

# Schémas de Subdivision

Cédric Géro

GIPSA-lab



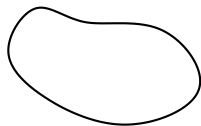
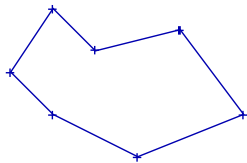
Ecole Jeunes Chercheurs en Informatique Mathématique

*28 mars 2011 à Amiens*

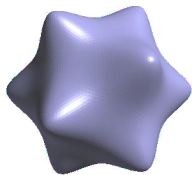
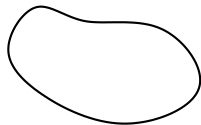
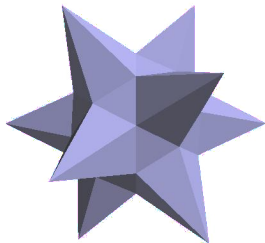
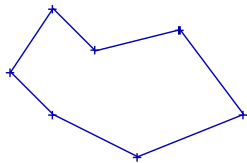
# Plan

- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions

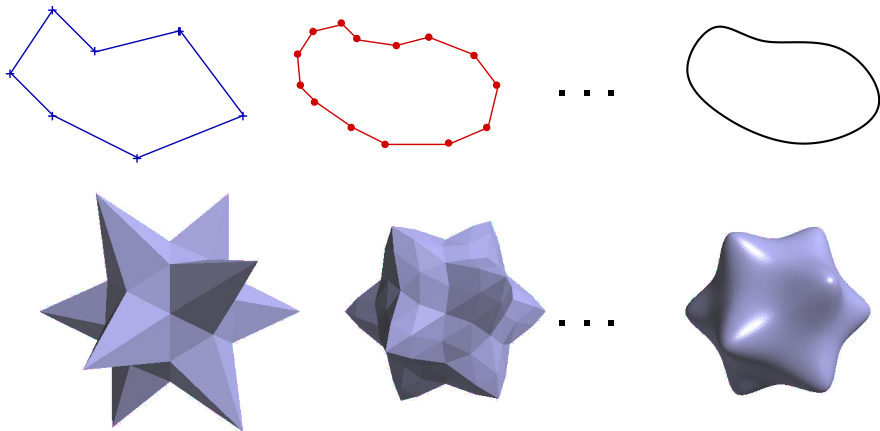
# Un lien algorithmique entre discret et continu



# Un lien algorithmique entre discret et continu



# Un lien algorithmique entre discret et continu



opérateur qui, appliqué itérativement sur un objet discret, définit une suite d'objets discrets qui tend vers un objet continu.

# Plan

- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
  - Exemples historiques
  - B-splines
  - Généralisation I : autre masque
  - Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
  - Box-splines surfaciques
  - Etude au voisinage d'un sommet extraordinaire
  - Exemples de *tuning*
  - Généralisations
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions
  - Synthèse Multirésolution sans détails
  - Prédicteur dans un Schéma *Lifting*

# Plan

- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
  - Exemples historiques
    - B-splines
    - Généralisation I : autre masque
    - Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
  - Box-splines surfaciques
  - Etude au voisinage d'un sommet extraordinaire
  - Exemples de *tuning*
  - Généralisations
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions
  - Synthèse Multirésolution sans détails
  - Prédicteur dans un Schéma *Lifting*

Un lien algorithmique entre discret et continu

Généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconques

Construire de multiples résolutions

Références

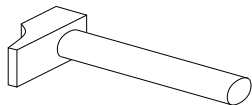
Exemples historiques

B-splines

Généralisation I : autre masque

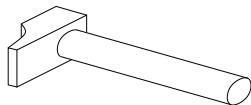
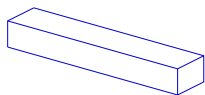
Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme

# Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane [de Rham, 1947]

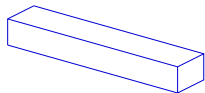




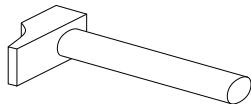
# Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane [de Rham, 1947]



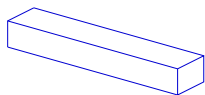
# Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane [de Rham, 1947]



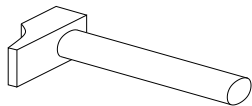
...



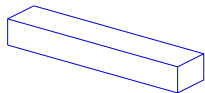
# Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane [de Rham, 1947]



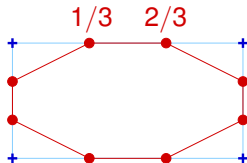
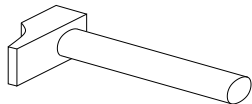
...



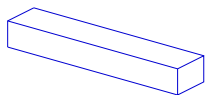
# Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane [de Rham, 1947]



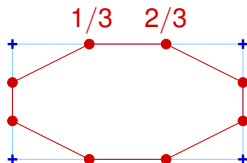
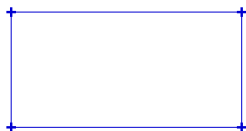
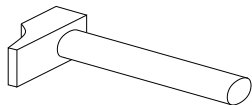
...



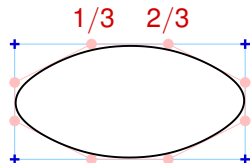
# Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane [de Rham, 1947]



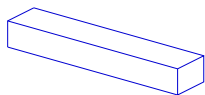
...



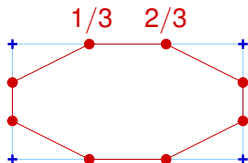
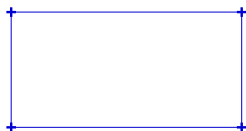
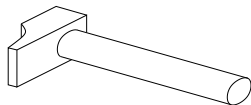
...



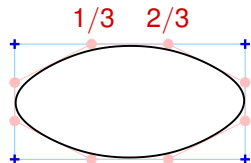
# Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane [de Rham, 1947]



...



...

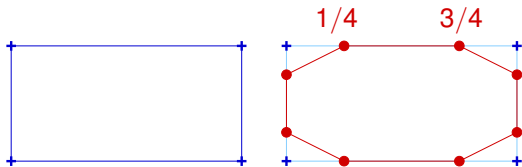


Cette courbe n'est pas analytique

# An algorithm for high-speed curve generation [Chaikin, 1974]



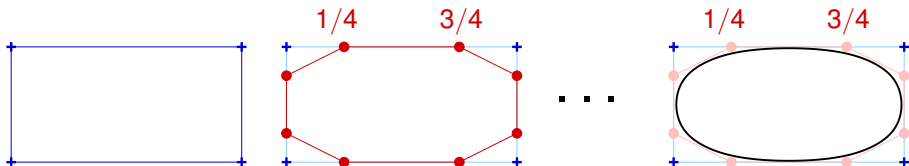
# An algorithm for high-speed curve generation [Chaikin, 1974]





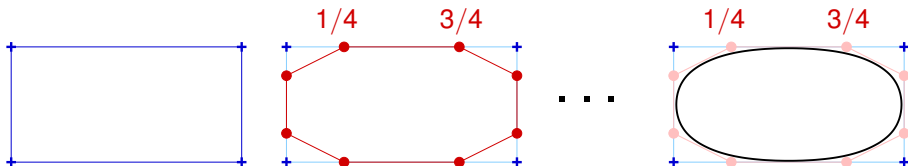
# An algorithm for high-speed curve generation

## [Chaikin, 1974]



# An algorithm for high-speed curve generation

## [Chaikin, 1974]



“Il s’agit d’une B-spline quadratique !”

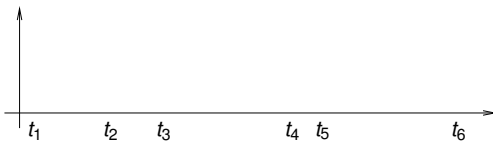
– Robin Forrest et Rich Riesenfeld

# Plan

- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
  - Exemples historiques
  - **B-splines**
  - Généralisation I : autre masque
  - Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
  - Box-splines surfaciques
  - Etude au voisinage d'un sommet extraordinaire
  - Exemples de *tuning*
  - Généralisations
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions
  - Synthèse Multirésolution sans détails
  - Prédicteur dans un Schéma *Lifting*

# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

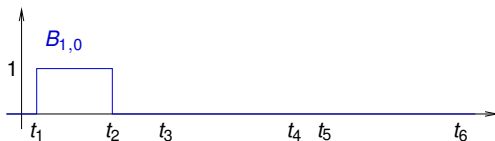
*input* : ensemble de nœuds



# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

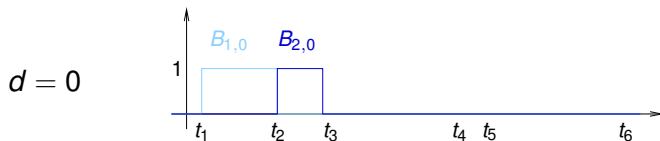
*input* : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$

$d = 0$



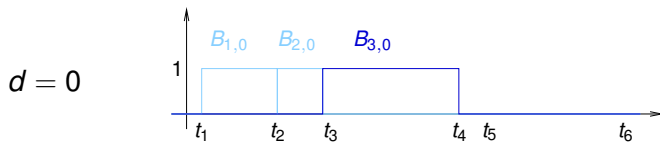
# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

*input* : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$



# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

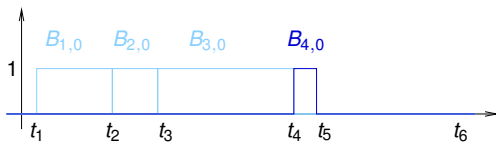
*input* : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$



# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

*input* : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$

$d = 0$

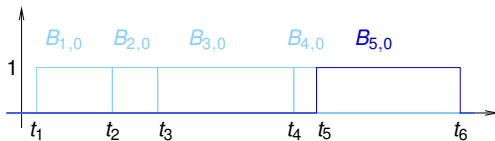




# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

*input* : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$

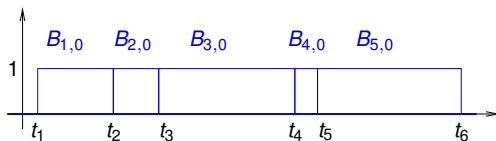
$d = 0$



# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

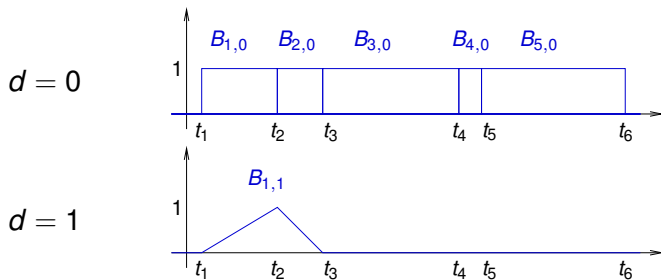
*input* : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$

$d = 0$



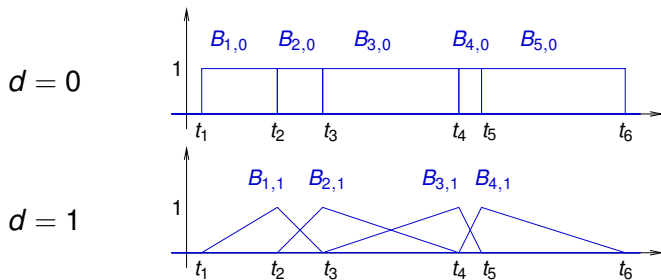
# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

*input* : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$



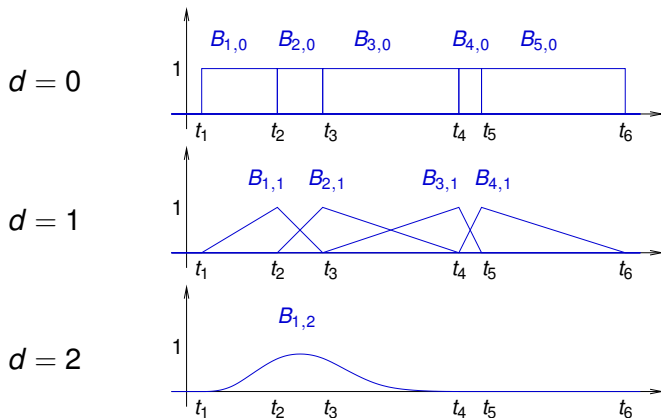
# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

*input* : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$



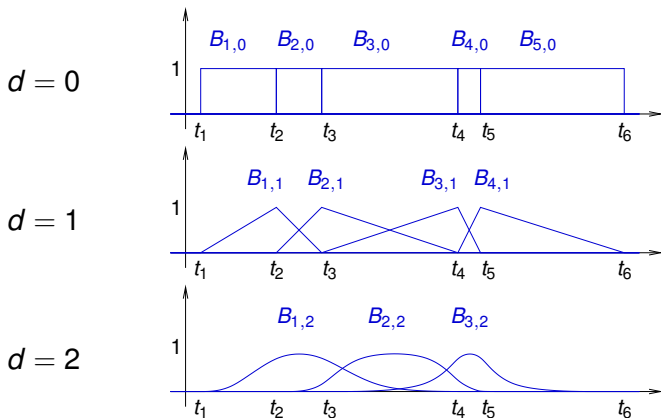
# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

*input* : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$



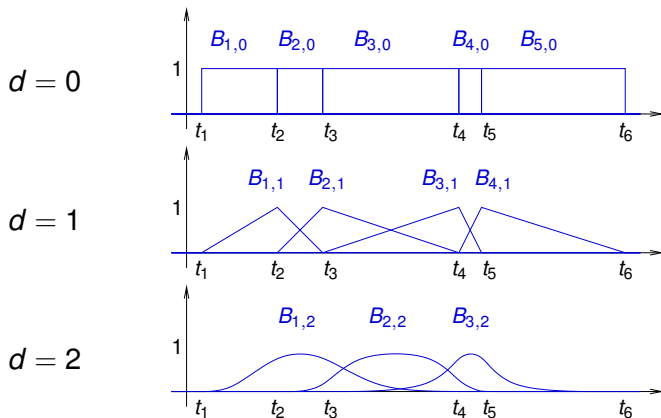
# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

*input* : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$



# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

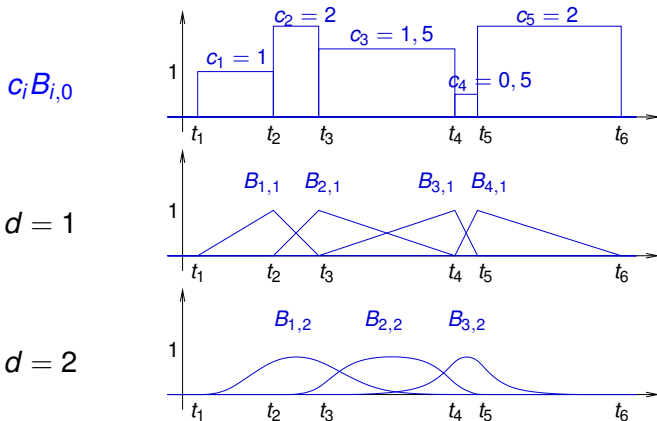
*input* : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$



fonc. déf. sur  $[t_{1+d}, t_{m-d}]$ , de continuité  $d - 1$  en chaque  $t_i$  (si  $\neq$ )

# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

*input* : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$



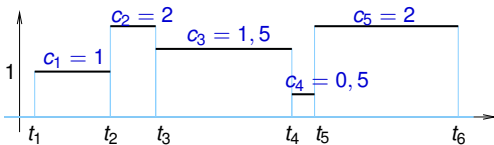
fonc. déf. sur  $[t_{1+d}, t_{m-d}]$ , de continuité  $d - 1$  en chaque  $t_i$  (si  $\neq$ )



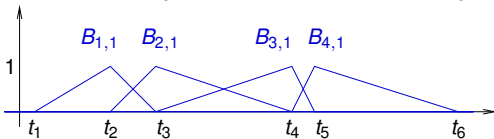
# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$

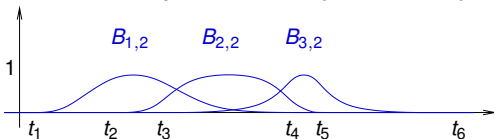
$$s_0 = \sum_i c_i B_{i,0}$$



$d = 1$



$d = 2$

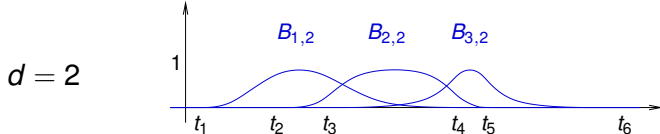
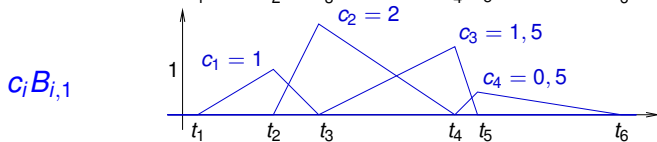
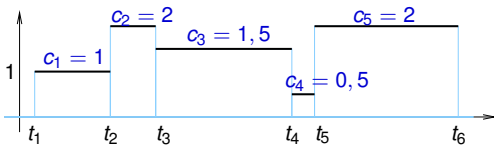


fonc. déf. sur  $[t_{1+d}, t_{m-d}]$ , de continuité  $d - 1$  en chaque  $t_i$  (si  $\neq$ )

# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$

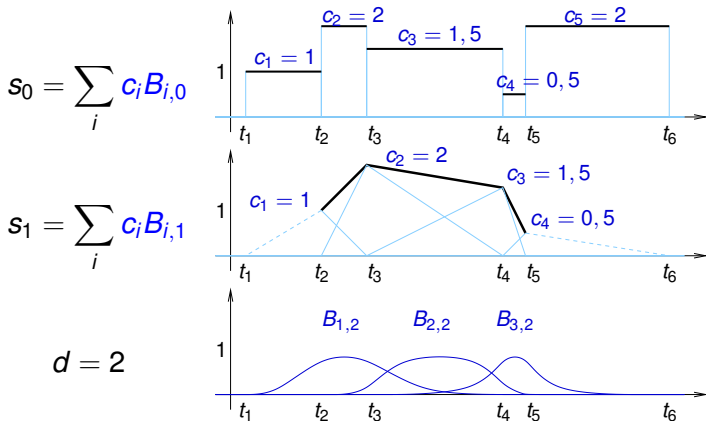
$$s_0 = \sum_i c_i B_{i,0}$$



fonc. déf. sur  $[t_{1+d}, t_{m-d}]$ , de continuité  $d - 1$  en chaque  $t_i$  (si  $\neq$ )

# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

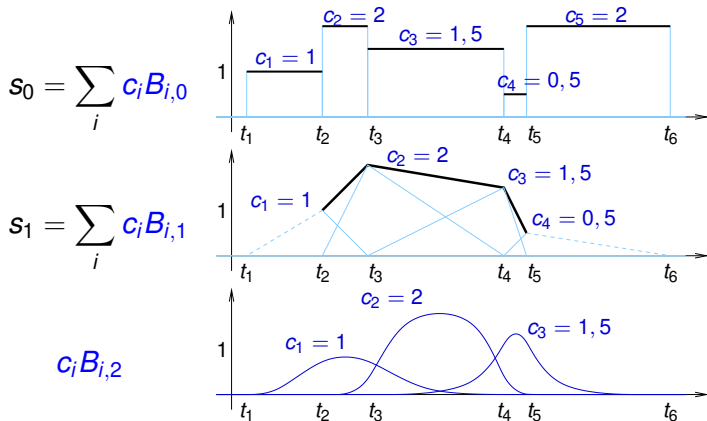
input : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$



fonc. déf. sur  $[t_{1+d}, t_{m-d}]$ , de continuité  $d - 1$  en chaque  $t_i$  (si  $\neq$ )

# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

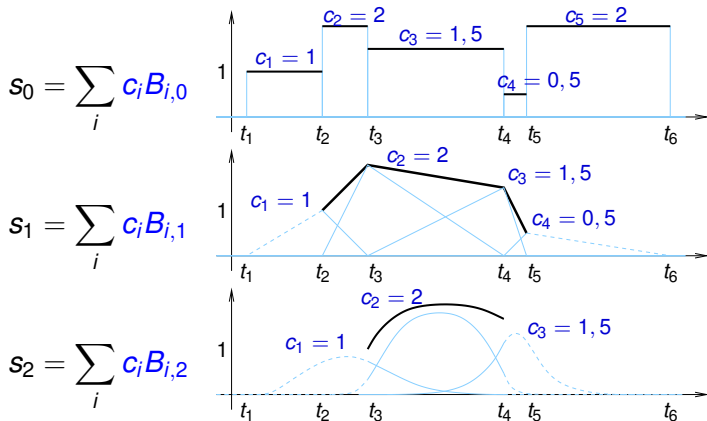
input : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$



fonc. déf. sur  $[t_{1+d}, t_{m-d}]$ , de continuité  $d - 1$  en chaque  $t_i$  (si  $\neq$ )

# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

*input* : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$

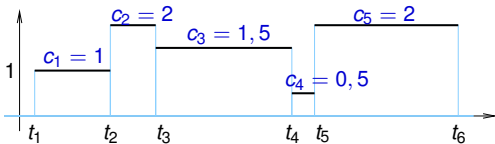


fonc. déf. sur  $[t_{1+d}, t_{m-d}]$ , de continuité  $d - 1$  en chaque  $t_i$  (si  $\neq$ )

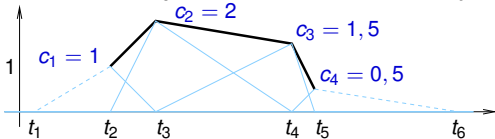
# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$

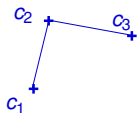
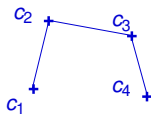
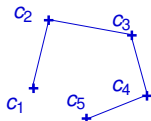
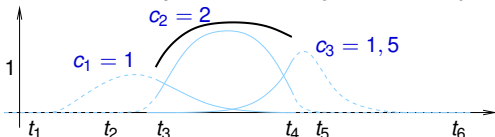
$$s_0 = \sum_i c_i B_{i,0}$$



$$s_1 = \sum_i c_i B_{i,1}$$



$$s_2 = \sum_i c_i B_{i,2}$$

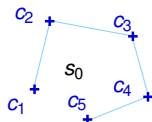
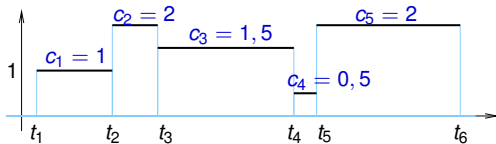


fonc. déf. sur  $[t_{1+d}, t_{m-d}]$ , de continuité  $d - 1$  en chaque  $t_i$  (si  $\neq$ )

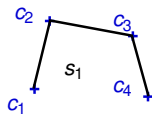
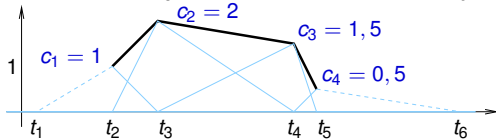
# B-spline : base pour fonct. polynom. par morceaux

input : ensemble de nœuds + degré polynomial  $d$

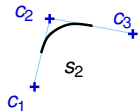
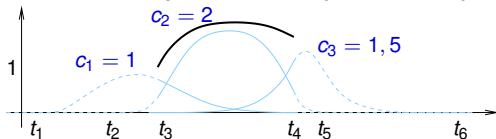
$$s_0 = \sum_i c_i B_{i,0}$$



$$s_1 = \sum_i c_i B_{i,1}$$



$$s_2 = \sum_i c_i B_{i,2}$$



fonc. déf. sur  $[t_{1+d}, t_{m-d}]$ , de continuité  $d - 1$  en chaque  $t_i$  (si  $\neq$ )

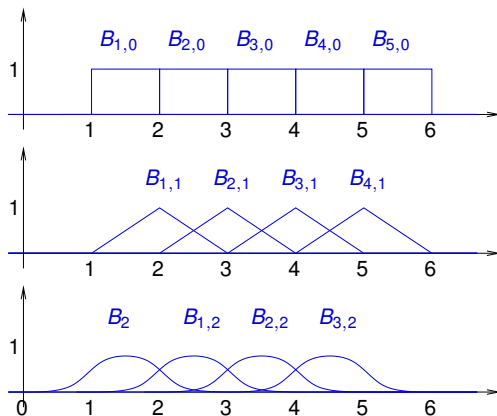
# B-spline uniforme : une Box-spline particulière

uniforme :  $t_{i+1} - t_i = 1$



# B-spline uniforme : une Box-spline particulière

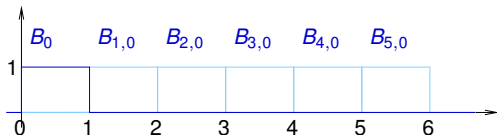
uniforme :  $t_{i+1} - t_i = 1$



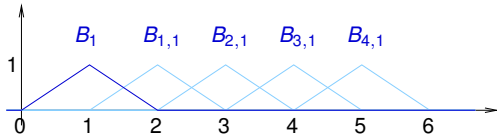
# B-spline uniforme : une Box-spline particulière

uniforme :  $t_{i+1} - t_i = 1$

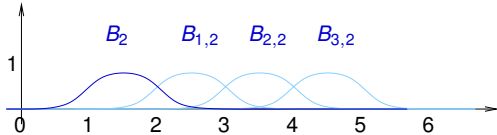
$$B_{i,0}(t) = B_0(t - i)$$



$$B_{i,1}(t) = B_1(t - i)$$



$$B_{i,2}(t) = B_2(t - i)$$



# B-spline uniforme : une Box-spline particulière

Si espace des paramètres de **dimension 1**,  
une Box-spline  $B(t|v_1 \dots v_k)$  est définie

- de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$
- par  $k \geq 1$  directions  $v_j \in \mathbb{R}$

# B-spline uniforme : une Box-spline particulière

Si espace des paramètres de **dimension 1**,  
une Box-spline  $B(t|v_1 \dots v_k)$  est définie

- de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$
- par  $k \geq 1$  directions  $v_i \in \mathbb{R}$

Elle est également B-spline uniforme si  $v_i = e_1$  et alors

# B-spline uniforme : une Box-spline particulière

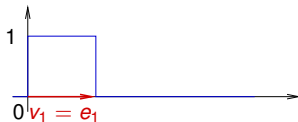
Si espace des paramètres de **dimension 1**,  
une Box-spline  $B(t|v_1 \dots v_k)$  est définie

- de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$
- par  $k \geq 1$  directions  $v_i \in \mathbb{R}$

Elle est également B-spline uniforme si  $v_i = e_1$  et alors

$$B(t|v_1) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [v_1][0, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$B(t|e_1) = B_0$$



# B-spline uniforme : une Box-spline particulière

Si espace des paramètres de **dimension 1**,  
une Box-spline  $B(t|v_1 \dots v_k)$  est définie

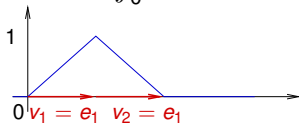
- de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$
- par  $k \geq 1$  directions  $v_i \in \mathbb{R}$

Elle est également B-spline uniforme si  $v_i = e_1$  et alors

$$B(t|v_1) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [v_1][0, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$B(t|v_1 \dots v_k) := \int_0^1 B(t - \tau v_k | v_1 \dots v_{k-1}) d\tau$$

$$B(t|e_1 e_1) = B_1$$



# B-spline uniforme : une Box-spline particulière

Si espace des paramètres de **dimension 1**,  
une Box-spline  $B(t|v_1 \dots v_k)$  est définie

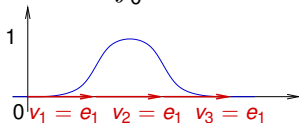
- de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$
- par  $k \geq 1$  directions  $v_i \in \mathbb{R}$

Elle est également B-spline uniforme si  $v_i = e_1$  et alors

$$B(t|v_1) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [v_1][0, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$B(t|v_1 \dots v_k) := \int_0^1 B(t - \tau v_k | v_1 \dots v_{k-1}) d\tau$$

$$B(t|e_1 e_1 e_1) = B_2$$



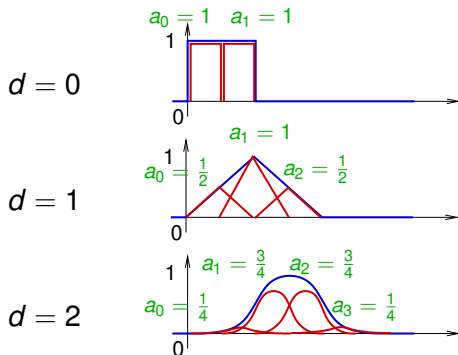
# B-spline uniforme : combi. de translats contractés

combinaison de translats contractés :  $\sum_j a_j B(2t-j)$



# B-spline uniforme : combi. de translatsés contractés

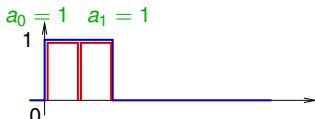
combinaison de translatsés contractés :  $\sum_j a_j B(2t-j)$



# B-spline uniforme : combi. de translatsés contractés

combinaison de translatsés contractés :  $\sum_j a_j B(2t-j)$

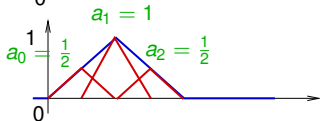
$d = 0$



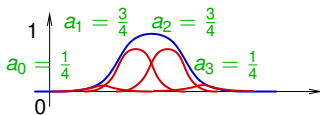
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

→

$d = 1$



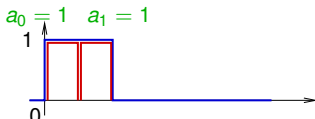
$d = 2$



# B-spline uniforme : combi. de translatsés contractés

combinaison de translatsés contractés :  $\sum_j a_j B(2t-j)$

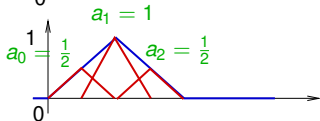
$d = 0$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$



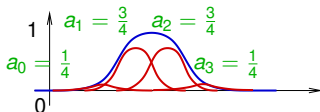
$d = 1$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

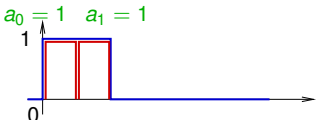


$d = 2$

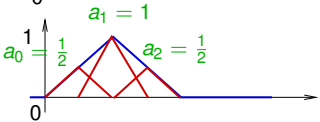


# B-spline uniforme : combi. de translatés contractés

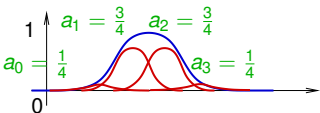
combinaison de translatés contractés :  $\sum_j a_j B(2t-j)$

