de la couronne polygonale à son approximation en passant par la triangulation de la partie centrale (figure 5.26).

La figure 5.19 est un gros plan sur l'approximation de la frontière intérieure par combinaison convexe de segments de droites avec des segments de spirales tout en assurant que l'approximation soit bien contenue dans la couronne polygonale.

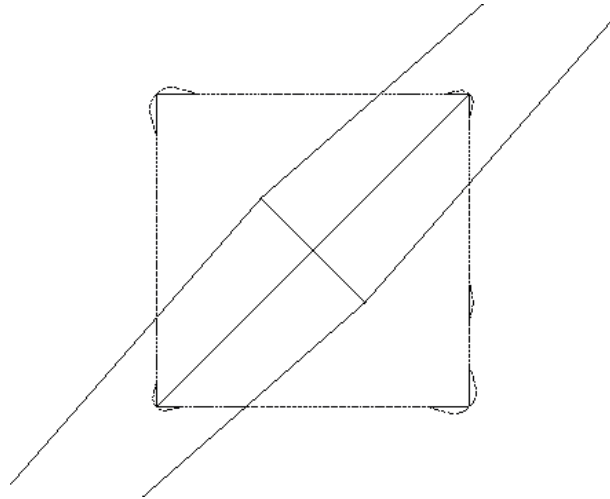


FIG. 5.19 – Approximation de la frontière intérieure par combinaison convexe de segments de droites avec des segments de spirales

La deuxième couronne que nous approchons a pour frontières deux hexagones. Elle est donc tout aussi symétrique que la précédente, mais sa triangulation ne l'est pas. Nous illustrons alors les importantes répercussions de cette dissymétrie sur le résultat final (figure 5.27).

Enfin, nous illustrons notre méthode avec une couronne non étoilée (figure 5.28).

## 5.5 Application à la construction d'un atlas

L'approximation d'une couronne polygonale par une couronne continue est utile pour la construction de l'atlas d'une surface lisse  $\mathcal{S}$  approchant un maillage triangulaire  $\mathcal{M}$  donné.

En effet, dans le chapitre précédent, nous avons défini sur le maillage  $\mathcal{M}$  un recouvrement dont chaque région  $R_i$  était bien approchée par un plan sur lequel elle se projette bijectivement en une région polygonale notée  $V_i = v_i(R_i)$ . La construction d'un repère local de  $\mathbb{R}^3$  dont le centre  $O_i$  et deux vecteurs de base  $(u_{i,1}, u_{i,2})$  appartiennent au plan portant  $V_i$  permet de définir une région polygonale de  $\mathbb{R}^2$  notée  $\Omega_i^0 = p_i^{-1}(V_i)$ .

$$\begin{aligned} p_i : \Omega_i^0 &\rightarrow V_i \\ (x, y) &\mapsto O_i + xu_{i,1} + yu_{i,2} \end{aligned}$$

Nous avons établi dans le chapitre précédent que l'ensemble des points qu'une région  $R_i$  partage avec d'autres régions (sa zone d'échange) est une couronne dont la frontière

extérieure est la frontière de  $R_i$  et dont la partie centrale est la zone pure de  $R_i$  (ensemble des points qu'elle ne partage avec aucune autre région). On définit sur  $\Omega_i^0$  une zone pure et une couronne d'échange, images par la fonction continue et bijective  $p_i^{-1} \circ v_i$  des zones pure et d'échange de  $R_i$ .

Ces domaines  $\Omega_i^0$  du plan sont alors approchés par des domaines continus  $\Omega_i$  définis par l'approximation de la couronne d'échange polygonale de  $\Omega_i^0$  par une couronne continue (la couronne d'échange de  $\Omega_i$ ). La couronne continue d'échange de  $\Omega_i$  est par définition paramétrée par un  $C^1$ -difféomorphisme sur un domaine. En faisant se superposer les domaines de paramétrisation des couronnes d'échange de plusieurs régions, nous définissons la fonction de transition  $\varphi_{ij}$  comme la composée de la paramétrisation de la couronne de  $\Omega_j$  avec la réciproque de la paramétrisation de la couronne de  $\Omega_i$ .

Enfin, la description de la couronne d'échange par une coordonnée radiale et une coordonnée orthoradiale va permettre la définition aisée d'une partition de l'unité subordonnée aux domaines  $\Omega_i$ . Chaque fonction est égale à 1 dans la zone pure de  $\Omega_i$  et décroît jusqu'à 0 sur la frontière extérieure suivant la coordonnée radiale.

## 5.5.1 Fonction de transition

### 5.5.1.1 Introduction

Soient  $R_i$  et  $R_j$  deux régions voisines du recouvrement défini sur  $\mathcal{M}$ . Nous avons présenté dans le paragraphe précédent la construction des régions polygonales de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Omega_i^0$  et  $\Omega_j^0$  images de  $R_i$  et  $R_j$  par  $p_i^{-1} \circ v_i$  et  $p_j^{-1} \circ v_j$  respectivement. Nous définissons  $\Omega_{ij}^0 = p_i^{-1} \circ v_i(R_i \cap R_j)$  et  $\Omega_{ji}^0 = p_j^{-1} \circ v_j(R_i \cap R_j)$ .

Nous souhaitons approcher  $\Omega_i^0$  et  $\Omega_j^0$  par deux domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ . Nous notons  $\Omega_{ij}$  la partie de  $\Omega_i$  approchant la partie  $\Omega_{ij}^0$  de  $\Omega_i^0$ . De même, nous notons  $\Omega_{ji}$  la partie de  $\Omega_j$  approchant la partie  $\Omega_{ji}^0$  de  $\Omega_j^0$ .

Nous souhaitons définir la fonction de transition  $\varphi_{ij}$  comme un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\Omega_{ij}$  dans  $\Omega_{ji}$ . Cette fonction doit être telle que pour tout  $m \in \Omega_{ij}$ ,  $p_i(m)$  et  $p_j(\varphi_{ij}(m))$  approchent le même point de  $\mathcal{M}$ .

Pour réaliser cela, nous approchons la couronne d'échange de chaque domaine  $\Omega_i^0$  par une couronne continue. Cette couronne continue est paramétrée par un  $C^1$ -difféomorphisme noté  $c_i$ . Les différentes fonctions  $c_i$  doivent alors être définies sur des domaines qui se superposent de telle sorte que l'on puisse définir les fonctions de transition par

$$\varphi_{ij} = c_j \circ c_i^{-1}$$

Nous devons alors vérifier

- la transitivité entre transitions : les compositions de fonctions de transition doivent être cohérentes ;

- une bonne mise en correspondance :  $p_i(m)$  et  $p_j(\varphi_{ij}(m))$  approchent le même point de  $\mathcal{M}$ .

### 5.5.1.2 Des transitions transitives

Supposons deux régions voisines  $R_i$  et  $R_j$ . Alors il faut vérifier

$$\varphi_{ji} \circ \varphi_{ij} = \text{id}_{\Omega_{ij}}$$

où  $\text{id}_{\Omega_{ij}}$  est la fonction identité sur  $\Omega_{ij}$ .

Cela est vrai par définition des fonctions de transition :

$$\varphi_{ji} \circ \varphi_{ij} = c_j \circ c_i^{-1} \circ c_i \circ c_j^{-1}$$

Les régions appartenant à un recouvrement bien formé, au plus trois régions se superposent en un point. Il faut alors vérifier en tout point de  $\Omega_{i,jk} = \Omega_{ij} \cap \Omega_{ik}$

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$$

Pour cela, nous choisissons de superposer les domaines de définition de  $c_i$ ,  $c_j$  et  $c_k$  de telle sorte que les parties  $\Omega_{i,jk}$ ,  $\Omega_{j,ik}$  et  $\Omega_{k,ij}$  de  $\Omega_i$ ,  $\Omega_j$  et  $\Omega_k$  respectivement, soient paramétrées sur une même région  $T$  du plan.

Aussi nous avons vu que les zones d'échange sur un recouvrement bien formé se répartissent en zones doubles (où seules deux régions se superposent) et en zones triples (où seules trois régions se superposent) homéomorphes à des disques et telles que chaque zone double est adjacente à deux zones triples (l'union de ces trois composantes constitue alors l'intersection entre deux régions) et chaque zone triple est adjacente à trois zones doubles.

Nous coupons alors chaque zone double en deux (séparant ainsi les deux zones triples adjacentes).