 $d = 0$ 

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

 $d = 1$ 

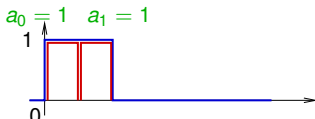
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

 $d = 2$ 

# B-spline uniforme : combi. de translatsés contractés

combinaison de translatsés contractés :  $\sum_j a_j B(2t-j)$

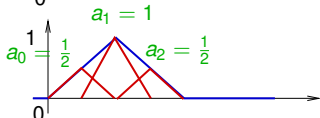
$d = 0$



$$[ \quad 1 \quad 1 \quad ]$$



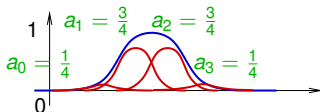
$d = 1$



$$[ \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad ]$$

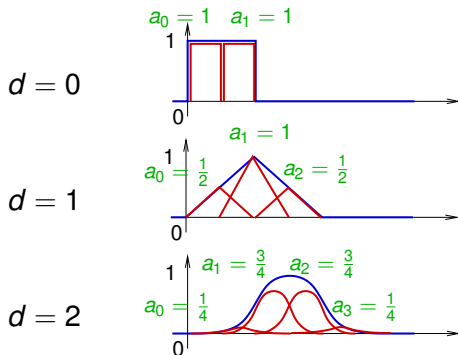


$d = 2$



# B-spline uniforme : combi. de translatsés contractés

combinaison de translatsés contractés :  $\sum_j a_j B(2t-j)$



$$[ \quad 1 \quad 1 \quad ]$$

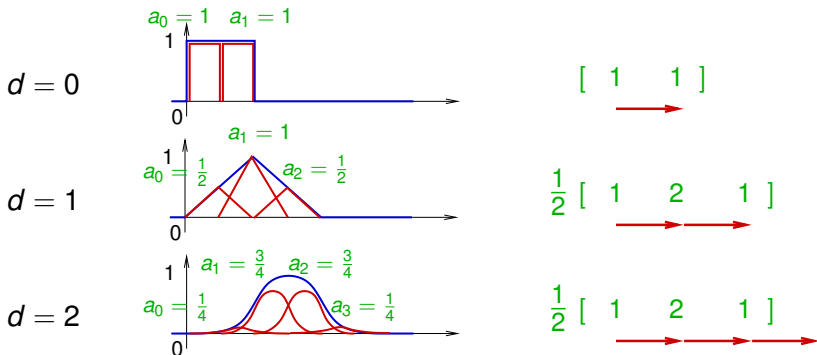
→

$$\frac{1}{2} [ \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad ]$$

→ →

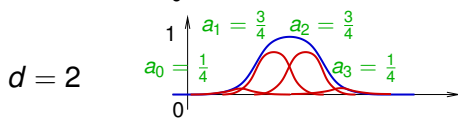
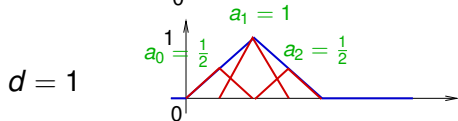
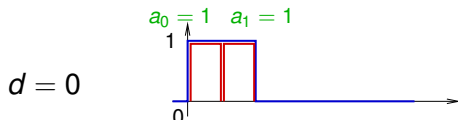
# B-spline uniforme : combi. de translatsés contractés

combinaison de translatsés contractés :  $\sum_j a_j B(2t-j)$



# B-spline uniforme : combi. de translatsés contractés

combinaison de translatsés contractés :  $\sum_j a_j B(2t-j)$



$$[ \quad 1 \quad 1 \quad ]$$



$$\frac{1}{2} [ \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad ]$$



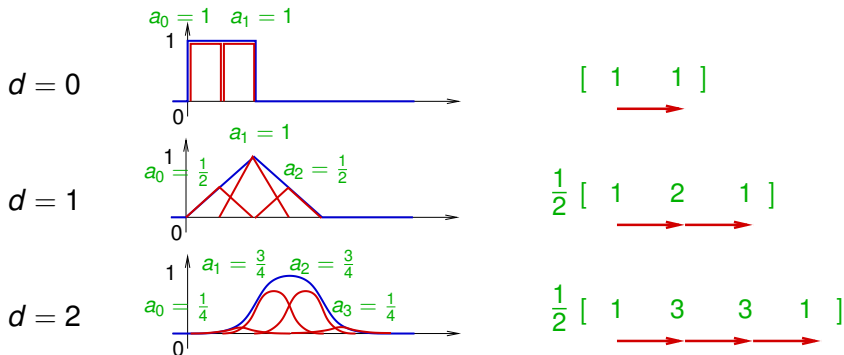
$$\frac{1}{2} [ \quad 1 \quad [ \quad 1 \quad 2 \quad ] \quad 1 \quad ]$$





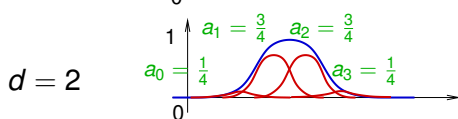
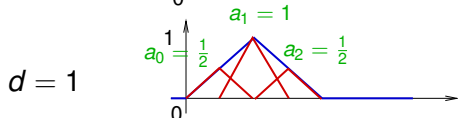
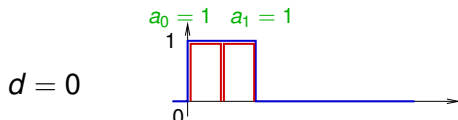
# B-spline uniforme : combi. de translatsés contractés

combinaison de translatsés contractés :  $\sum_j a_j B(2t-j)$



# B-spline uniforme : combi. de translatsés contractés

combinaison de translatsés contractés :  $\sum_j a_j B(2t-j)$



$$[ \quad 1 \quad 1 \quad ]$$



$$\frac{1}{2} [ \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad ]$$



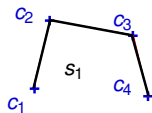
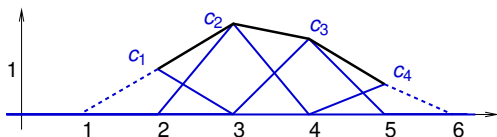
$$\frac{1}{4} [ \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad ]$$



# Subdivision vers une B-spline uniforme

Doubler le nombre de nœuds pour la même B-spline

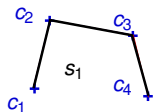
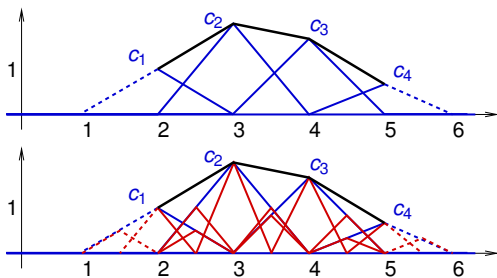
$$s_1(t) = \sum_i c_i B_0(t - i)$$



# Subdivision vers une B-spline uniforme

Doubler le nombre de nœuds pour la même B-spline

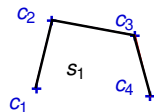
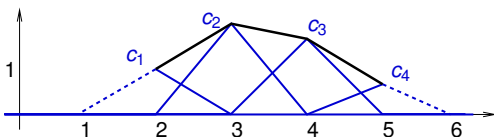
$$s_1(t) = \sum_i c_i B_0(t-i)$$



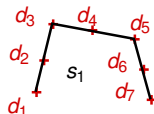
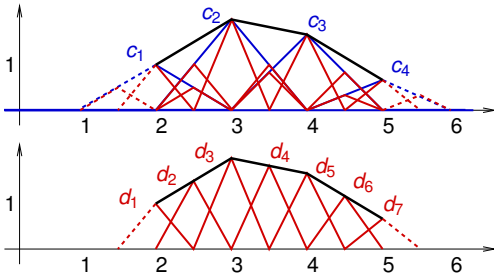
# Subdivision vers une B-spline uniforme

Doubler le nombre de nœuds pour la même B-spline

$$s_1(t) = \sum_i c_i B_0(t - i)$$



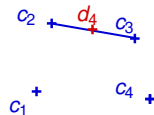
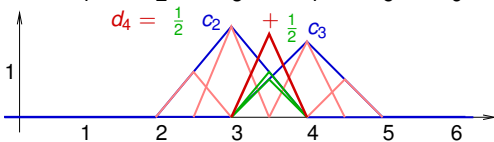
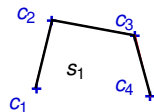
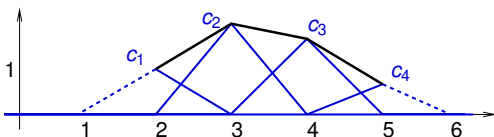
$$s_1(t) = \sum_i d_i B_0(2t - i)$$



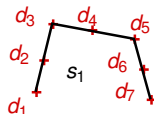
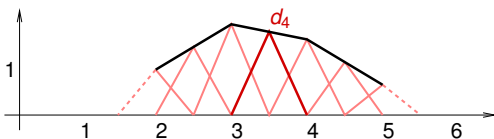
# Subdivision vers une B-spline uniforme

Doubler le nombre de nœuds pour la même B-spline

$$s_1(t) = \sum_i c_i B_0(t - i)$$



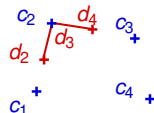
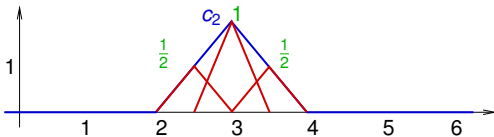
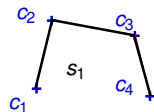
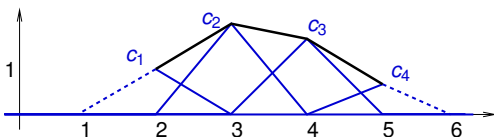
$$s_1(t) = \sum_i d_i B_0(2t - i)$$



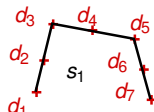
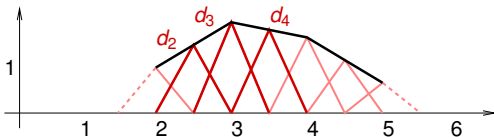
# Subdivision vers une B-spline uniforme

Doubler le nombre de nœuds pour la même B-spline

$$s_1(t) = \sum_i c_i B_0(t - i)$$



$$s_1(t) = \sum_i d_i B_0(2t - i)$$



# Implantation en subd. topologique + géométrique

## 1. subdivision topologique

- taille masque impair : **primal**  
insérer un nouveau sommet pour  
chaque arête
- taille masque pair : **dual**  
*corner cutting*

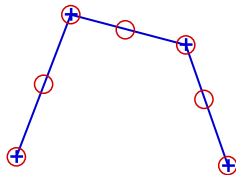


# Implantation en subd. topologique + géométrique

## 1. subdivision topologique

- taille masque impair : **primal**  
insérer un nouveau sommet pour chaque arête
- taille masque pair : **dual**  
*corner cutting*

$d = 1$  : primal

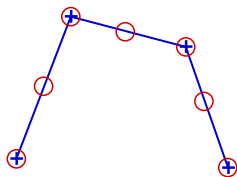


# Implantation en subd. topologique + géométrique

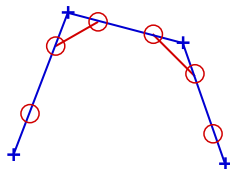
## 1. subdivision topologique

- taille masque impair : **primal**  
insérer un nouveau sommet pour chaque arête
- taille masque pair : **dual**  
*corner cutting*

$d = 1$  : primal



$d = 2$  : dual

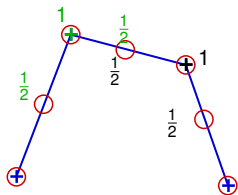


# Implantation en subd. topologique + géométrique

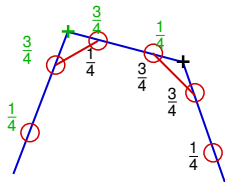
## 1. subdivision topologique

- taille masque impair : **primal**  
insérer un nouveau sommet pour chaque arête
- taille masque pair : **dual**  
*corner cutting*

$d = 1$  : primal



$d = 2$  : dual



# Implantation en subd. topologique + géométrique

## 1. subdivision topologique

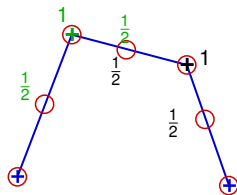
- taille masque impair : **primal**  
insérer un nouveau sommet pour chaque arête
- taille masque pair : **dual**  
*corner cutting*

## 2. subdivision géométrique

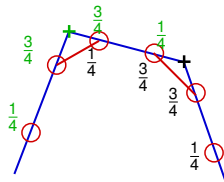
- appliquer le masque

$d = 2$  : **Chaikin !**

$d = 1$  : **primal**



$d = 2$  : **dual**



# Recette

## 1. Choisir un degré polynomial

$$d = 2$$

# Recette

1. Choisir un degré polynomial

$$d = 2$$

2. Construire le masque avec  $d + 1$  flèches

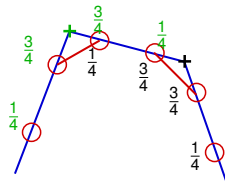
$$\frac{1}{4} [ \underset{\text{flèches}}{\color{green}1 \quad \color{green}3 \quad \color{green}3 \quad \color{green}1} ]$$

# Recette

1. Choisir un degré polynomial
2. Construire le masque avec  $d + 1$  flèches
3. Implanter en topo. + géo. selon schéma primal/dual

$$d = 2$$

$$\frac{1}{4} [ \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad ]$$

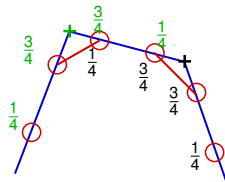



# Recette

1. Choisir un degré polynomial
2. Construire le masque avec  $d + 1$  flèches
3. Implanter en topo. + géo. selon schéma primal/dual

$$d = 2$$

$$\frac{1}{4} [ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 ]$$

Un schéma de subdivision qui tend vers une courbe polynomiale par morceaux de degré  $d$ , ce continuité  $C^{d-1}$

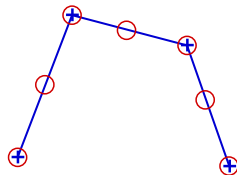


# Plan

- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
  - Exemples historiques
  - B-splines
  - **Généralisation I : autre masque**
  - Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
  - Box-splines surfaciques
  - Etude au voisinage d'un sommet extraordinaire
  - Exemples de *tuning*
  - Généralisations
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions
  - Synthèse Multirésolution sans détails
  - Prédicteur dans un Schéma *Lifting*

# Masque d'un schéma interpolant

## Un schéma primal

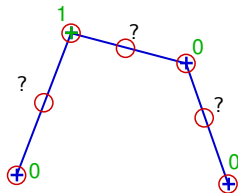


# Masque d'un schéma interpolant

Un schéma primal

de masque :

[... 0 ? 0 ? 1 ? 0 ? 0 ...]