REMARQUE —

En pratique, la zone double contient des arêtes de  $\mathcal{M}$ . Pour couper la zone double en deux, nous choisissons une de ces arêtes dont chacune des deux extrémités appartient à l'une des deux régions qui se superposent en cette zone double.

A ce découpage correspond un découpage en tronçons des zones d'échange de chaque domaine  $\Omega_i^0$  où chaque tronçon est constitué de l'image d'une zone triple et de deux demi-zones doubles. Nous définissons alors  $c_i$  par morceaux. Chaque morceau approche un tronçon de  $\Omega_i^0$ . Il contient donc une partie  $\Omega_{i,jk}$  qui approche l'image de la zone triple contenue dans le tronçon. On note alors  $c_{i,jk}$  le morceau de  $c_i$  qui le paramètre. Nous définissons donc les trois fonctions  $c_{i,jk}$ ,  $c_{j,ik}$  et  $c_{k,ij}$  qui paramètrent les morceaux de  $\Omega_i$ ,  $\Omega_j$  et  $\Omega_k$  qui contiennent  $\Omega_{i,jk}$ ,  $\Omega_{j,ik}$  et  $\Omega_{k,ij}$  respectivement sur un même domaine du plan noté  $T$ .

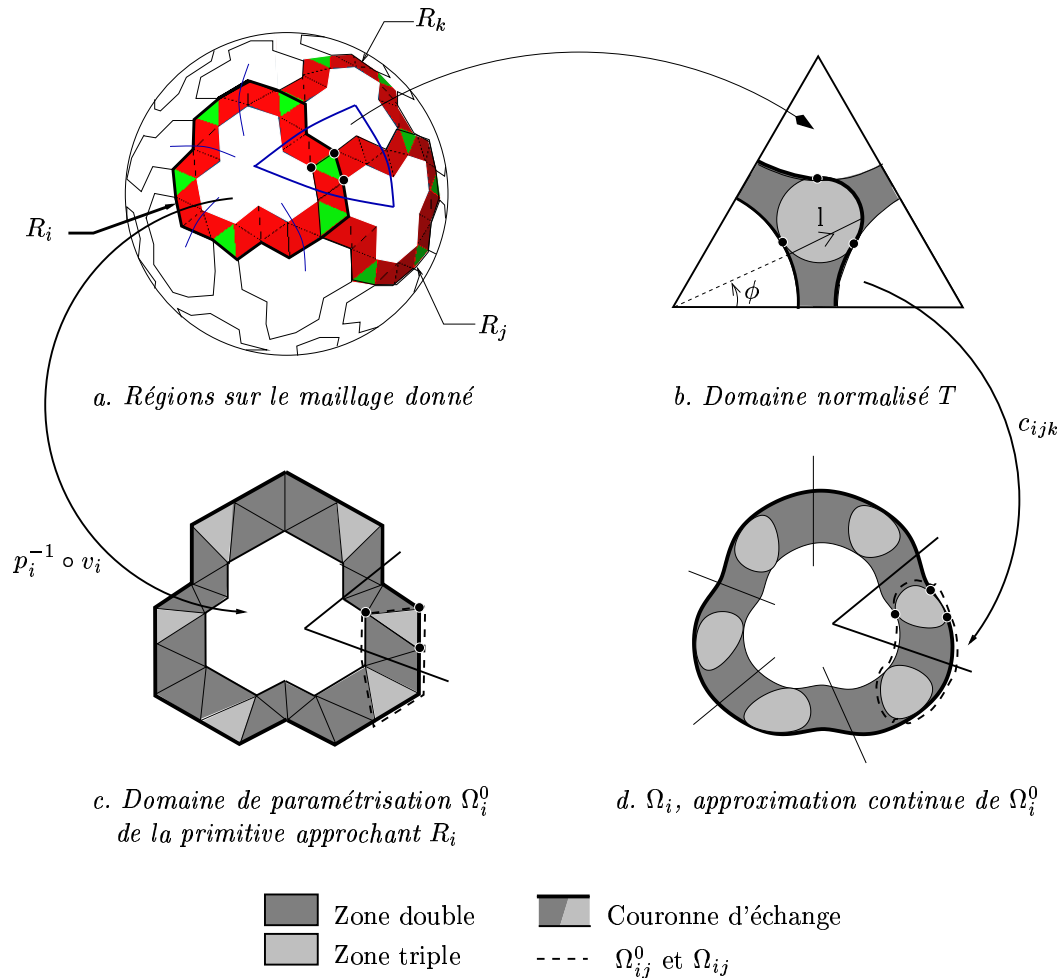


FIG. 5.20 – Découpage des zones d'échanges pour les paramétrer par des  $C^1$ -difféomorphismes

**Définition de  $T$**  Nous avons présenté dans ce chapitre la paramétrisation d'une couronne sur un anneau circulaire. La première idée serait alors de définir le domaine de définition de  $c_{i,jk}$  comme un tronçon d'anneau circulaire.  $T$  serait alors un triangle équilatéral de côté de longueur 1, dont chaque sommet serait associé à l'une des trois régions  $R_i$ ,  $R_j$  ou  $R_k$ . Chaque sommet serait alors le centre d'un anneau circulaire dont l'intersection avec le triangle équilatéral serait le domaine de définition de  $c_{i,jk}$ . L'intersection des trois tronçons d'anneau circulaire serait alors le lieu commun de définition des paramétrisations de  $\Omega_{i,jk}$ ,  $\Omega_{j,ik}$  et  $\Omega_{k,ij}$ . Malheureusement, cela est incohérent car toute zone triple est incidente à la frontière de la zone pure (donc à la frontière intérieure de la couronne), et une telle configuration crée des zones dans les tronçons d'anneau circulaire non atteintes par les autres tronçons (figure 5.21).

Nous choisissons donc de modifier légèrement cette définition de  $T$ . Chaque sommet du



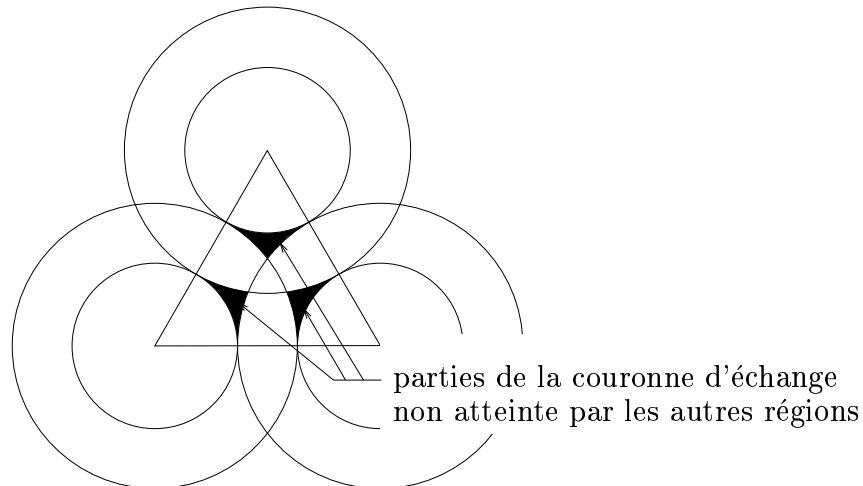


FIG. 5.21 – Les domaines de paramétrisation des couronnes d'échange ne peuvent être des tronçons d'anneau circulaire

triangle est le centre d'une base polaire où le tronçon associé est défini par deux frontières d'équations

$$L^{\text{int}}(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$L^{\text{ext}}(\phi) = \begin{cases} \cos(\phi) - \sqrt{\cos^2(\phi) - \frac{13}{16}} & \text{si } \phi \in [0, \phi^1] \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) + \sqrt{\frac{1}{3} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) - \frac{5}{16}} & \text{si } \phi \in [\phi^1, \phi^2] \\ \cos\left(\frac{\pi}{3} - \phi\right) - \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - \phi\right) - \frac{13}{16}} & \text{si } \phi \in [\phi^2, \frac{\pi}{3}] \end{cases}$$

où  $\phi^1$  et  $\phi^2$  sont des valeurs fixées égales à  $\phi^1 = \arctan \frac{\sqrt{3}}{5}$  et  $\phi^2 = \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Le lieu commun de définition des paramétrisations de  $\Omega_{i,jk}$ ,  $\Omega_{j,ik}$  et  $\Omega_{k,ij}$  est alors un disque dont le barycentre du triangle équilatéral est le centre, et de rayon  $\frac{\sqrt{3}}{12}$  (figure 5.20).