# Masque d'un schéma interpolant

Un schéma primal

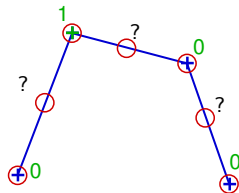
de masque :

$$\begin{bmatrix} \dots & 0 & ? & 0 & ? & 1 & ? & 0 & ? & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & a_{-4} & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \end{bmatrix}$$

Condition nécessaire pour convergence :

$$\sum_i a_{2i} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_i a_{2i+1} = 1$$



# Masque d'un schéma interpolant

Un schéma primal

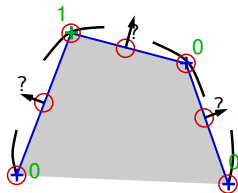
de masque :

$$\begin{bmatrix} \dots & 0 & ? & 0 & ? & 1 & ? & 0 & ? & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & a_{-4} & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \end{bmatrix}$$

Condition nécessaire pour convergence :

$$\sum_i a_{2i} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_i a_{2i+1} = 1$$



# Masque d'un schéma interpolant

Un schéma primal, le *4-point scheme* [Dyn et al., 1987]

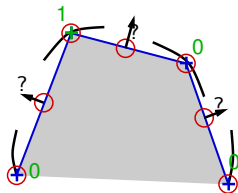
de masque :

$$\begin{bmatrix} \dots & 0 & -1/16 & 0 & 9/16 & 1 & 9/16 & 0 & -1/16 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & a_{-4} & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \end{bmatrix}$$

Condition nécessaire pour convergence :

$$\sum_i a_{2i} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_i a_{2i+1} = 1$$



# Masque d'un schéma interpolant

Un schéma primal, le *4-point scheme* [Dyn et al., 1987]

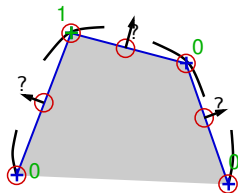
de masque :

$$\begin{bmatrix} \dots & 0 & -1/16 & 0 & 9/16 & 1 & 9/16 & 0 & -1/16 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & a_{-4} & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \end{bmatrix}$$

Condition nécessaire pour convergence :

$$\sum_i a_{2i} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_i a_{2i+1} = 1$$



*Converge-t-il ? Vers quelle régularité ?*

# Etude de convergence : conditions suffisantes

idée générale : montrer que  $\|\Delta c_i\| := \|c_{i+1} - c_i\| \rightarrow 0$



# Etude de convergence : conditions suffisantes

idée générale : montrer que  $\|\Delta c_i\| := \|c_{i+1} - c_i\| \rightarrow 0$

- polynôme de Laurent du masque :  $a(z) := \sum_i a_i z^i$
- $\{\Delta c_i\}$  suit également un schéma de subdivision de masque

$$q(z) = \frac{a(z)}{1+z}$$

# Etude de convergence : conditions suffisantes

idée générale : montrer que  $\|\Delta c_i\| := \|c_{i+1} - c_i\| \rightarrow 0$

- polynôme de Laurent du masque :  $a(z) := \sum_i a_i z^i$
- $\{\Delta c_i\}$  suit également un schéma de subdivision de masque

$$q(z) = \frac{a(z)}{1+z}$$

**Le schéma initial  $S_a$  est convergent ssi le schéma aux différences  $S_q$  est contractant.**

- ssi il existe  $L \in \mathbb{N}^*$  tq  $\|S_q^L\|_\infty < 1$
- En pratique : on se contente de regarder pour  $L = 1 \dots 5$  ou  $10$

# Etude de convergence : conditions suffisantes

Le 4-point scheme est convergent :

$$\begin{aligned}
 a(z) &= -\frac{1}{16}z^{-3} + 0z^{-2} + \frac{9}{16}z^{-1} + 1 + \frac{9}{16}z + 0z^2 - \frac{1}{16}z^3 \\
 &= (1+z)\left(-\frac{1}{16}z^{-3} + \frac{1}{16}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}z - \frac{1}{16}z^2\right)
 \end{aligned}$$

# Etude de convergence : conditions suffisantes

Le 4-point scheme est convergent :

$$\begin{aligned}
 a(z) &= -\frac{1}{16}z^{-3} + 0z^{-2} + \frac{9}{16}z^{-1} + 1 + \frac{9}{16}z + 0z^2 - \frac{1}{16}z^3 \\
 &= (1+z)\left(-\frac{1}{16}z^{-3} + \frac{1}{16}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}z - \frac{1}{16}z^2\right)
 \end{aligned}$$

# Etude de convergence : conditions suffisantes

Le 4-point scheme est convergent :

$$\begin{aligned}
 a(z) &= -\frac{1}{16}z^{-3} + 0z^{-2} + \frac{9}{16}z^{-1} + 1 + \frac{9}{16}z + 0z^2 - \frac{1}{16}z^3 \\
 &= (1+z)\left(-\frac{1}{16}z^{-3} + \frac{1}{16}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}z - \frac{1}{16}z^2\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|S_q\|_\infty &= \max\left(\sum |q_{2i}|, \sum |q_{2i+1}|\right) \\
 &= \frac{1}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{5}{8} < 1
 \end{aligned}$$

# Etude de convergence : conditions suffisantes

Vers quelle régularité ?

**Si  $a(z) = \frac{(1+z)^m}{2^m} b(z)$  et si  $S_b$  est convergent  
alors  $S_a$  converge vers une fonction  $C^m$ .**

# Etude de convergence : conditions suffisantes

Vers quelle régularité ?

**Si  $a(z) = \frac{(1+z)^m}{2^m} b(z)$  et si  $S_b$  est convergent  
alors  $S_a$  converge vers une fonction  $C^m$ .**

*4-point scheme :  $C^1$*

# Etude de convergence : conditions suffisantes

Vers quelle régularité ?

**Si  $a(z) = \frac{(1+z)^m}{2^m} b(z)$  et si  $S_b$  est convergent  
alors  $S_a$  converge vers une fonction  $C^m$ .**

*4-point scheme* :  $C^1$

B-spline de degré  $d$  :

$$a(z) = \frac{(1+z)^{d+1}}{2^d} = \frac{(1+z)^{d-1}}{2^{d-1}} \frac{(1+z)^2}{2}$$



# Etude de convergence : conditions suffisantes

Vers quelle régularité ?

**Si  $a(z) = \frac{(1+z)^m}{2^m} b(z)$  et si  $S_b$  est convergent  
alors  $S_a$  converge vers une fonction  $C^m$ .**

4-point scheme :  $C^1$

B-spline de degré  $d$  :

$$a(z) = \frac{(1+z)^{d+1}}{2^d} = \frac{(1+z)^{d-1}}{2^{d-1}} \frac{(1+z)^2}{2}$$

# Etude de convergence : conditions suffisantes

Vers quelle régularité ?

**Si  $a(z) = \frac{(1+z)^m}{2^m} b(z)$  et si  $S_b$  est convergent  
alors  $S_a$  converge vers une fonction  $C^m$ .**

4-point scheme :  $C^1$

B-spline de degré  $d$  :

$$a(z) = \frac{(1+z)^{d+1}}{2^d} = \frac{(1+z)^{d-1}}{2^{d-1}} \frac{(1+z)^2}{2}$$

$$b(z) = \frac{(1+z)^2}{2} = (1+z) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z \right)$$

# Etude de convergence : conditions suffisantes

Vers quelle régularité ?

**Si  $a(z) = \frac{(1+z)^m}{2^m} b(z)$  et si  $S_b$  est convergent  
alors  $S_a$  converge vers une fonction  $C^m$ .**

4-point scheme :  $C^1$

B-spline de degré  $d$  :

$$a(z) = \frac{(1+z)^{d+1}}{2^d} = \frac{(1+z)^{d-1}}{2^{d-1}} \frac{(1+z)^2}{2}$$

$$b(z) = \frac{(1+z)^2}{2} = (1+z) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z \right)$$

# Etude de convergence : conditions suffisantes

Vers quelle régularité ?

**Si  $a(z) = \frac{(1+z)^m}{2^m} b(z)$  et si  $S_b$  est convergent  
alors  $S_a$  converge vers une fonction  $C^m$ .**

4-point scheme :  $C^1$

B-spline de degré  $d$  :

$$a(z) = \frac{(1+z)^{d+1}}{2^d} = \frac{(1+z)^{d-1}}{2^{d-1}} \frac{(1+z)^2}{2}$$

$$b(z) = \frac{(1+z)^2}{2} = (1+z) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z \right)$$

$$\|S_a\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$$

# Etude de convergence : conditions suffisantes

Vers quelle régularité ?

**Si  $a(z) = \frac{(1+z)^m}{2^m} b(z)$  et si  $S_b$  est convergent  
alors  $S_a$  converge vers une fonction  $C^m$ .**

4-point scheme :  $C^1$

B-spline de degré  $d$  :  $C^{d-1}$

$$a(z) = \frac{(1+z)^{d+1}}{2^d} = \frac{(1+z)^{d-1}}{2^{d-1}} \frac{(1+z)^2}{2}$$

$$b(z) = \frac{(1+z)^2}{2} = (1+z) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z \right)$$

$$\|S_a\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$$

# Plan

- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
  - Exemples historiques
  - B-splines
  - Généralisation I : autre masque
  - **Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme**
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
  - Box-splines surfaciques
  - Etude au voisinage d'un sommet extraordinaire
  - Exemples de *tuning*
  - Généralisations
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions
  - Synthèse Multirésolution sans détails
  - Prédicteur dans un Schéma *Lifting*

# Schémas non-uniformes

au sein d'une même étape de subdivision  
les règles diffèrent entre les sommets

- exemple : partir d'une B-spline non-uniforme et insérer un nœud au milieu de chaque intervalle.
- permet de modéliser NURBS (CAGD)
- 1980 - Algorithmes de Boehm ou d'Oslo : pour insérer **un seul** nœud dans une B-spline non-uniforme
- 2009 - [Schaefer et Goldman, 2009] et [Cashman et al., 2009] algorithmes en *refine-and-smooth* : pour insérer au plus un nœud dans tous les intervalles.

# Schémas non-uniformes

au sein d'une même étape de subdivision  
les règles diffèrent entre les sommets

- exemple : partir d'une B-spline non-uniforme et insérer un nœud au milieu de chaque intervalle.
- permet de modéliser NURBS (CAGD)
- 1980 - Algorithmes de Boehm ou d'Oslo : pour insérer **un seul** nœud dans une B-spline non-uniforme
- 2009 - [Schaefer et Goldman, 2009] et [Cashman et al., 2009] algorithmes en *refine-and-smooth* : pour insérer au plus un nœud dans tous les intervalles.



# Schémas non-uniformes

au sein d'une même étape de subdivision  
les règles diffèrent entre les sommets

- exemple : partir d'une B-spline non-uniforme et insérer un nœud au milieu de chaque intervalle.
- permet de modéliser NURBS (CAGD)
- 1980 - Algorithmes de Boehm ou d'Oslo : pour insérer **un seul** nœud dans une B-spline non-uniforme
- 2009 - [Schaefer et Goldman, 2009] et [Cashman et al., 2009] algorithmes en *refine-and-smooth* : pour insérer au plus un nœud dans tous les intervalles.

# Schémas non-uniformes

au sein d'une même étape de subdivision  
les règles diffèrent entre les sommets

- exemple : partir d'une B-spline non-uniforme et insérer un nœud au milieu de chaque intervalle.
- permet de modéliser NURBS (CAGD)
- 1980 - Algorithmes de Boehm ou d'Oslo : pour insérer **un seul** nœud dans une B-spline non-uniforme
- 2009 - [Schaefer et Goldman, 2009] et [Cashman et al., 2009] algorithmes en *refine-and-smooth* : pour insérer au plus un nœud dans tous les intervalles.

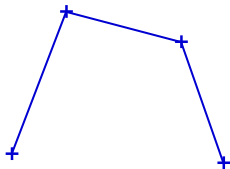
# Schémas non-uniformes

au sein d'une même étape de subdivision  
les règles diffèrent entre les sommets

- exemple : partir d'une B-spline non-uniforme et insérer un nœud au milieu de chaque intervalle.
- permet de modéliser NURBS (CAGD)
- 1980 - Algorithmes de Boehm ou d'Oslo : pour insérer **un seul** nœud dans une B-spline non-uniforme
- 2009 - [Schaefer et Goldman, 2009] et [Cashman et al., 2009] algorithmes en *refine-and-smooth* : pour insérer au plus un nœud dans tous les intervalles.

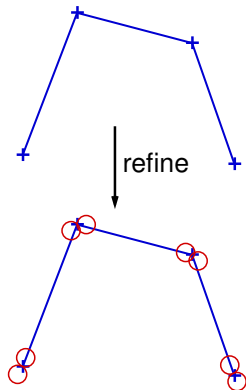
# Implantation en *refine-and-smooth*

Cas uniforme : algorithme de Lane-Riesenfeld (1980)



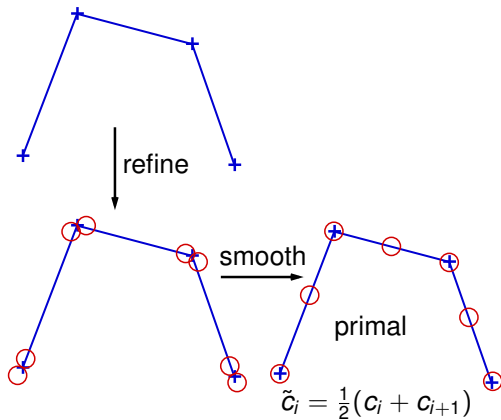
# Implantation en *refine-and-smooth*

Cas uniforme : algorithme de Lane-Riesenfeld (1980)



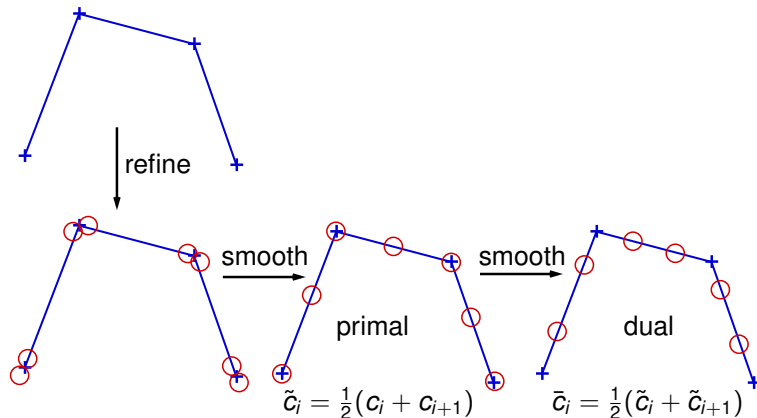
# Implantation en *refine-and-smooth*

Cas uniforme : algorithme de Lane-Riesenfeld (1980)



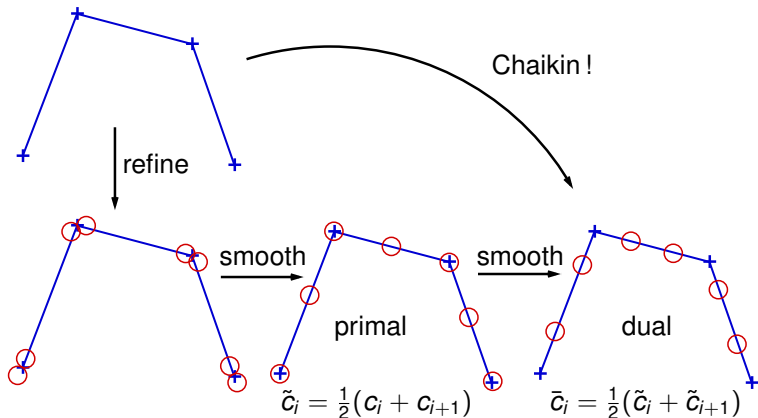
# Implantation en *refine-and-smooth*

Cas uniforme : algorithme de Lane-Riesenfeld (1980)



# Implantation en *refine-and-smooth*

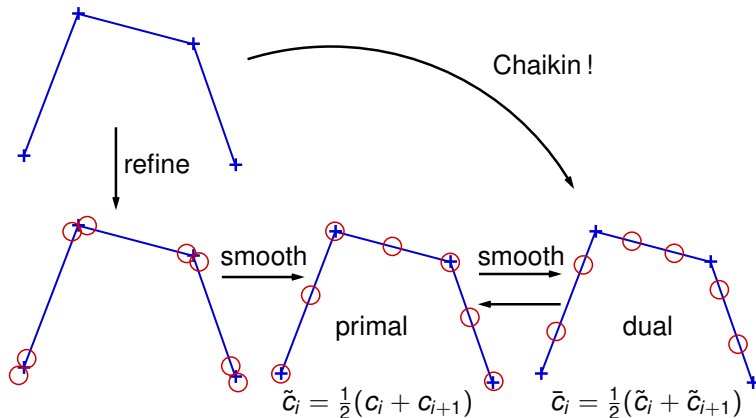
Cas uniforme : algorithme de Lane-Riesenfeld (1980)





# Implantation en *refine-and-smooth*

Cas uniforme : algorithme de Lane-Riesenfeld (1980)



# Schémas non-stationnaires

le masque  $a$  dépend du pas de subdivision

- pour modéliser des fonctions exponentielles (cercles)
- étude de convergence peut se faire par proximité (asymptotique) avec un schéma stationnaire [Dyn et Levin, 1995].

# Schémas non-stationnaires

le masque  $a$  dépend du pas de subdivision

- pour modéliser des fonctions exponentielles (cercles)
- étude de convergence peut se faire par proximité (asymptotique) avec un schéma stationnaire [Dyn et Levin, 1995].

# Schémas non-stationnaires

le masque  $a$  dépend du pas de subdivision

- pour modéliser des fonctions exponentielles (cercles)
- étude de convergence peut se faire par proximité (asymptotique) avec un schéma stationnaire [Dyn et Levin, 1995].

# Schémas ni stationnaire, ni uniformes

*Cutting corners* de de Rham :

*Cutting corners always works* [de Boor, 1987]

# Schémas ni stationnaire, ni uniformes

*Cutting corners* de de Rham :

*Cutting corners always works* [de Boor, 1987]

Schémas non-linéaires :

- choisir, pour chaque nouveau sommet, une règle parmi un ensemble pré-défini
- étude de convergence : montrer que, quels que soient les choix successifs adoptés, le schéma aux différences est contractant [Cohen et al., 2003]

# Schémas ni stationnaire, ni uniformes

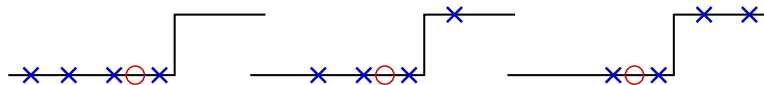
*Cutting corners* de de Rham :

*Cutting corners always works* [de Boor, 1987]

Schémas non-linéaires :

- choisir, pour chaque nouveau sommet, une règle parmi un ensemble pré-défini
- étude de convergence : montrer que, quels que soient les choix successifs adoptés, le schéma aux différences est contractant [Cohen et al., 2003]

*Essentially Non-Oscillatory interpolation* [Harten et al., 1987]



# Schémas ni stationnaire, ni uniformes

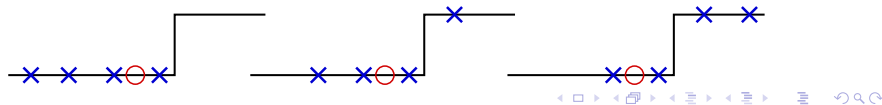
*Cutting corners* de de Rham :

*Cutting corners always works* [de Boor, 1987]

Schémas non-linéaires :

- choisir, pour chaque nouveau sommet, une règle parmi un ensemble pré-défini
- étude de convergence : montrer que, quels que soient les choix successifs adoptés, le schéma aux différences est contractant [Cohen et al., 2003]

*Essentially Non-Oscillatory interpolation* [Harten et al., 1987]





# Plan

- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
  - Exemples historiques
  - B-splines
  - Généralisation I : autre masque
  - Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
  - Box-splines surfaciques
  - Etude au voisinage d'un sommet extraordinaire
  - Exemples de *tuning*
  - Généralisations
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions
  - Synthèse Multirésolution sans détails
  - Prédicteur dans un Schéma *Lifting*

# Plan

- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
  - Exemples historiques
  - B-splines
  - Généralisation I : autre masque
  - Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
  - **Box-splines surfaciques**
  - Etude au voisinage d'un sommet extraordinaire
  - Exemples de *tuning*
  - Généralisations
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions
  - Synthèse Multirésolution sans détails
  - Prédicteur dans un Schéma *Lifting*

# Box-splines surfaciques pour la subdivision

Si espace des paramètres de **dimension 2**,  
une Box-spline  $B(t|v_1 \dots v_k)$  est définie

- de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$
- par  $k \geq 2$  directions  $v_i \in \mathbb{R}^2$  tels que  $(v_1, v_2)$  en est une **base**

# Box-splines surfaciques pour la subdivision

Si espace des paramètres de **dimension 2**,  
une Box-spline  $B(t|v_1 \dots v_k)$  est définie

- de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$
- par  $k \geq 2$  directions  $v_i \in \mathbb{R}^2$  tels que  $v_1 = e_1$ ,  $v_2 = e_2$ , et  $v_i \in \mathbb{Z}^2$

# Box-splines surfaciques pour la subdivision

Si espace des paramètres de **dimension 2**,  
une Box-spline  $B(t|v_1 \dots v_k)$  est définie

- de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$
- par  $k \geq 2$  directions  $v_i \in \mathbb{R}^2$  tels que  $v_1 = e_1$ ,  $v_2 = e_2$ , et  $v_i \in \mathbb{Z}^2$

$$B(t|v_1 v_2) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [v_1, v_2][0, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

# Box-splines surfaciques pour la subdivision

Si espace des paramètres de **dimension 2**,  
une Box-spline  $B(t|v_1 \dots v_k)$  est définie

- de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$
- par  $k \geq 2$  directions  $v_i \in \mathbb{R}^2$  tels que  $v_1 = e_1$ ,  $v_2 = e_2$ , et  $v_i \in \mathbb{Z}^2$

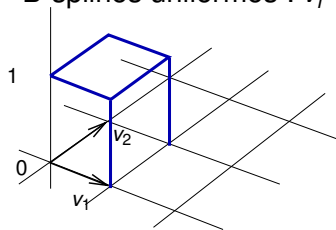
$$B(t|v_1 v_2) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [v_1, v_2][0, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$B(t|v_1 v_2 \dots v_k) := \int_0^1 B(t - \tau v_k | v_1 \dots v_{k-1}) d\tau$$

$B(x|v_1 \dots v_k)$  est de continuité  $C^r$  si tout sous-ensemble de  $\{v_1, \dots, v_k\}$  obtenu en enlevant  $r + 1$  directions est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

# Box-splines surfaciques pour la subdivision

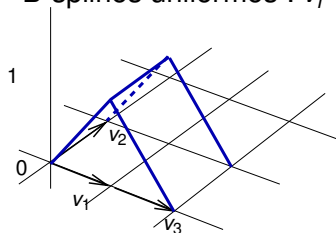
B-splines uniformes :  $v_i \in \{e_1, e_2\}$



1	1
1	1

# Box-splines surfaciques pour la subdivision

B-splines uniformes :  $v_i \in \{e_1, e_2\}$

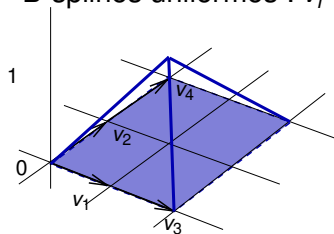


$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \end{array}$$



# Box-splines surfaciques pour la subdivision

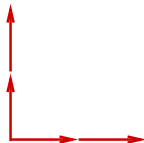
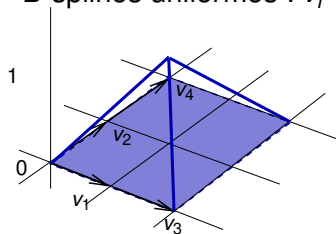
B-splines uniformes :  $v_i \in \{e_1, e_2\}$



$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

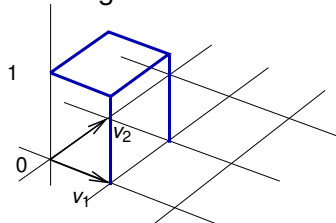
# Box-splines surfaciques pour la subdivision

B-splines uniformes :  $v_i \in \{e_1, e_2\}$



$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

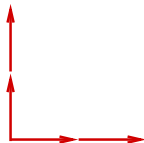
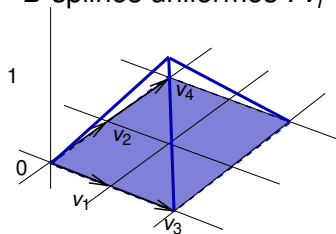
Maillage de contrôle triangulaire :  $v_i \in \{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

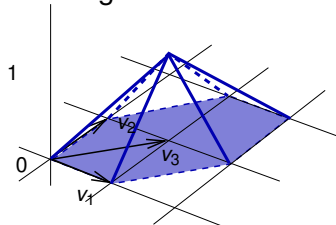
# Box-splines surfaciques pour la subdivision

B-splines uniformes :  $v_i \in \{e_1, e_2\}$



$$\frac{1}{4} \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

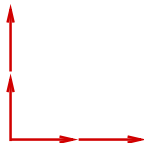
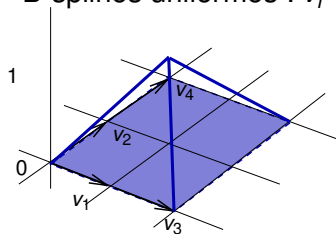
Maillage de contrôle triangulaire :  $v_i \in \{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$



$$\frac{1}{2} \begin{matrix} & & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 1 & \end{matrix}$$

# Box-splines surfaciques pour la subdivision

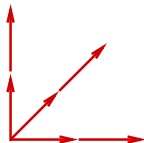
B-splines uniformes :  $v_i \in \{e_1, e_2\}$



$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Maillage de contrôle triangulaire :  $v_i \in \{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$

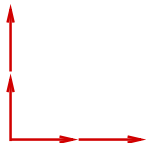
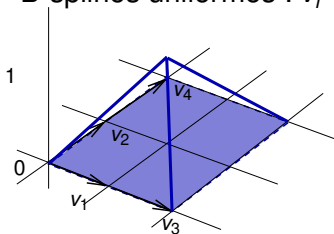
Schéma de Loop  
 $C^2$



$$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 2 & 6 & 6 & 2 \\ & & 1 & 6 & 10 & 6 & 1 \\ & 1 & 6 & 10 & 6 & 2 \\ & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

# Box-splines surfaciques pour la subdivision

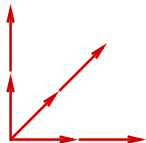
B-splines uniformes :  $v_i \in \{e_1, e_2\}$



$$\frac{1}{4} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}$$

Maillage de contrôle triangulaire :  $v_i \in \{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$

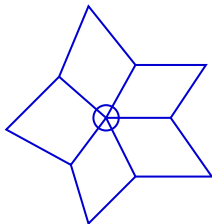
Schéma de Loop  
 $C^2$



$$\frac{1}{16} \begin{array}{ccccc} & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 2 & 6 & 6 & 2 \\ & & & & 1 & 6 & 10 & 6 & 1 \\ & & & & 2 & 6 & 6 & 2 \\ & & & & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

# Maillage non régulier

- Subdivision topologique : possible
- Subdivision géométrique : comment appliquer les masques ?

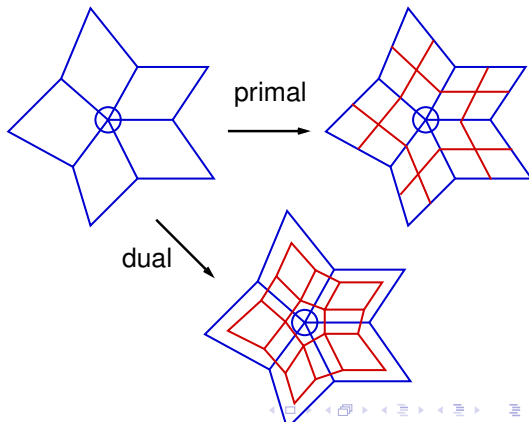


sommet de  
valence 5

# Maillage non régulier

- Subdivision topologique : possible
- Subdivision géométrique : comment appliquer les masques ?

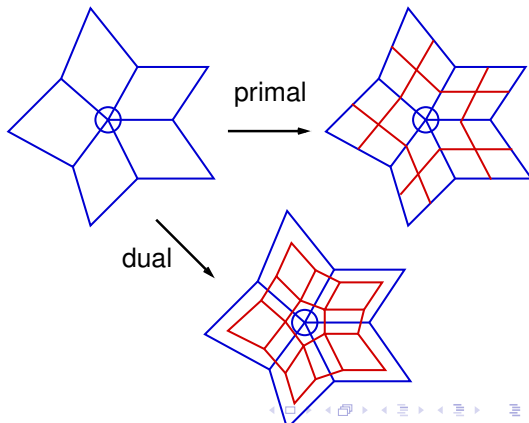
sommet de  
valence 5



# Maillage non régulier

- Subdivision topologique : possible
- Subdivision géométrique : comment appliquer les masques ?

sommet de  
valence 5





# Plan

- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
  - Exemples historiques
  - B-splines
  - Généralisation I : autre masque
  - Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
  - Box-splines surfaciques
  - Etude au voisinage d'un sommet extraordinaire
  - Exemples de *tuning*
  - Généralisations
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions
  - Synthèse Multirésolution sans détails
  - Prédicteur dans un Schéma *Lifting*

# Historique

- **[Catmull et Clark, 1978]** règles extraordinaires pour B-spline bicubique ( $4e_1, 4e_2$ ), et B-spline biquadratique ( $3e_1, 3e_2$ )
- **[Doo et Sabin, 1978]** étude du comportement autour du SE des schémas précédents  $\Rightarrow$  meilleures règles pour le bi-quadratique : 1er *tuning*
- **[Ball et Storry, 1988]** conditions nécessaires pour convergence des normales : pas tout à fait  $C^1$  encore !
- **[Reif, 1995]** le bon formalisme fondé sur la géométrie différentielle : CNS pour convergence vers  $C^1$
- **[Prautzsch, 1998]** et **[Zorin, 2000]** indépendamment CNS pour convergence vers  $C^k$