**Illustrations** Nous illustrons ces définitions par les images réciproques sur les domaines  $\Omega_i$  des zones doubles et triples ainsi définies sur  $T$ . Nous attirons votre attention sur le fait que les niveaux de gris apparaissant dans les deux illustrations suivantes sont inversés par rapport à ceux qui sont apparus dans les figures présentées jusqu'alors.

Les cas présentés sont issus des régions initiales de l'algorithme de définition de recouvrement, dont la couronne d'échange a été approchée par une couronne continue établie avec un paramètre  $b_n$  défini comme une spline permettant de déduire la frontière extérieure de la frontière intérieure. Pour la deuxième figure,  $b_n$  est défini comme un polynôme de degré trois permettant de déduire la frontière intérieure de la frontière extérieure, puis  $b_n$  est défini comme une spline permettant de déduire la frontière extérieure de la frontière

intérieure, et enfin  $b_n$  est défini comme un polynôme de degré trois permettant de déduire la frontière intérieure de la frontière extérieure.

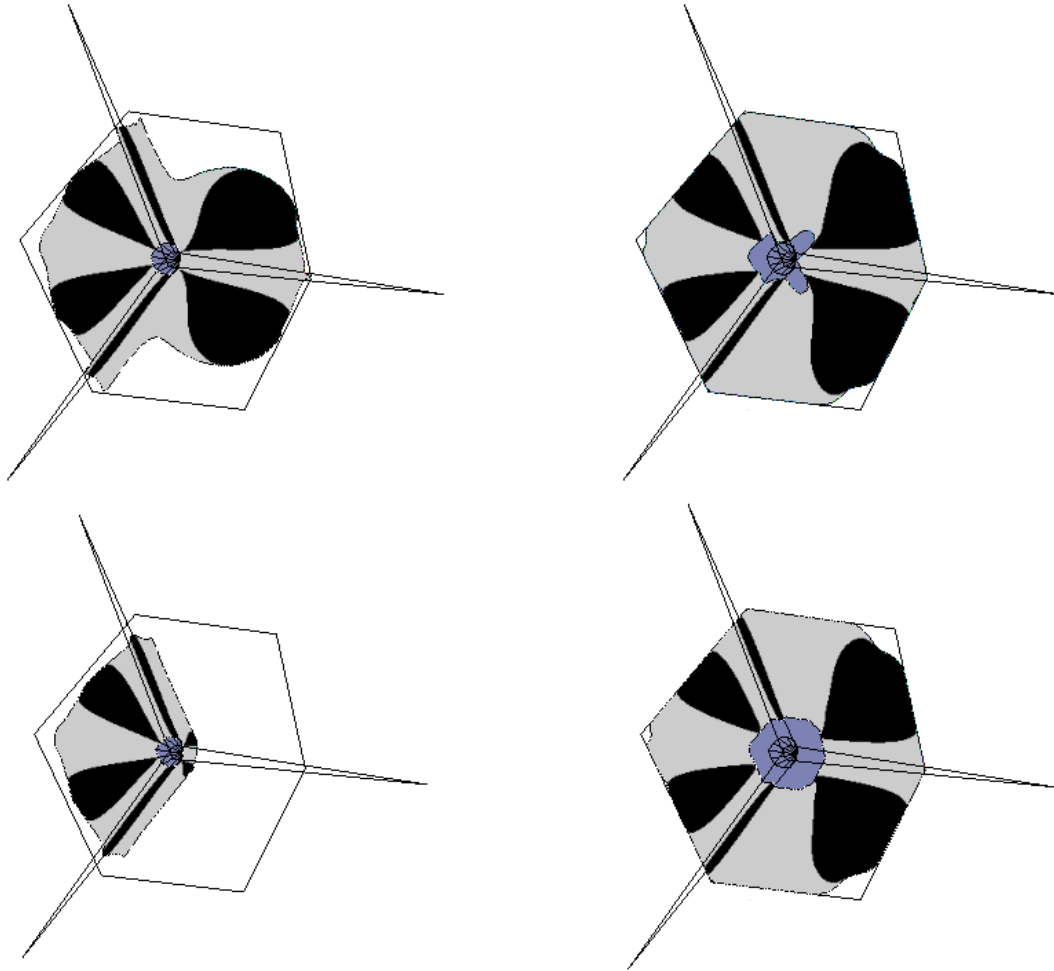


FIG. 5.22 – Images réciproques sur les domaines  $\Omega_i$  des zones doubles et triples définies sur  $T$

Enfin, la figure 5.5.1.2 ne fait apparaître que les parties  $\Omega_{ij}$  et  $\Omega_{ji}$  de deux domaines mis en correspondance par un  $C^1$ -difféomorphisme  $\varphi_{ij}$ .

### 5.5.1.3 Une bonne mise en correspondance

Pour réaliser une bonne correspondance entre les images par  $p_i$  des points de  $\Omega_{ij}$  et les images par  $p_j$  des points de  $\Omega_{ji}$  nous proposons de définir sur les zones d'échange définies sur  $\mathcal{M}$  des points caractéristiques.

Nous les choisissons sur la frontière de la zone pure de chaque région. Ce sont d'une part les points appartenant à l'un des segments définis dans le paragraphe précédent pour

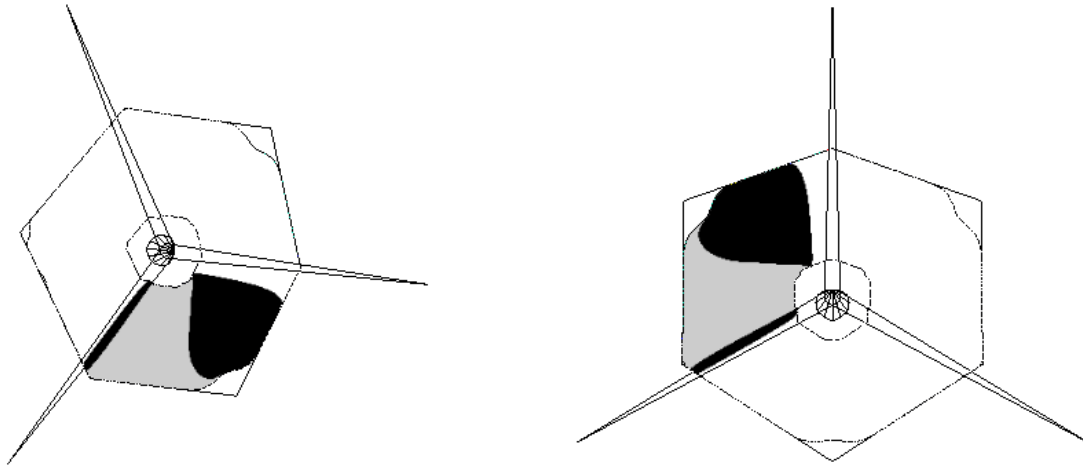


FIG. 5.23 – Parties  $\Omega_{ij}$  et  $\Omega_{ji}$  de deux domaines mis en correspondance par une fonction de transition

couper les zones doubles en deux. D'autre part chaque zone triple de la couronne d'échange intersecte la frontière de la zone pure en une partie connexe. Nous choisissons un point par zone triple.

REMARQUE —

En pratique les zones triples sont réduites à une face triangulaire de  $\mathcal{M}$  dont chaque sommet appartient à la frontière de la zone pure d'une région différente.

Ces points se retrouvent sur les différents domaines  $\Omega_i^0$ . Sur  $T$ , ils correspondent aux points marqués d'une petite boule noire sur la figure 5.20.

Nous définissons alors les fonctions  $c_{i,jk}$  de telle sorte qu'elles interpolent ces points. Pour cela il suffit d'une part d'imposer à la définition de  $\vartheta_n(\tau, \phi)$  de nouvelles conditions d'interpolation et d'autre part de choisir des valeurs de la variable  $\phi$  pour les points correspondant aux bornes d'une portion repérée par une base polaire locale.

REMARQUE —

Le découpage de la couronne d'échange en portions repérées par une base polaire locale et celui en tronçons paramétrés sur un domaine  $T$  sont *a priori* sans aucun rapport (l'un n'est pas le sur-échantillonnage de l'autre par exemple) (figure 5.24).

Les conditions de position sont imposées par les données elles-mêmes et les données de tangence sont définies de la même manière que celles exposées précédemment dans ce chapitre. Les valeurs de  $\phi$  aux bornes de chaque portion sont quant à elles déterminées par une heuristique cherchant à minimiser les distorsions ainsi qu'à minimiser le degré des morceaux de polynômes composant  $\vartheta_n$ .