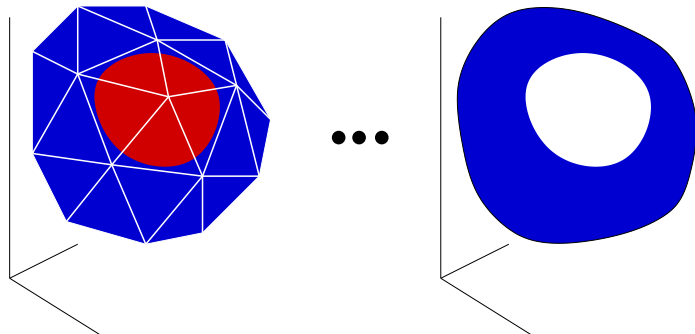
# Historique

- **[Catmull et Clark, 1978]** règles extraordinaires pour B-spline bicubique ( $4e_1, 4e_2$ ), et B-spline biquadratique ( $3e_1, 3e_2$ )
- **[Doo et Sabin, 1978]** étude du comportement autour du SE des schémas précédents  $\Rightarrow$  meilleures règles pour le bi-quadratique : 1er *tuning*
- **[Ball et Storry, 1988]** conditions nécessaires pour convergence des normales : pas tout à fait  $C^1$  encore !
- **[Reif, 1995]** le bon formalisme fondé sur la géométrie différentielle : CNS pour convergence vers  $C^1$
- **[Prautzsch, 1998]** et **[Zorin, 2000]** indépendamment CNS pour convergence vers  $C^k$

# Historique

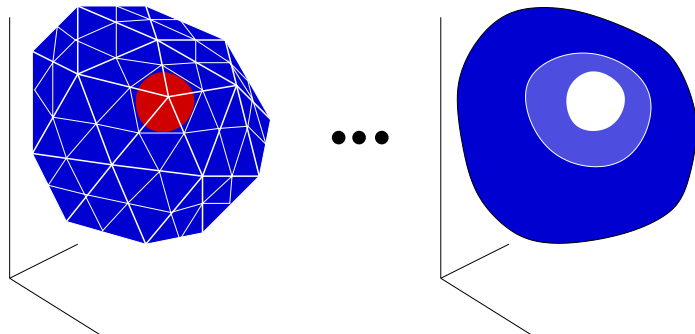
- **[Catmull et Clark, 1978]** règles extraordinaires pour B-spline bicubique ( $4e_1, 4e_2$ ), et B-spline biquadratique ( $3e_1, 3e_2$ )
- **[Doo et Sabin, 1978]** étude du comportement autour du SE des schémas précédents  $\Rightarrow$  meilleures règles pour le bi-quadratique : 1er *tuning*
- **[Ball et Storry, 1988]** conditions nécessaires pour convergence des normales : pas tout à fait  $C^1$  encore !
- **[Reif, 1995]** le bon formalisme fondé sur la géométrie différentielle : CNS pour convergence vers  $C^1$
- **[Prautzsch, 1998]** et **[Zorin, 2000]** indépendamment CNS pour convergence vers  $C^k$

# Convergence $C^k$ : idée générale



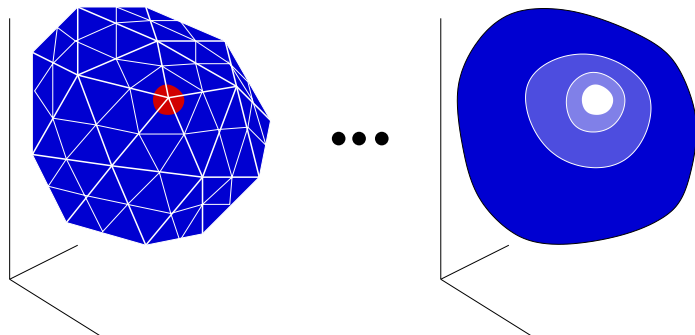
- des **anneaux réguliers** imbriqués réduisant à chaque itération la **zone irrégulière**
- développement de Taylor à l'ordre  $k + 1$  d'une paramétrisation de la surface limite au voisinage du SE

# Convergence $C^k$ : idée générale



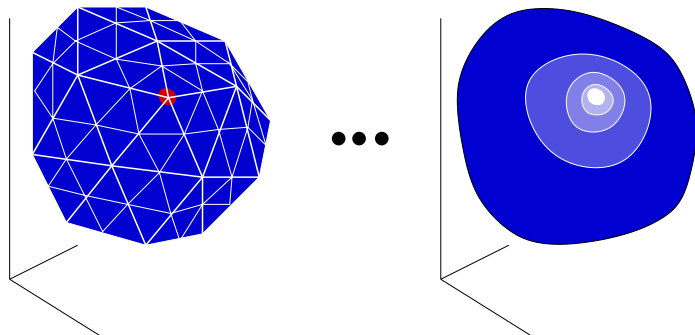
- des **anneaux réguliers** imbriqués réduisant à chaque itération la **zone irrégulière**
- développement de Taylor à l'ordre  $k + 1$  d'une paramétrisation de la surface limite au voisinage du SE

# Convergence $C^k$ : idée générale



- des **anneaux réguliers** imbriqués réduisant à chaque itération la **zone irrégulière**
- développement de Taylor à l'ordre  $k + 1$  d'une paramétrisation de la surface limite au voisinage du SE

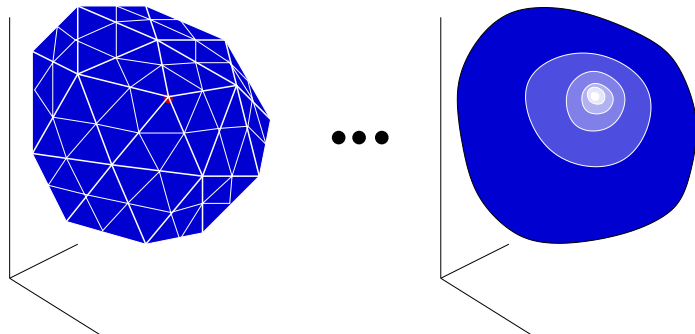
# Convergence $C^k$ : idée générale



- des **anneaux réguliers** imbriqués réduisant à chaque itération la **zone irrégulière**
- développement de Taylor à l'ordre  $k + 1$  d'une paramétrisation de la surface limite au voisinage du SE

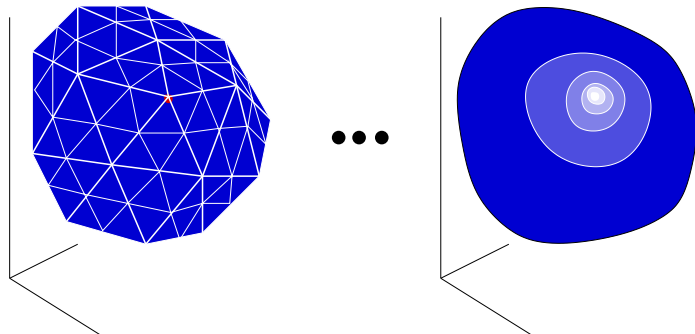


# Convergence $C^k$ : idée générale



- des **anneaux réguliers** imbriqués réduisant à chaque itération la **zone irrégulière**
- développement de Taylor à l'ordre  $k + 1$  d'une paramétrisation de la surface limite au voisinage du SE

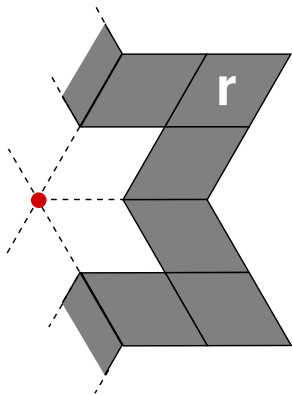
# Convergence $C^k$ : idée générale



- des **anneaux réguliers** imbriqués réduisant à chaque itération la **zone irrégulière**
- développement de Taylor à l'ordre  $k + 1$  d'une paramétrisation de la surface limite au voisinage du SE

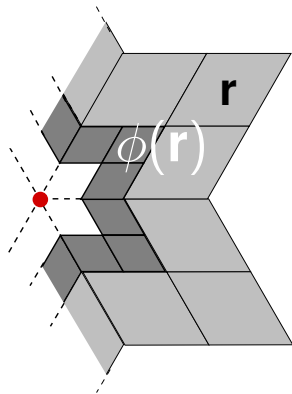
# Convergence $C^k$ : CNS théorique

- $\mathcal{R}$  espace linéaire de fonctions réelles  $C^k$ -continues définies sur  $\Omega = 3n \times [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- $\phi$  application linéaire sur  $\mathcal{R}$  telle que tout  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}^3$  et  $\phi(\mathbf{r})$  se joignent continûment



# Convergence $C^k$ : CNS théorique

- $\mathcal{R}$  espace linéaire de fonctions réelles  $C^k$ -continues définies sur  $\Omega = 3n \times [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- $\phi$  application linéaire sur  $\mathcal{R}$  telle que tout  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}^3$  et  $\phi(\mathbf{r})$  se joignent continûment



# Convergence $C^k$ : CNS théorique

**Valeurs propres de  $\phi$  :**  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots$

**Fonctions propres de  $\phi$  :**  $\phi \mathbf{f}_i = \lambda_i \mathbf{f}_i$

$C^0$  : les anneaux convergent vers une constante

$\lambda_0 = 1 > \lambda_1$  et  $\phi^q(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{f}_0 \rho(\mathbf{r})$

$C^1$  : **(carte caractéristique)**

$\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3$  et  $\mathbf{x} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$  régulière et injective

$C^k$  : développement de Taylor à l'ordre  $k + 1$  d'une paramétrisation sur  $\mathbf{x}$

- soit  $\lambda_j < \lambda_2^k$  ;
- soit  $\lambda_i$  a mêmes multiplicités algébriques et géométriques, et  $\mathbf{f}_i \in \text{span} \left\{ \mathbf{f}_1^\alpha \mathbf{f}_2^\beta \mid \lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta = \lambda_i, (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \right\}$

# Convergence $C^k$ : CNS théorique

**Valeurs propres de  $\phi$  :**  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots$

**Fonctions propres de  $\phi$  :**  $\phi \mathbf{f}_i = \lambda_i \mathbf{f}_i$

$C^0$  : les anneaux convergent vers une constante

$\lambda_0 = 1 > \lambda_1$  et  $\phi^q(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{f}_0 \rho(\mathbf{r})$

$C^1$  : (carte caractéristique)

$\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3$  et  $\mathbf{x} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$  régulière et injective

$C^k$  : développement de Taylor à l'ordre  $k + 1$  d'une paramétrisation sur  $\mathbf{x}$

- soit  $\lambda_j < \lambda_2^k$  ;
- soit  $\lambda_i$  a mêmes multiplicités algébriques et géométriques, et  $\mathbf{f}_i \in \text{span} \left\{ \mathbf{f}_1^\alpha \mathbf{f}_2^\beta \mid \lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta = \lambda_i, (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \right\}$

# Convergence $C^k$ : CNS théorique

Valeurs propres de  $\phi$  :  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots$

Fonctions propres de  $\phi$  :  $\phi \mathbf{f}_i = \lambda_i \mathbf{f}_i$

$C^0$  : les anneaux convergent vers une constante

$\lambda_0 = 1 > \lambda_1$  et  $\phi^q(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{f}_0 \rho(\mathbf{r})$

$C^1$  : (carte caractéristique)

$\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3$  et  $\mathbf{x} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$  régulière et injective

$C^k$  : développement de Taylor à l'ordre  $k + 1$  d'une paramétrisation sur  $\mathbf{x}$

- soit  $\lambda_i < \lambda_2^k$  ;
- soit  $\lambda_i$  a mêmes multiplicités algébriques et géométriques, et  $\mathbf{f}_i \in \text{span} \left\{ \mathbf{f}_1^\alpha \mathbf{f}_2^\beta \mid \lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta = \lambda_i, (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \right\}$

# Convergence $C^k$ : CNS théorique

**Valeurs propres** de  $\phi$  :  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots$

**Fonctions propres** de  $\phi$  :  $\phi \mathbf{f}_i = \lambda_i \mathbf{f}_i$

$C^0$  : les anneaux convergent vers une constante

$\lambda_0 = 1 > \lambda_1$  et  $\phi^q(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{f}_0 \rho(\mathbf{r})$

$C^1$  : (**carte caractéristique**)

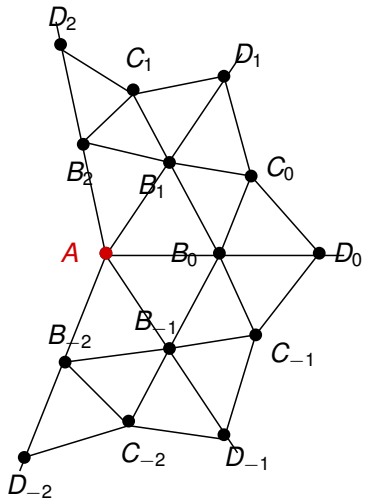
$\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3$  et  $\mathbf{x} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$  régulière et injective

$C^k$  : développement de Taylor à l'ordre  $k + 1$  d'une paramétrisation sur  $\mathbf{x}$

- soit  $\lambda_j < \lambda_2^k$  ;
- soit  $\lambda_i$  a mêmes multiplicités algébriques et géométriques, et  $\mathbf{f}_i \in \text{span} \left\{ \mathbf{f}_1^\alpha \mathbf{f}_2^\beta \mid \lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta = \lambda_i, (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \right\}$

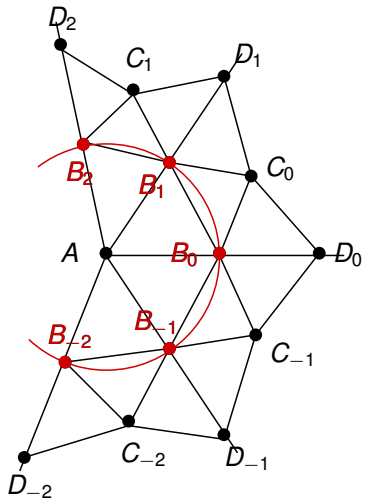


# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire


 $\mathbf{P}(q) =$ 

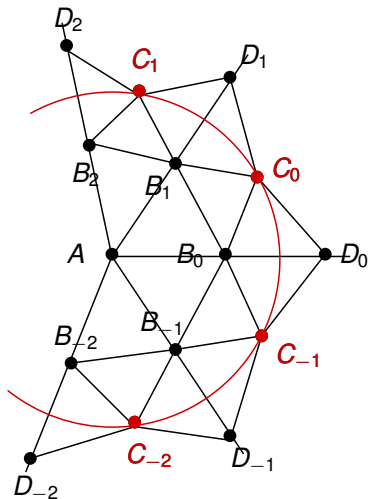
$$\begin{bmatrix} A^{(q)} \\ B_1^{(q)} \\ \vdots \\ B_n^{(q)} \\ C_1^{(q)} \\ \vdots \\ C_n^{(q)} \\ D_1^{(q)} \\ \vdots \\ D_n^{(q)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire


 $\mathbf{P}(q) =$ 

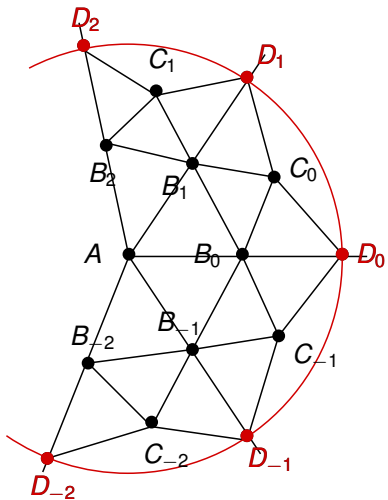
$$\begin{bmatrix} A^{(q)} \\ B_1^{(q)} \\ \vdots \\ B_n^{(q)} \\ C_1^{(q)} \\ \vdots \\ C_n^{(q)} \\ D_1^{(q)} \\ \vdots \\ D_n^{(q)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire