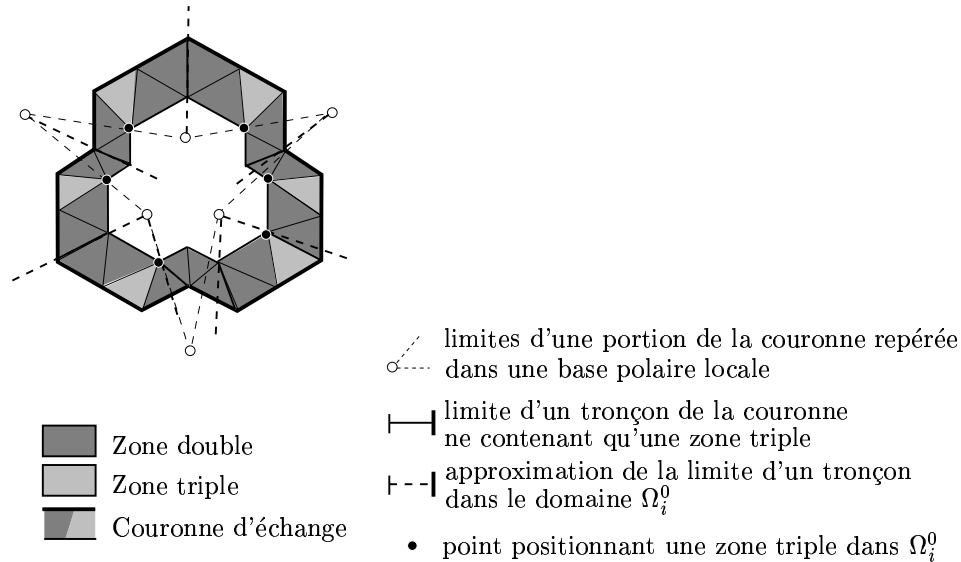


FIG. 5.24 – Découpage d’une couronne d’échange en portions repérées chacun par une base polaire locale et en tronçons ne contenant chacun qu’une seule zone triple

#### 5.5.1.4 En pratique

- Le calcul de l’image d’un point  $(x, y)$  de  $\Omega_i$  dans  $\Omega_j$  se fait alors comme suit :
- recherche de la base locale repérant  $(x, y)$ ,
  - recherche de l’intervalle  $[\vartheta_1; \vartheta_2]$  qui, dans cette portion, contient le point,
  - calcul de l’angle  $\phi$  par l’inverse du polynôme de degré deux associé, et du rapport  $t$  (donc  $\tau$ ),
  - calcul des coordonnées cartésiennes de l’image du point ainsi calculé dans  $T$ ,
  - calcul des coordonnées polaires dans  $T$  mais dans la base associée à  $\Omega_j$ ,
  - recherche de l’intervalle  $[\phi_1; \phi_2]$  qui contient ce point,
  - calcul de l’angle  $\vartheta$  par le polynôme de degré deux associé et du rapport  $\tau$  (donc  $t$ ),
  - calcul des coordonnées cartésiennes de l’image du point ainsi calculé dans le repère local de  $\Omega_j$  associé.

## 5.5.2 Partition de l’unité

### 5.5.2.1 Construction

Il est nécessaire de définir une partition de l’unité subordonnée aux domaines  $\Omega_i$  afin de définir le raccord continu des primitives exposé dans le chapitre suivant.

L’expression “subordonnée aux domaines  $\Omega_i$ ” est un abus de langage au regard de la définition d’une partition de l’unité que nous avons donnée au chapitre ???. Nous cherchons en fait à définir sur chaque domaine  $\Omega_i$  une fonction  $\alpha_i$  telle que :

- $\forall i, \forall m \in \Omega_i, 0 \leq \alpha_i(m) \leq 1$
- $\forall i, \forall m \in \Omega_i, \sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \alpha_j(\varphi_{ij}(m)) = 1$
- $\alpha_i(m) = 1$  si  $m$  appartient à la zone pure de  $\Omega_i$
- $\alpha_i(m) = 0$  si  $m$  n'appartient pas à  $\Omega_i$
- $\alpha_i$  est de classe  $C^1$

Pour cela nous proposons de définir dans un premier temps une fonction  $\beta_i$  sur chaque domaine  $\Omega_i$  indépendamment des autres domaines. Chaque fonction doit satisfaire :

- $\forall i, \forall m \in \Omega_i, 0 \leq \beta_i(m) \leq 1$
- $\forall i, \forall m \in \Omega_i, \sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \beta_j(\varphi_{ij}(m)) \neq 0$
- $\beta_i(m) = 1$  si  $m$  appartient à la zone pure de  $\Omega_i$
- $\beta_i(m) = 0$  si  $m$  n'appartient pas à  $\Omega_i$

La description de la couronne d'échange par une coordonnée radiale et une coordonnée orthoradiale nous permet de définir de telles fonctions simplement par :

- si  $m$  appartient à la zone pure,  $\beta_i(m) = 1$ ,
- si  $m$  appartient à la portion de la zone d'échange de  $\Omega_i$  repérée dans la base polaire locale de centre  $C_n$ , alors  $\beta_i(m) = \beta(t)$  où  $t$  est le rapport présenté dans la section 5.3.3 situant le point  $m$  radialement dans la couronne, et  $\beta(t)$  est le polynôme de degré trois interpolant les conditions d'Hermite suivantes :  $\beta(0) = 1$  et  $\beta(1) = \beta'(0) = \beta'(1) = 0$ ,
- sinon,  $\beta_i(m) = 0$ .

On définit alors les fonctions  $\alpha_i$  comme des fonctions rationnelles issues de la normalisation des fonctions  $\beta_j$  :

$$\alpha_i(m) = \frac{\beta_i(m)}{\sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \beta_j(\varphi_{ij}(m))}$$

### 5.5.2.2 En pratique

En pratique, une telle définition des fonctions  $\beta_i$  nécessite de pouvoir évaluer si un point du plan appartient à la zone pure de  $\Omega_i$ . Pour cela, nous remarquons que les pivots ont été définis de telle sorte que la ligne brisée qui les relie dans l'ordre du parcours trigonométrique de la couronne soit sans auto-intersection (section 5.2.2). Les tests se déroulent alors comme suit :

On détermine si le point  $m$  appartient au polygone délimité par cette ligne brisée.

Si oui, on parcourt des pivots extérieurs jusqu'à ce que les deux conditions suivantes soient satisfaites :  $m$  doit être repéré, en angle, dans la base locale, et sa coordonnée radiale doit être inférieure à celle du point de la frontière intérieure repéré par le même angle.

Si l'on trouve une telle configuration,  $m$  n'appartient pas à la zone pure. Sinon,  $m$  appartient à la zone pure.

Si le point  $m$  n'appartient pas au polygone délimité par cette ligne brisée, on parcourt des pivots intérieurs jusqu'à ce que les deux conditions suivantes soient satisfaites :  $m$  doit être repéré, en angle, dans la base locale, et sa coordonnée radiale doit être inférieure à celle du point de la frontière intérieure repéré par le même angle.

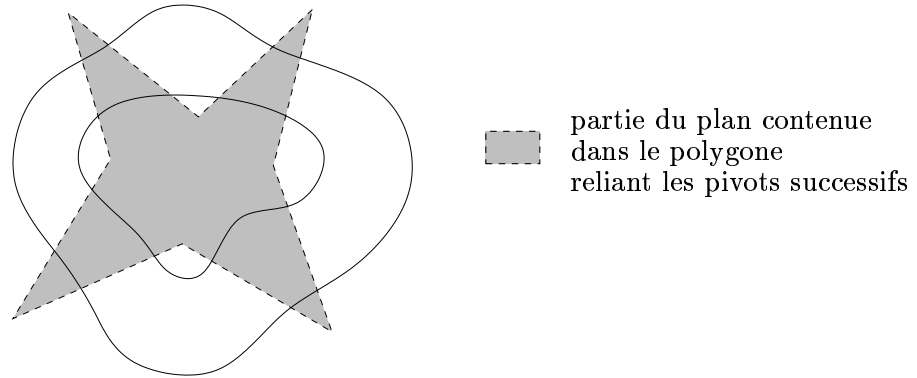


FIG. 5.25 – Illustration pour l’algorithme qui permet de déterminer si un point est contenu dans la partie centrale de la couronne

Si l’on trouve une telle configuration,  $m$  appartient à la zone pure. Sinon,  $m$  n’appartient pas à la zone pure.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la paramétrisation d’une couronne du plan par un  $C^1$ -difféomorphisme. Nous avons finalement proposé une méthode pour construire une telle couronne continue approchant une couronne polygonale du plan. Cela nous permet de réaliser la deuxième étape de la construction de notre modèle de surface : la définition de domaines de  $\mathbb{R}^2$  liés par des fonctions de transition qui sont des  $C^1$ -difféomorphismes. Cela nous permet également de définir aisément une partition de l’unité subordonnée à ces domaines. Ceci nous sera utile pour la troisième étape de la construction du modèle que nous étudions dans le chapitre suivant : le raccord continu de surfaces.

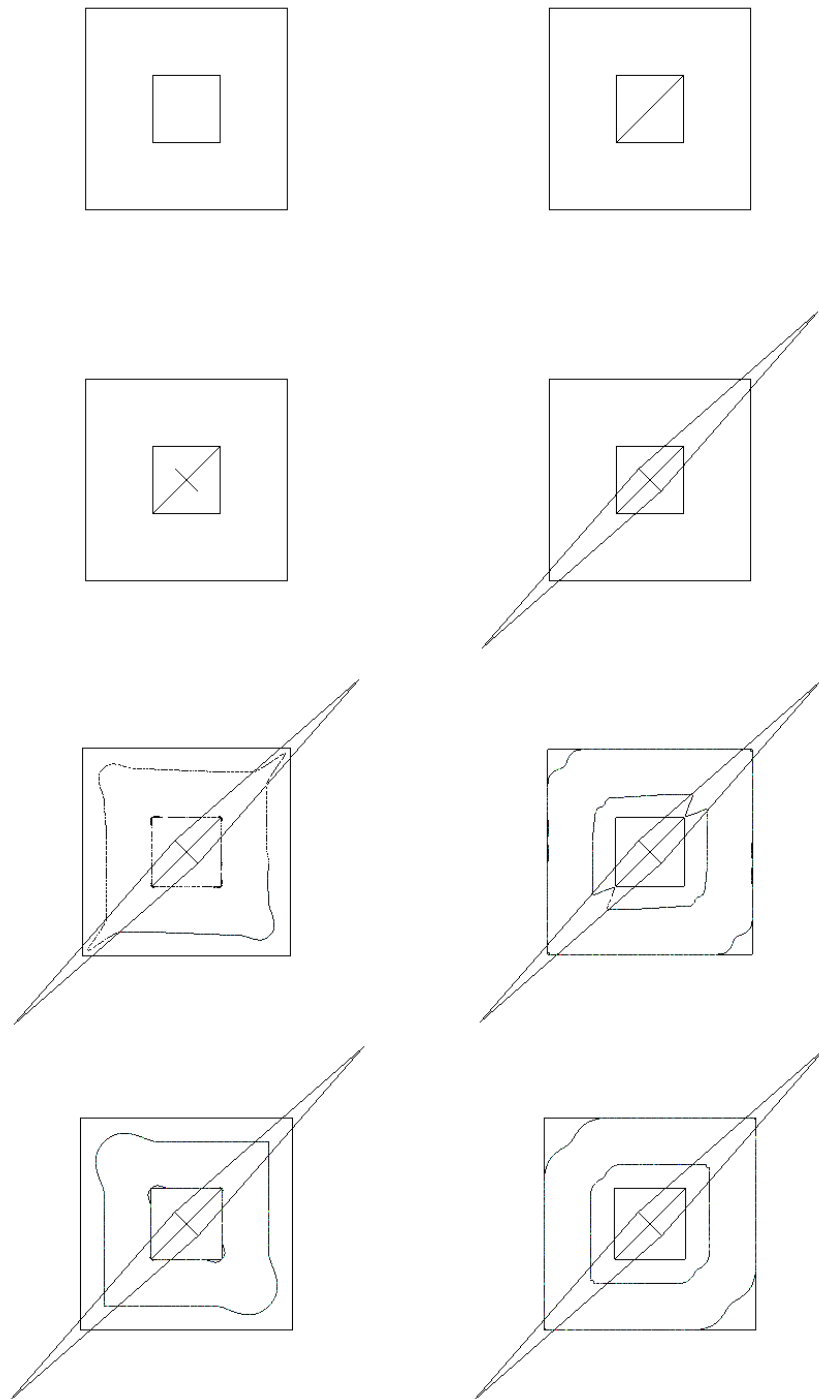


FIG. 5.26 – Approximation d'une couronne simple conduisant à une situation symétrique

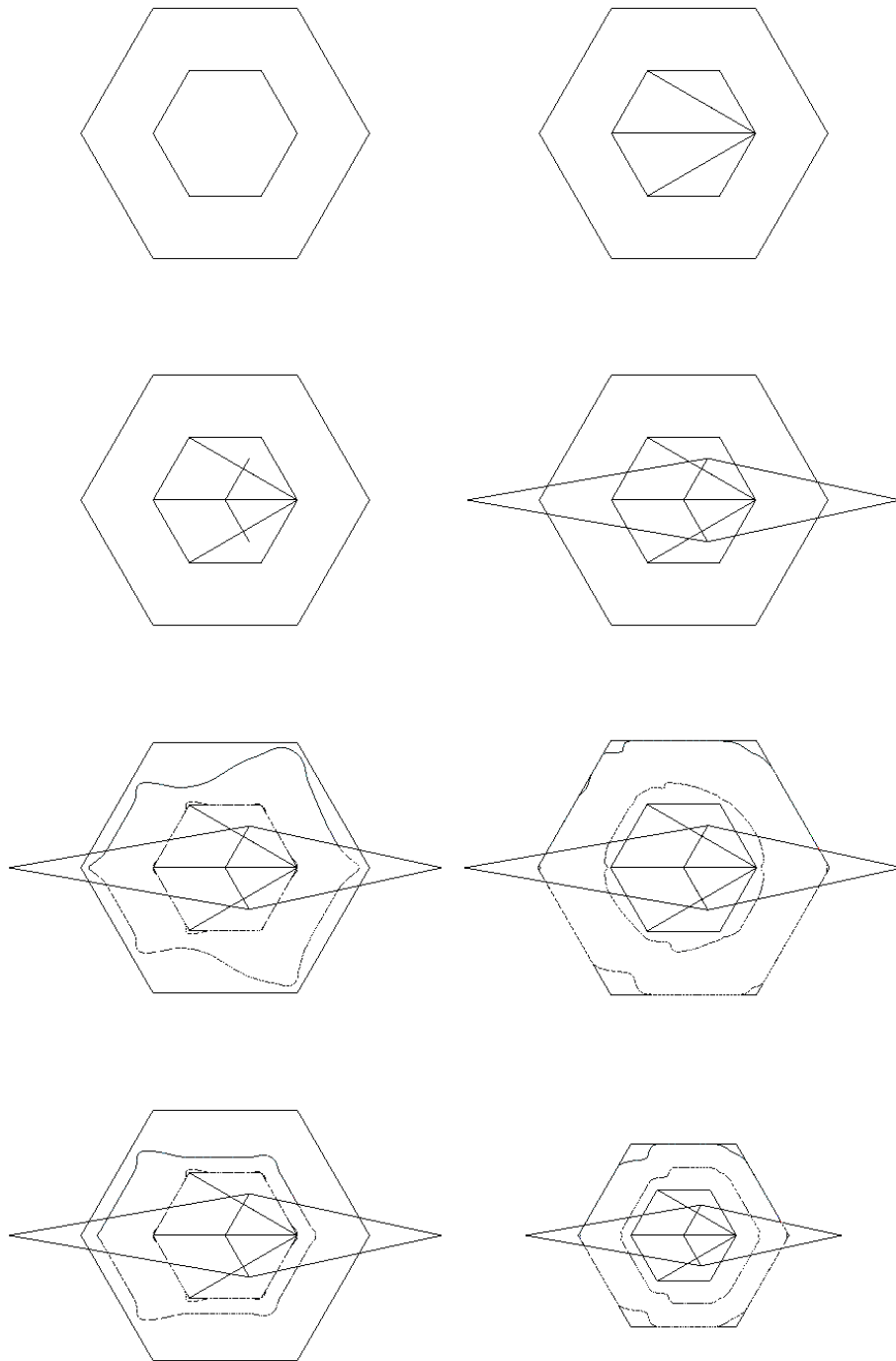


FIG. 5.27 – Approximation d'une couronne simple conduisant à une situation dissymétrique