 $\mathbf{P}(q) =$ 

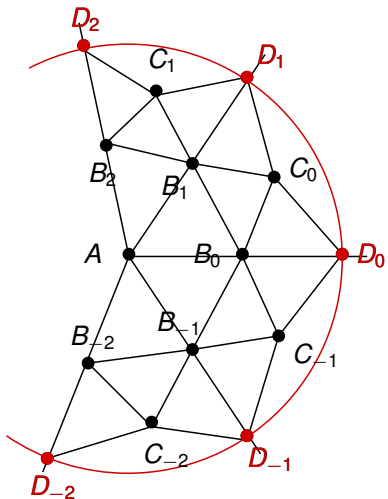
$$\begin{bmatrix} A^{(q)} \\ B_1^{(q)} \\ \vdots \\ B_n^{(q)} \\ C_1^{(q)} \\ \vdots \\ C_n^{(q)} \\ D_1^{(q)} \\ \vdots \\ D_n^{(q)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire


 $\mathbf{P}(q) =$ 

$$\begin{bmatrix} A^{(q)} \\ B_1^{(q)} \\ \vdots \\ B_n^{(q)} \\ C_1^{(q)} \\ \vdots \\ C_n^{(q)} \\ D_1^{(q)} \\ \vdots \\ D_n^{(q)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire

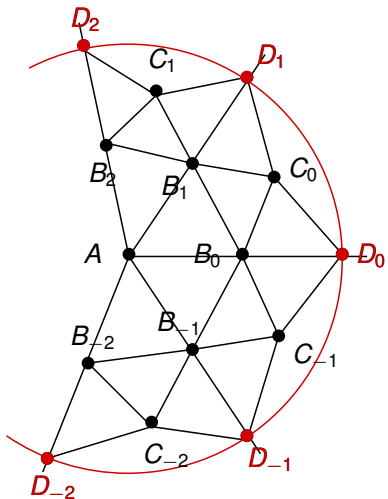

 $\mathbf{P}^{(q)} =$ 

$$\begin{bmatrix} A^{(q)} \\ B_1^{(q)} \\ \vdots \\ B_n^{(q)} \\ C_1^{(q)} \\ \vdots \\ C_n^{(q)} \\ D_1^{(q)} \\ \vdots \\ D_n^{(q)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

**Matrice de  
subdivision**

$$\mathbf{P}^{(q)} = \mathbf{M}\mathbf{P}^{(q-1)}$$

# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire



$$\mathbf{P}^{(q)} =$$

$$\begin{bmatrix} A^{(q)} \\ B_1^{(q)} \\ \vdots \\ B_n^{(q)} \\ C_1^{(q)} \\ \vdots \\ C_n^{(q)} \\ D_1^{(q)} \\ \vdots \\ D_n^{(q)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

**Matrice de subdivision**

$$\mathbf{P}^{(q)} = \mathbf{M}\mathbf{P}^{(q-1)}$$

- valeur propre de  $\mathbf{M} = \lambda_i$
- $\mathbf{V}_i$  vecteur propre de  $\mathbf{M}$   
 $\Rightarrow S^\infty \mathbf{V}_i = \mathbf{f}_i$

# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire

Décomposition en éléments propres

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^{-1} \\ \mathbf{M}^q &= \mathbf{V} \Lambda^q \mathbf{V}^{-1} \\ \mathbf{P}^{(q)} &= \sum_i \lambda_i^q w_i \mathbf{V}_i \end{aligned}$$

Discrétisation du développement de Taylor

- $V_0$  : position
- $V_1, V_2$  : plan tangent
- $V_3, V_4, V_5$  : quadratique au-dessus du plan tangent

# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire

## Symétries des règles de subdivision

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} \frac{16W}{W+n} & \frac{16}{W+n} & & & \dots & & \frac{16}{W+n} & 0 & & & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 2 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 6 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots & & & & & \vdots & & & & & & \vdots & & & & \\ 6 & 2 & 0 & \dots & 0 & 2 & 6 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & \dots & & 0 & 2 & 0 & & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 0 & & & \dots & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots & & & & & \vdots & & & & & & \vdots & & & & \\ 2 & 6 & 0 & & \dots & 0 & 6 & 0 & & & \dots & & 0 & 2 & 0 & & \dots & & 0 & 2 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & & \dots & & 0 & 1 & 1 & 0 & & \dots & & & & \dots & & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & & 0 & 0 & 1 & 0 & & \dots & & & & \dots & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots & & & & & \vdots & & & & & & \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 10 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & & & \dots & & 0 & 1 & & & \dots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

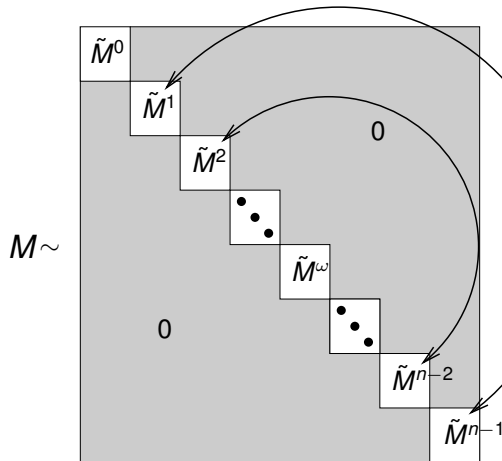


# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire

## Symétries des règles de subdivision

	$\frac{16W}{W+n}$	$\frac{16}{W+n}$		...		$\frac{16}{W+n}$	0	...	0	0	...	0					
	6	6	2	0	...	0	2	0	...	0	0	...	0				
	6	2	6	2	0	...	0	0	...	0	0	...	0				
	⋮				⋮				⋮			⋮					
	6	2	0	...	0	2	6	0	...	0	0	...	0				
$\frac{1}{16}$	2	6	6	0	...	0	0	2	0	...	0	0	...	0			
	2	0	6	6	0	...	0	0	2	0	...	0	0	...	0		
	⋮				⋮				⋮				⋮				
	2	6	0	...	0	6	0	0	...	0	2	0	...	0			
	1	10	1	0	...	0	1	1	0	...	0	1	0	...	0		
	1	1	10	1	0	...	0	1	1	0	...	0	0	1	0	...	0
	⋮				⋮				⋮				⋮				
	1	1	0	...	0	1	10	0	...	0	1	1	0	...	0	1	

# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire



- $\lambda_j$  valeur propre de  $\tilde{M}^\omega$
- intérêt numérique
- chaque cercle  $\{B_i\}$ ,  $\{C_i\}, \dots$  interprété comme un signal discret périodique

# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire

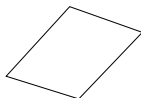
Discrétisation du développement de Taylor

$$\mathbf{P}^{(q)} = \sum_i \lambda_i^q w_i \mathbf{V}_i$$

$V_0$  : position

\*

$V_1, V_2$  : plan  
tangent



$V_3, V_4, V_5$  :  
quadratique

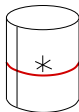


# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire

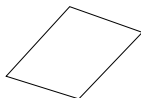
Discrétisation du développement de Taylor

$$\mathbf{P}^{(q)} = \sum_i \lambda_i^q w_i \mathbf{V}_i$$

$V_0$  : position



$V_1, V_2$  : plan  
tangent



$V_3, V_4, V_5$  :  
quadratique

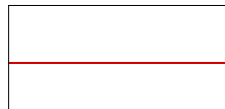
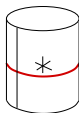


# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire

Discrétisation du développement de Taylor

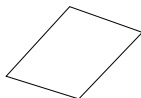
$$\mathbf{P}^{(q)} = \sum_i \lambda_i^q w_i \mathbf{V}_i$$

$V_0$  : position



1 :  $\tilde{M}^0$

$V_1, V_2$  : plan tangent



$V_3, V_4, V_5$  : quadratique

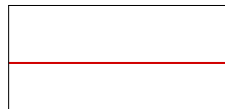
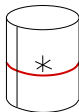


# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire

Discrétisation du développement de Taylor

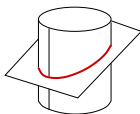
$$\mathbf{P}^{(q)} = \sum_i \lambda_i^q w_i \mathbf{V}_i$$

$V_0$  : position



1 :  $\tilde{M}^0$

$V_1, V_2$  : plan tangent



$V_3, V_4, V_5$  : quadratique

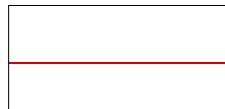
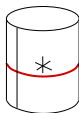


# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire

Discrétisation du développement de Taylor

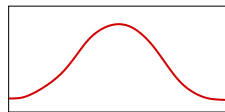
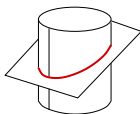
$$\mathbf{P}^{(q)} = \sum_i \lambda_i^q w_i \mathbf{V}_i$$

$V_0$  : position



$1 : \tilde{M}^0$

$V_1, V_2$  : plan tangent



$\lambda : \tilde{M}^1, \tilde{M}^{n-1}$

$V_3, V_4, V_5$  : quadratique

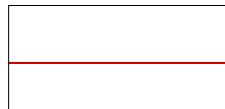
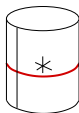


# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire

Discrétisation du développement de Taylor

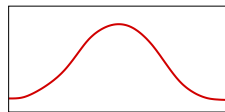
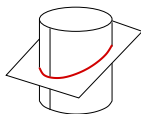
$$\mathbf{P}^{(q)} = \sum_i \lambda_i^q w_i \mathbf{V}_i$$

$V_0$  : position



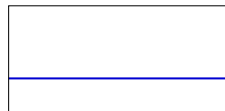
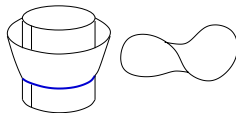
1 :  $\tilde{M}^0$

$V_1, V_2$  : plan tangent



$\lambda$  :  $\tilde{M}^1, \tilde{M}^{n-1}$

$V_3, V_4, V_5$  : quadratique



$\mu_0$  :  $\tilde{M}^0$

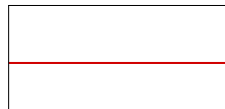
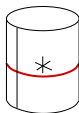


# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire

Discrétisation du développement de Taylor

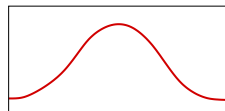
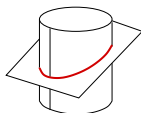
$$\mathbf{P}^{(q)} = \sum_i \lambda_i^q w_i \mathbf{V}_i$$

$V_0$  : position



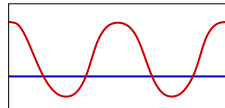
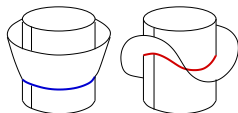
1 :  $\tilde{M}^0$

$V_1, V_2$  : plan tangent



$\lambda$  :  $\tilde{M}^1, \tilde{M}^{n-1}$

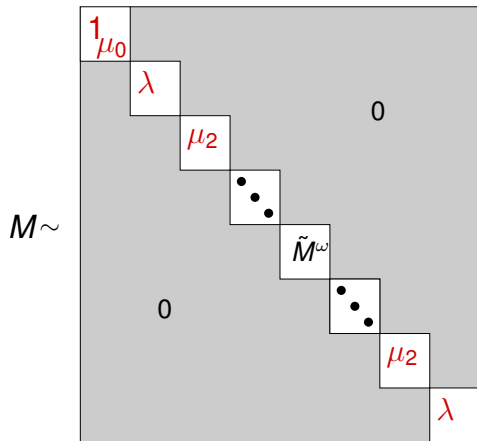
$V_3, V_4, V_5$  : quadratique



$\mu_0$  :  $\tilde{M}^0$

$\mu_2$  :  $\tilde{M}^2, \tilde{M}^{n-2}$

# Convergence $C^k$ : en pratique, condition nécessaire



Conditions nécessaires pour  $C^2$

- $1 > \lambda$
- $\mu_0 = \mu_2 = \lambda^2$
- $\mu_0 > \mu$

# Plan

- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
  - Exemples historiques
  - B-splines
  - Généralisation I : autre masque
  - Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
  - Box-splines surfaciques
  - Etude au voisinage d'un sommet extraordinaire
  - Exemples de *tuning*
  - Généralisations
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions
  - Synthèse Multirésolution sans détails
  - Prédicteur dans un Schéma *Lifting*

# Rétro-conception

## Principe

construire  $\mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$  à partir de  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{\Lambda}$  ad hoc

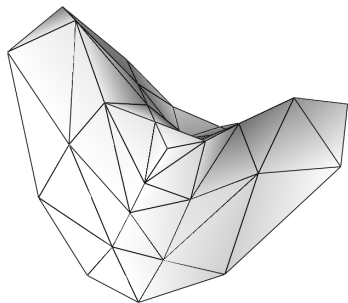
## [Prautzsch, 1998]

- stencil du SE uniquement
- $\mu_0 = \mu_2 < \lambda^2$
- artefact : plat

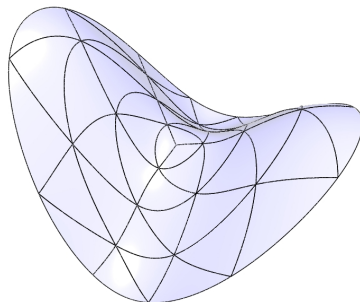
## [G. et al, 2010]

- plus de stencils
- $\mu_0 = \mu_2 = \lambda^2$  (ronds dans l'eau)
- $\mu_2 \neq \mu_0 = \lambda^2$  (par mélange de règles)

# Rétro-conception [G. et al, 2010]



Maillage original



Surface subdivisée

# Rétro-conception [G. et al, 2010]

## Surfaces limites

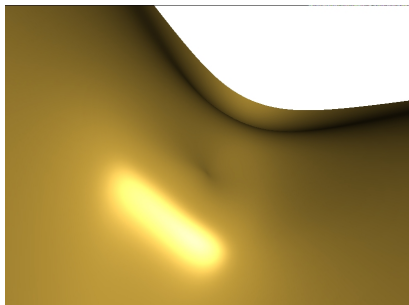
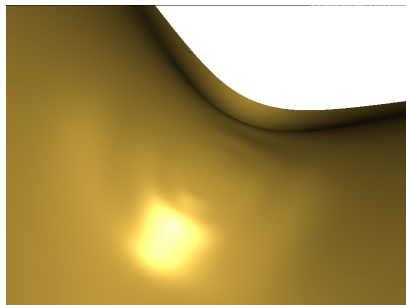


Schéma de Loop



Rétro-conception

# Rétro-conception [G. et al, 2010]

## Surfaces limites

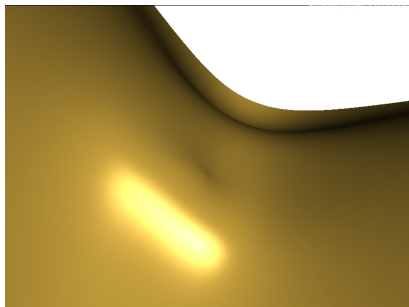
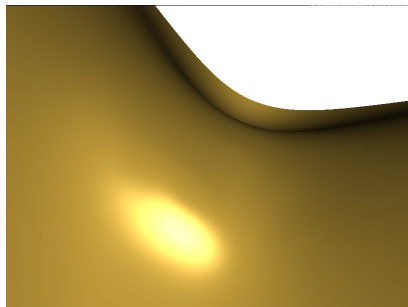


Schéma de Loop



Rétro-conception + mélange

# Rétro-conception [G. et al, 2010]

Courbure gaussienne (**positive**, **négative**)