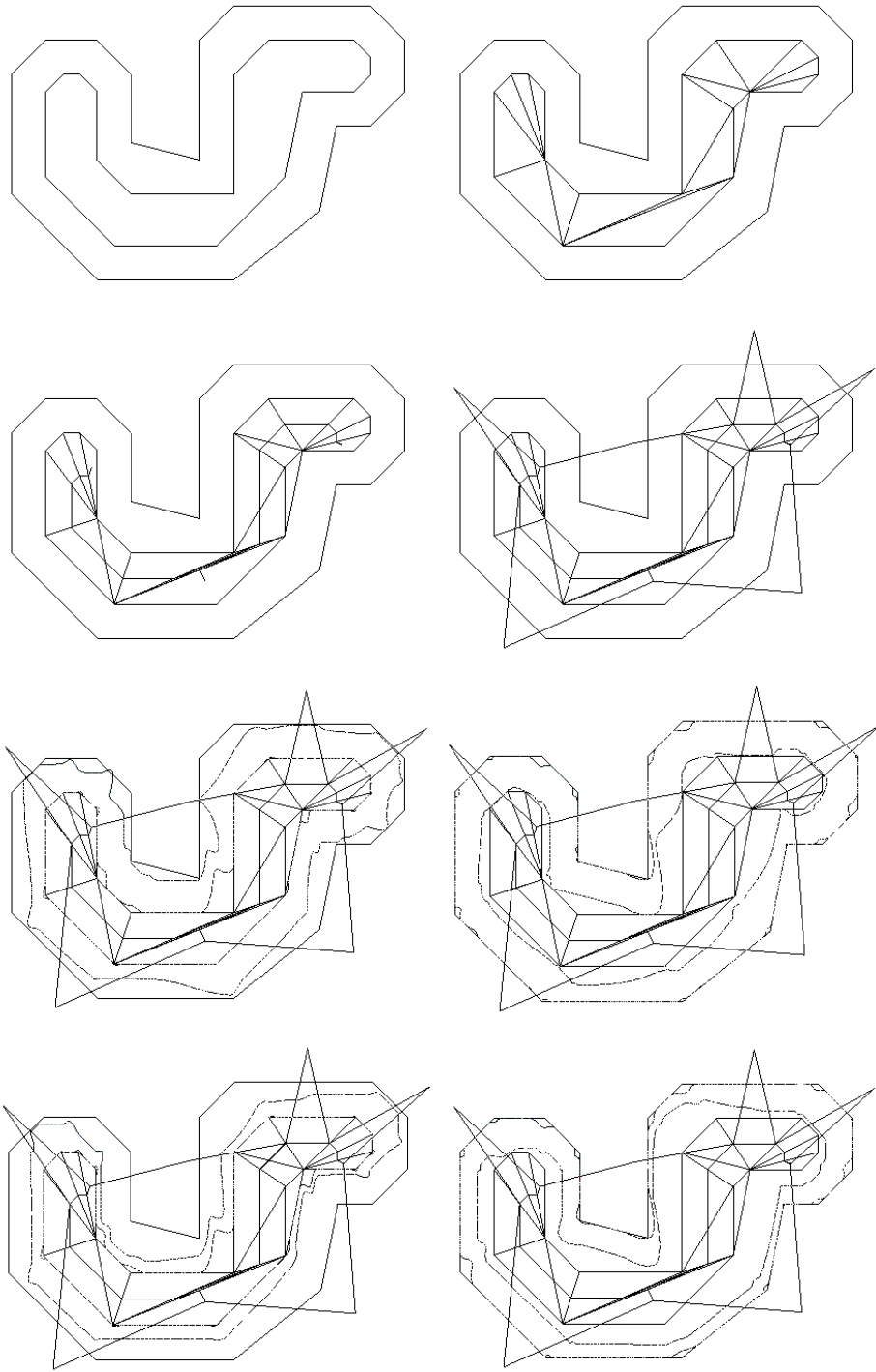


FIG. 5.28 – Approximation d'une couronne non étoilée



# Annexe C

## Démonstrations pour la continuité de la paramétrisation d'une couronne

### C.1 Conditions pour que la paramétrisation soit de classe $C^1$

Nous établissons dans cette section les conditions suffisantes pour avoir la paramétrisation d'une couronne de classe  $C^1$  à la limite entre deux portions décrites dans des bases polaires locales voisines de pivots  $C_n$ , appartenant à la partie centrale, et  $C_{n+1}$ , appartenant à la partie extérieure.

A cette limite, nous avons les égalités suivantes, où l'on introduit quelques notations pour alléger les écritures (figure 5.10, page 103).

$$\begin{aligned} \vartheta_{n+1} = -\vartheta_n &:= \vartheta & ; & & o_{n+1} = o_n &:= o \\ \vec{u}(\theta(\vartheta_n)) &= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_n) \\ \sin(\vartheta_n) \end{pmatrix} := \vec{u} & ; & & \frac{d\vec{u}}{d\vartheta_n}(\theta(\vartheta_n)) &= \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta_n) \\ \cos(\vartheta_n) \end{pmatrix} := \vec{u}^\perp \\ \vec{u}(\theta(\vartheta_{n+1})) &= \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta_{n+1}) \\ \sin(\vartheta_{n+1}) \end{pmatrix} = -\vec{u} & ; & & \frac{d\vec{u}}{d\vartheta_{n+1}}(\theta(\vartheta_{n+1})) &= \begin{pmatrix} \sin(\vartheta_{n+1}) \\ \cos(\vartheta_{n+1}) \end{pmatrix} = \vec{u}^\perp \end{aligned}$$

On suppose  $L_e$  et  $L_i$  de classe  $C^1$  lorsque l'on passe du domaine de paramétrisation d'un morceau de la couronne au suivant. Par conséquent à cette limite,  $t_n = t_{n+1} := t$  et  $\frac{\partial t_n}{\partial l} = \frac{\partial t_{n+1}}{\partial l} := \frac{\partial t}{\partial l}$  et  $\frac{\partial t_n}{\partial \phi} = \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \phi} := \frac{\partial t}{\partial \phi}$ .

**Continuité  $C^0$**  Démontrons que la paramétrisation est continue par construction. Nous notons  $D = \|C_n C_{n+1}\|$ . Parce que la frontière intérieure est continue et en particulier est

une droite au voisinage de cette limite,

$$\begin{aligned}
C_n + \frac{d_n}{\cos(\vartheta - o)} \vec{u} &= C_{n+1} - \frac{d_{n+1}}{\cos(\vartheta - o)} \vec{u} \\
&\Leftrightarrow \\
D &= \frac{d_n + d_{n+1}}{\cos(\vartheta - o)} \tag{C.1}
\end{aligned}$$

Pour que la paramétrisation soit continue il suffit d'avoir,

$$\begin{aligned}
C_n + [(1-t) + tb_n(\vartheta_n)] \rho_n(\vartheta_n) \vec{u} &= C_{n+1} - [(1-t) + tb_{n+1}(\vartheta_{n+1})] \rho_{n+1}(\vartheta_{n+1}) \vec{u} \\
&\stackrel{(C.1)}{\Leftrightarrow} \\
D &= [(1-t) + tb_{n+1}(\vartheta_{n+1})] \frac{d_{n+1}}{\cos(\vartheta - o)} + \\
&\quad [(1-t) + tb_n(\vartheta_n)] \frac{d_n}{\cos(\vartheta - o)} \\
&\stackrel{(C.1)}{\Leftrightarrow} \\
d_n + d_{n+1} &= [(1-t) + tb_{n+1}(\vartheta_{n+1})] d_{n+1} + \\
&\quad [(1-t) + tb_n(\vartheta_n)] d_n \\
&\Leftrightarrow \\
0 &= -t [(1 - b_{n+1}(\vartheta_{n+1})) d_{n+1} + (1 - b_n(\vartheta_n)) d_n]
\end{aligned}$$

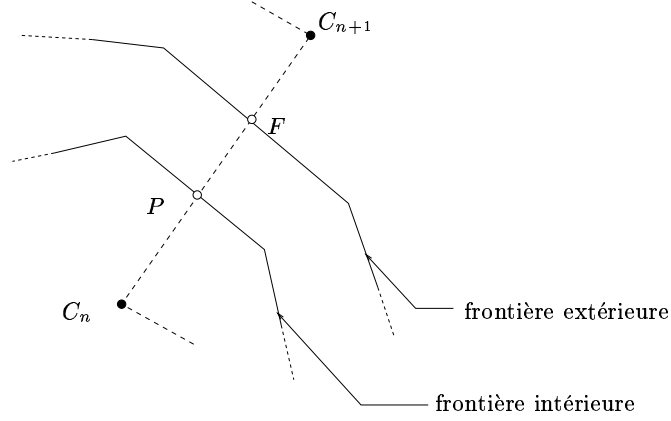
Et cette égalité devant être vraie pour tout  $l$  et donc pour tout  $t \in [0; 1]$ , pour que la paramétrisation soit continue il suffit d'avoir

$$(1 - b_{n+1}(\vartheta_{n+1})) d_{n+1} = -(1 - b_n(\vartheta_n)) d_n \tag{C.2}$$

ce qui est vérifié par construction car  $D = \|C_n P\| + \|C_{n+1} P\| = \|C_n F\| + \|C_{n+1} F\|$  où  $P$  est le point de la frontière intérieure dans le même axe que  $M$  vis-à-vis de  $C_n$  et  $F$  celui de la frontière extérieure (voir figure C.1).

**Continuité  $C^1$**  Pour que la paramétrisation soit  $C^1$ , il suffit que ses dérivées partielles soient continues. Commençons par la dérivée par rapport à  $\phi$ . Il faut

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left[ (b_n(\vartheta_n) - 1) \frac{\partial t}{\partial \phi} + t \frac{db_n}{d\vartheta_n}(\vartheta_n) \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} \right] \rho_n(\vartheta_n) + \right. \\
&[(1-t) + tb_n(\vartheta_n)] \frac{d\rho_n}{d\vartheta_n}(\vartheta_n) \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} \left. \right\} \vec{u} + [(1-t) + tb_n(\vartheta_n)] \rho_n(\vartheta_n) \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} \vec{u}^\perp \\
&= \\
&- \left\{ \left[ (b_{n+1}(\vartheta_{n+1}) - 1) \frac{\partial t}{\partial \phi} + t \frac{db_{n+1}}{d\vartheta_{n+1}}(\vartheta_{n+1}) \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v} \right] \rho_{n+1}(\vartheta_{n+1}) + \right. \\
&[(1-t) + tb_{n+1}(\vartheta_{n+1})] \frac{d\rho_{n+1}}{d\vartheta_{n+1}}(\vartheta_{n+1}) \left. \right\} \vec{u} + [(1-t) + tb_{n+1}(\vartheta_{n+1})] \rho_{n+1}(\vartheta_{n+1}) \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v} \vec{u}^\perp
\end{aligned}$$

FIG. C.1 – Notations pour la continuité  $C^0$ 

Aussi,  $\vec{u}$  et  $\vec{u}^\perp$  constituant une base, il faut et il suffit d'identifier des composantes. Les deux composantes en  $\vec{u}^\perp$  identifiées donnent

$$\begin{aligned} [(1-t) + tb_n(\vartheta_n)] \frac{d_n}{\cos(\vartheta - o)} \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} &= [(1-t) + tb_{n+1}(\vartheta_{n+1})] \frac{d_{n+1}}{\cos(\vartheta - o)} \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v} \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v}(u, \phi_n) &= \frac{\|C_n M(u)\|}{\|C_{n+1} M(u)\|} \frac{\partial \Theta_n}{\partial v}(u, \phi_n) \end{aligned}$$

qui est la condition (5.10), page 114. Les deux composantes en  $\vec{u}$  identifiées donnent, d'après l'équation (5.8) page 111,

$$\begin{aligned} &\left[ (b_n(\vartheta_n) - 1) \frac{\partial t}{\partial \phi} + t \frac{db_n}{d\vartheta_n}(\vartheta_n) \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} \right] d_n + \\ &\left[ (b_{n+1}(\vartheta_{n+1}) - 1) \frac{\partial t}{\partial \phi} + t \frac{db_{n+1}}{d\vartheta_{n+1}}(\vartheta_{n+1}) \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v} \right] d_{n+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ &[(b_n(\vartheta_n) - 1)d_n + (b_{n+1}(\vartheta_{n+1}) - 1)d_{n+1}] \frac{\partial t}{\partial \phi} + \\ &t \left[ \frac{db_n}{d\vartheta_n}(\vartheta_n) \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} d_n + \frac{db_{n+1}}{d\vartheta_{n+1}}(\vartheta_{n+1}) \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v} d_{n+1} \right] = 0 \\ &\stackrel{(C.2)}{\Leftrightarrow} \\ &t = 0 \\ &\text{ou} \\ &\frac{db_n}{d\vartheta_n}(\vartheta_n) \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} d_n + \frac{db_{n+1}}{d\vartheta_{n+1}}(\vartheta_{n+1}) \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v} d_{n+1} = 0 \\ &\stackrel{(5.10)}{\Leftrightarrow} \\ &t = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ou} \\ \frac{db_n}{d\vartheta_n}(\vartheta_n)d_n &= -\frac{\|C_n M(u)\|}{\|C_{n+1} M(u)\|} \frac{db_{n+1}}{d\vartheta_{n+1}}(\vartheta_{n+1})d_{n+1} \end{aligned}$$

ce qui doit être vrai pour tout  $l$  et donc pour tout  $t$  et tout  $u$ . Il est donc nécessaire d'avoir

$$\frac{\partial b_{n+1}}{\partial \vartheta_{n+1}}(\phi = \phi_n) = \frac{\partial b_n}{\partial \vartheta_n}(\phi = \phi_n) = 0$$

qui est la condition (5.11), page 114.

Passons maintenant à la dérivée par rapport à  $l$ . Il faut

$$\begin{aligned} \left[ (b_n(\vartheta_n) - 1) \frac{\partial t}{\partial l} \rho_n \right] \vec{u} &= \left[ (b_{n+1}(\vartheta_{n+1}) - 1) \frac{\partial t}{\partial l} \rho_{n+1} \right] \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \\ (b_n(\vartheta_n) - 1)d_n &= (b_{n+1}(\vartheta_{n+1}) - 1)d_{n+1} \end{aligned}$$

ce qui est déjà assuré par la condition (C.2).

## C.2 Interpolation de conditions d'Hermite par un $C^1$ -difféomorphisme

Nous considérons les conditions d'Hermite suivantes :  $(\phi_1, \vartheta_1, \vartheta'_1)$  et  $(\phi_2, \vartheta_2, \vartheta'_2)$  avec  $\phi_1 < \phi_2$  et  $\vartheta_1 < \vartheta_2$ .

Pour les interpoler par un  $C^1$ -difféomorphisme de réciproque explicite, nous choisissons de définir deux polynômes de degré deux notés  $p_1$  et  $p_2$ , qui se raccordent avec une continuité  $C^1$  au milieu de l'intervalle  $[\phi_1; \phi_2]$  en les conditions d'Hermite  $(x, \varepsilon, \varepsilon')$ . Il suffit alors d'exhiber des conditions suffisantes pour que  $p_1$  et  $p_2$  soient strictement croissantes.

$$\begin{aligned} p_1(\phi_1) &= \vartheta_1 & p'_1(\phi_1) &= \vartheta'_1 \\ p_2(\phi_2) &= \vartheta_2 & p'_2(\phi_2) &= \vartheta'_2 \\ p_1(x) &= p_2(x) = \varepsilon & p'_1(x) &= p'_2(x) = \varepsilon' \end{aligned}$$

Notons

$$\begin{aligned} p_1(\phi) &= a_1 \phi^2 + b_1 \phi + c_1 \\ p_2(\phi) &= a_2 \phi^2 + b_2 \phi + c_2 \end{aligned}$$

Pour que  $p_1$  et  $p_2$  soient strictement croissantes, il suffit d'avoir

$$\vartheta'_1 > 0; \vartheta'_2 > 0; a_1 \geq 0; a_2 \leq 0$$

En effet,

$$\begin{cases} \vartheta'_1 > 0 \text{ et } a_1 \geq 0 & \Rightarrow \forall \phi > \phi_1, p'_1(\phi) > 0 \\ \vartheta'_2 > 0 \text{ et } a_2 \leq 0 & \Rightarrow \forall \phi > \phi_2, p'_2(\phi) > 0 \end{cases}$$

De plus, les conditions d'interpolation se traduisent par

$$\begin{aligned} c_1 &= \vartheta_1 - b_1\phi_1 - a_1\phi_1^2 & c_2 &= \vartheta_2 - b_2\phi_2 - a_2 \\ b_1 &= \vartheta'_1 - 2a_1\phi_1 & b_2 &= \vartheta'_2 - 2a_2\phi_2 \\ a_1 &= \frac{(\varepsilon - \vartheta_1) - \vartheta'_1(x - \phi_1)}{(x - \phi_1)^2} & a_2 &= -\frac{(\vartheta_2 - \varepsilon) - \vartheta'_2(\phi_2 - x)}{(\phi_2 - x)^2} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

et

$$\frac{\varepsilon - \vartheta_1}{x - \phi_1} - \frac{\vartheta_2 - \varepsilon}{\phi_2 - x} = \frac{\vartheta'_1 - \vartheta'_2}{2} \quad (\text{C.4})$$

Il nous faut donc déterminer  $x$ ,  $\varepsilon$ ,  $\vartheta'_1$  et  $\vartheta'_2$  vérifiant C.3 et C.4 (figure 5.11).

Nous choisissons arbitrairement  $x = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$ , alors

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\vartheta'_2 + 3\vartheta'_1}{2(\phi_2 - \phi_1)} + 2\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{(\phi_2 - \phi_1)^2} \\ a_2 &= \frac{\vartheta'_1 + 3\vartheta'_2}{2(\phi_2 - \phi_1)} - 2\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{(\phi_2 - \phi_1)^2} \\ a_1 \geq 0 &\Leftrightarrow \vartheta'_2 + 3\vartheta'_1 \leq 4\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\phi_2 - \phi_1} \\ a_2 \leq 0 &\Leftrightarrow \vartheta'_1 + 3\vartheta'_2 \leq 4\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\phi_2 - \phi_1} \end{aligned}$$

En notant pente =  $\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\phi_2 - \phi_1}$ , une condition suffisante est

$$\max(\vartheta'_1, \vartheta'_2) \leq \text{pente}$$

### C.3 Conditions d'interpolation de la fonction $b_n$ pour que $b_n \rho_n^{\text{int}} < \rho_n^{\text{ext}}$

Soit  $\rho_n^{\text{int}}$  et  $\rho_n^{\text{ext}}$  les coordonnées radiales des boucles intérieures et extérieures d'une couronne polygonale. Nous déterminons quelles conditions d'interpolation doit suivre la fonction cubique  $b_n$  pour qu'elle soit de classe  $C^1$  et que  $b_n \rho_n^{\text{int}} < \rho_n^{\text{ext}}$ .

REMARQUE —

Les conditions intérieures à chaque portion dans le cas d'une fonction  $b_n$  cubique par morceaux se déduisent aisément de celles-ci.

Il faut d'abord que la courbe approchant la frontière extérieure soit continue. Cela est le cas dans chaque portion mais doit être imposée lors du passage de la portion décrite dans la base polaire locale de centre  $C_n$  à la portion suivante. Nous supposons que  $C_n$  appartient à la partie centrale.

On note  $b_n^1$  la condition que  $b_n$  doit interpoler en  $\vartheta_{n, I_n}$ , la borne supérieure de son domaine

de définition.

On note  $b_{n+1}^0$  la condition que  $b_{n+1}$  doit interpoler en  $\vartheta_{n+1,0}$ , la borne inférieure de son domaine de définition.

La condition  $b_n^1$  doit vérifier

$$b_n^1 \rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n}) = \rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n}) + \rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0}) - b_{n+1}^0 \rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})$$

d'où

$$b_n^1 = 1 + (1 - b_{n+1}^0) \frac{\rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n})}$$

De même,

$$b_{n+1}^0 = 1 - (1 + b_n^1) \frac{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n})}{\rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})}$$

Pour avoir  $b_n \rho_n^{\text{int}} < \rho_n^{\text{ext}}$ , on minore ou majore  $b_n$  par deux bornes notées  $b_n^{\text{ext}}$  et  $b_n^{\text{cent}}$  selon que  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie extérieure ou centrale.

Si  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie centrale,

$$1 < b_n(\vartheta_n) \leq b_n^{\text{cent}}$$

avec

$$b_n^{\text{cent}} \leq \min \frac{\rho_n^{\text{ext}}}{\rho_n^{\text{int}}}$$

Si  $C_n$  est un pivot extérieur,

$$b_n^{\text{ext}} \leq b_n(\vartheta_n) < 1$$

avec

$$b_n^{\text{ext}} \geq \max \frac{\rho_n^{\text{ext}}}{\rho_n^{\text{int}}}$$

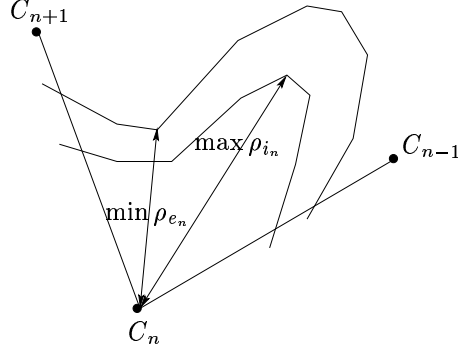
On exprime alors les conditions d'interpolation par

$$b_n^1 = \min(b_n^{\text{cent}}, 1 + (1 - b_{n+1}^{\text{ext}}) \frac{\rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})}{\rho_n^{\text{cent}}(\vartheta_{n,I_n})})$$

et

$$b_{n+1}^0 = \max(b_{n+1}^{\text{ext}}, 1 - (1 + b_n^{\text{cent}}) \frac{\rho_n^{\text{cent}}(\vartheta_{n,I_n})}{\rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})})$$



FIG. C.2 – Cas où  $\min_i \{\rho_n^{\text{ext}}(\vartheta_{n,i})\}$  est inférieur à  $\max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}$ 

On peut vérifier la cohérence de ces deux égalités en montrant que,

$$1 - (1 + b_n^1) \frac{\rho_n^{\text{cent}}(\vartheta_{n,I_n})}{\rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})} = \max(b_{n+1}^{\text{ext}}, 1 - (1 + b_n^{\text{cent}}) \frac{\rho_n^{\text{cent}}(\vartheta_{n,I_n})}{\rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})})$$

Il reste à choisir  $b_n^{\text{cent}}$  et  $b_n^{\text{ext}}$ .

Comme introduit dans la section 5.4.3, page 118, nous notons  $\vartheta_{n,i}$  les points du domaine de  $\rho_n^{\text{ext}}/\rho_n^{\text{int}}$  où ce rapport est susceptible de connaître un extremum local. On ne peut pas prendre  $b_n^{\text{cent}} = \min_i \{\rho_n^{\text{ext}}(\vartheta_{n,i})\} / \max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}$  car il peut être inférieur à 1 (figure C.2).

Nous proposons alors de réfléchir sur l'épaisseur  $e_n(\vartheta_n)$  de la couronne polygonale (voir la section 5.4.3, page 118). Si  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie centrale, il suffit alors

$$\begin{aligned} \rho_n^{\text{ext}} &\leq \rho_n^{\text{int}} + \min e_n \\ b_n &\leq 1 + \frac{\min_i \{e_n(\vartheta_{n,i})\}}{\rho_n^{\text{int}}} \\ &\Leftrightarrow \\ b_n &\leq 1 + \frac{\min_i \{e_n(\vartheta_{n,i})\}}{\max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}} \end{aligned}$$

et si  $C_n$  est un pivot extérieur,

$$b_n \geq 1 - \frac{\min_i \{e_n(\vartheta_{n,i})\}}{\max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}}$$

Nous choisissons alors naturellement si  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie centrale

$$b_n^{\text{cent}} = 1 + \frac{\min_i \{e_n(\vartheta_{n,i})\}}{\max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}}$$

et sinon

$$b_n^{\text{ext}} = 1 - \frac{\min_i \{e_n(\vartheta_{n,i})\}}{\max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}}$$

REMARQUE —

En pratique, l'évaluation de  $\min_i \{e_n(\vartheta_{n,i})\}$  et de  $\max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}$  se fait en même temps que la mise en conformité de la frontière extérieure (voir paragraphe 5.3.2.3).

# Bibliographie

- [Att95] D. Attali. *Squelettes et Graphes de Voronoï 2D et 3D*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 1995.
- [Blu67] H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. In W. Wathen-Dunn, editor, *Models for the perception of Speech and Visual Forum*, pages 362–380, Cambridge, MA, 1967. MIT Press.
- [MW98] D. S. Meek and D. J. Walton. Planar  $g^1$  hermite interpolation with spirals. *Comput. Aided Geom. Design*, 15 :787–801, 1998.
- [SNV00] M. Szilvási-Nagy and T. P. Vendel. Generating curves and swept surfaces by blended circles. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :197–206, 2000.