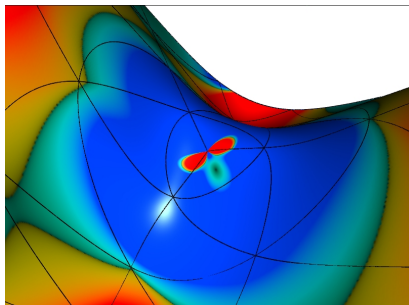
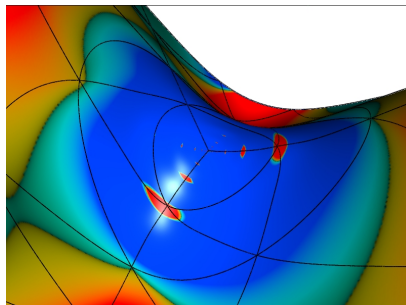


Schéma de Loop



Rétro-conception



# Rétro-conception [G. et al, 2010]

Courbure gaussienne (**positive**, **négative**)

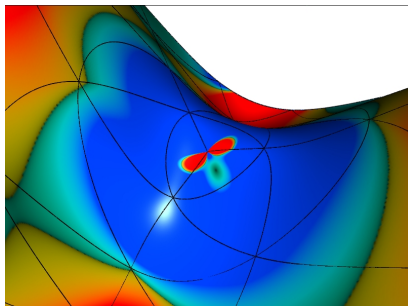
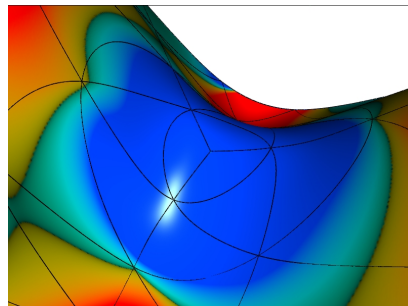


Schéma de Loop



Rétro-conception + mélange

# Rétro-conception [G. et al, 2010]

## Isophotes

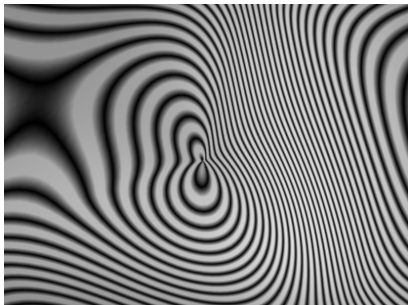
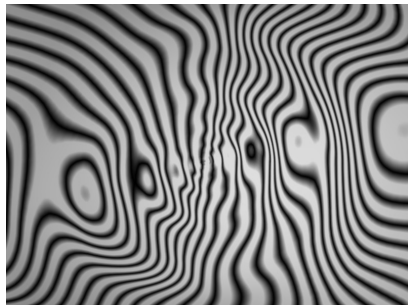


Schéma de Loop



Rétro-conception

# Rétro-conception [G. et al, 2010]

## Isophotes

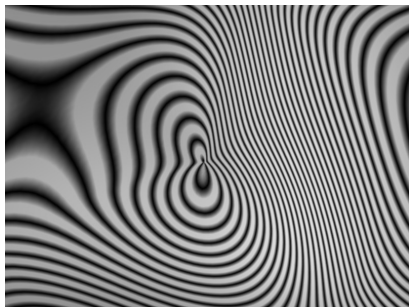
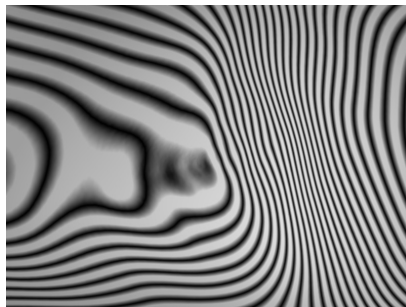


Schéma de Loop



Rétro-conception + mélange

# Optimisation

## Principe

- exprimer valeurs et vecteurs propres comme fonctions des entrées des stencils/masque
- minimiser une énergie dépendant de ces valeurs

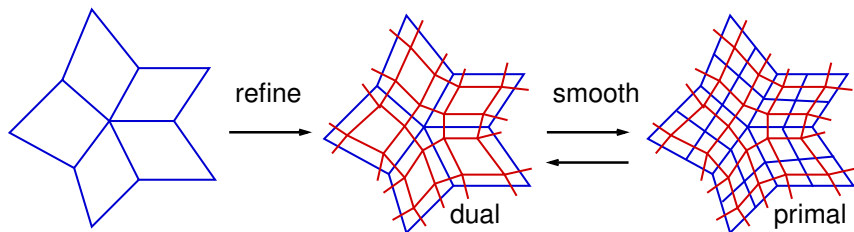
## [Barthe et Kobbelt, 2004]

objectif : se rapprocher des conditions nécessaires

## [Augsdörfer et al., 2006]

objectif : minimiser des variations de courbure

# Généraliser le *refine-and-smooth* de Riesenfeld



[Zorin et Schröder, 2001]

- étape smooth : calcul de barycentre
- $C^1$  aux sommets extraordinaires

## S'éloigner du cadre

non-stationnaire [Ginkel et Umlauf, 2006]

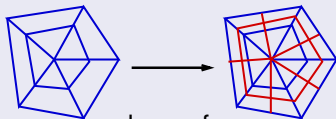
modifier régulièrement le polyèdre de contrôle au fil des itérations afin d'éviter des voisinages *hybrides*

Guider la position des nouv. sommets avec une autre surface

[Levin, 2006] par un mélange

[Karciauskas et Peters, 2007] en échantillonnant la surface guide

Changer la connectivité [Myles et Peters, 2009]



polar surface

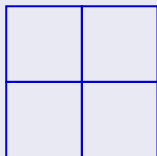
$C^2$  aux sommets  
extraordinaires

# Plan

- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
  - Exemples historiques
  - B-splines
  - Généralisation I : autre masque
  - Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
  - Box-splines surfaciques
  - Etude au voisinage d'un sommet extraordinaire
  - Exemples de *tuning*
  - Généralisations
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions
  - Synthèse Multirésolution sans détails
  - Prédicteur dans un Schéma *Lifting*

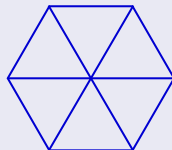
## Autre subdivision topologique

### 4-8 scheme [Velho et Zorin, 2001]



- $C^4, C^1$  aux sommets extraordinaires
- 2 étapes  $\Leftrightarrow B(x|e_1, e_1, e_2, e_2, e_1 + e_2, e_1 + e_2, e_2 - e_1, e_2 - e_1)$

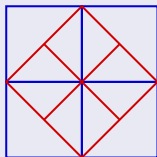
### $\sqrt{3}$ scheme [Kobbelt, 2000]





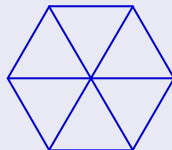
# Autre subdivision topologique

## 4-8 scheme [Velho et Zorin, 2001]



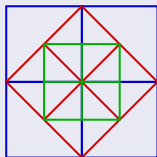
- $C^4$ ,  $C^1$  aux sommets extraordinaires
- 2 étapes  $\Leftrightarrow B(x|e_1, e_1, e_2, e_2, e_1 + e_2, e_1 + e_2, e_2 - e_1, e_2 - e_1)$

## $\sqrt{3}$ scheme [Kobbelt, 2000]



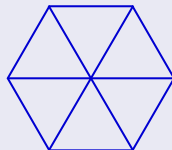
# Autre subdivision topologique

## 4-8 scheme [Velho et Zorin, 2001]



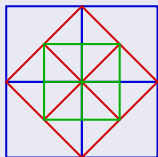
- $C^4, C^1$  aux sommets extraordinaires
- 2 étapes  $\Leftrightarrow B(x|e_1, e_1, e_2, e_2, e_1 + e_2, e_1 + e_2, e_2 - e_1, e_2 - e_1)$

## $\sqrt{3}$ scheme [Kobbelt, 2000]



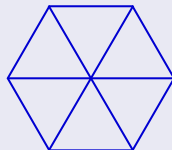
# Autre subdivision topologique

## 4-8 scheme [Velho et Zorin, 2001]



- $C^4$ ,  $C^1$  aux sommets extraordinaires
- 2 étapes  $\Leftrightarrow B(x|e_1, e_1, e_2, e_2, e_1 + e_2, e_1 + e_2, e_2 - e_1, e_2 - e_1)$

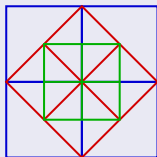
## $\sqrt{3}$ scheme [Kobbelt, 2000]



- $C^2$ ,  $C^1$  aux sommets extraordinaires
- 2 étapes  $\Leftrightarrow$  subdivision ternaire

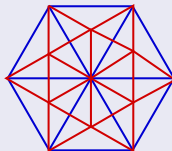
# Autre subdivision topologique

## 4-8 scheme [Velho et Zorin, 2001]



- $C^4, C^1$  aux sommets extraordinaires
- 2 étapes  $\Leftrightarrow B(x|e_1, e_1, e_2, e_2, e_1 + e_2, e_1 + e_2, e_2 - e_1, e_2 - e_1)$

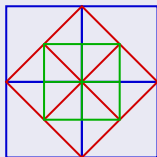
## $\sqrt{3}$ scheme [Kobbelt, 2000]



- $C^2, C^1$  aux sommets extraordinaires
- 2 étapes  $\Leftrightarrow$  subdivision ternaire

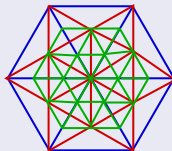
# Autre subdivision topologique

## 4-8 scheme [Velho et Zorin, 2001]



- $C^4$ ,  $C^1$  aux sommets extraordinaires
- 2 étapes  $\Leftrightarrow B(x|e_1, e_1, e_2, e_2, e_1 + e_2, e_1 + e_2, e_2 - e_1, e_2 - e_1)$

## $\sqrt{3}$ scheme [Kobbelt, 2000]

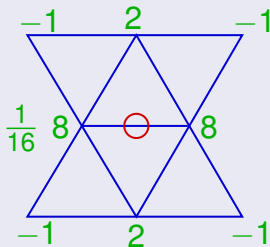


- $C^2$ ,  $C^1$  aux sommets extraordinaires
- 2 étapes  $\Leftrightarrow$  subdivision ternaire

# Subdivision interpolante

## Butterfly scheme [Dyn et al., 1990]

stencil des  
sommets d'arêtes



- pas de problème pour les sommets extraordinaires
- $C^1$

# Plan

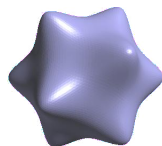
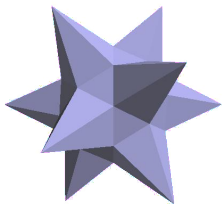
- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
  - Exemples historiques
  - B-splines
  - Généralisation I : autre masque
  - Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
  - Box-splines surfaciques
  - Etude au voisinage d'un sommet extraordinaire
  - Exemples de *tuning*
  - Généralisations
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions
  - Synthèse Multirésolution sans détails
  - Prédicteur dans un Schéma *Lifting*

# Plan

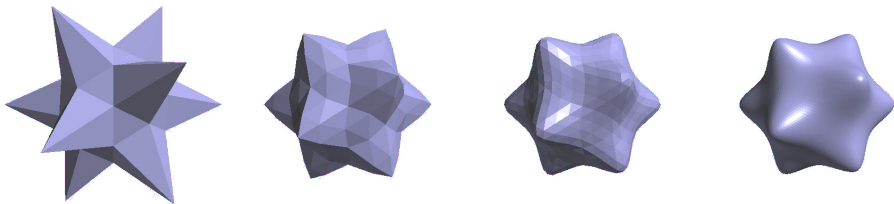
- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
  - Exemples historiques
  - B-splines
  - Généralisation I : autre masque
  - Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
  - Box-splines surfaciques
  - Etude au voisinage d'un sommet extraordinaire
  - Exemples de *tuning*
  - Généralisations
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions
  - Synthèse Multirésolution sans détails
  - Prédicteur dans un Schéma *Lifting*



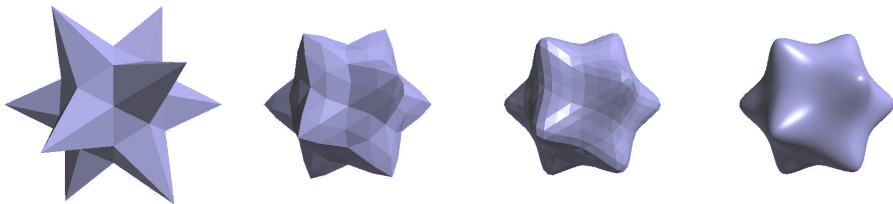
# Multiples résolutions de basses fréquences



# Multiples résolutions de basses fréquences



# Multiples résolutions de basses fréquences



Pour modéliser des hautes fréquences :

- ajouter des détails
- est-ce une synthèse multirésolution ?
- si l'on peut construire une analyse...

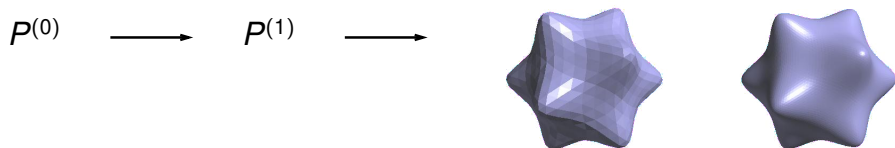
# Multiples résolutions de basses fréquences

 $P^{(0)}$ 

Pour modéliser des hautes fréquences :

- ajouter des détails
- est-ce une synthèse multirésolution ?
- si l'on peut construire une analyse...

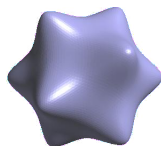
# Multiples résolutions de basses fréquences



Pour modéliser des hautes fréquences :

- ajouter des détails
- est-ce une synthèse multirésolution ?
- si l'on peut construire une analyse...

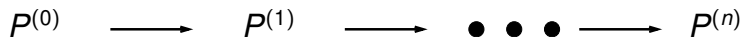
# Multiples résolutions de basses fréquences



Pour modéliser des hautes fréquences :

- ajouter des détails
- est-ce une synthèse multirésolution ?
- si l'on peut construire une analyse...

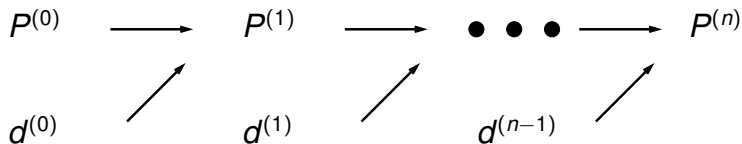
# Multiples résolutions de basses fréquences



Pour modéliser des hautes fréquences :

- ajouter des détails
- est-ce une synthèse multirésolution ?
- si l'on peut construire une analyse...

# Multiples résolutions de basses fréquences

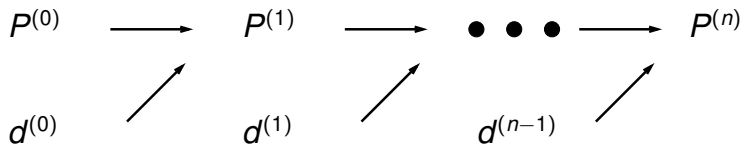


Pour modéliser des hautes fréquences :

- ajouter des détails
- est-ce une synthèse multirésolution ?
- si l'on peut construire une analyse...



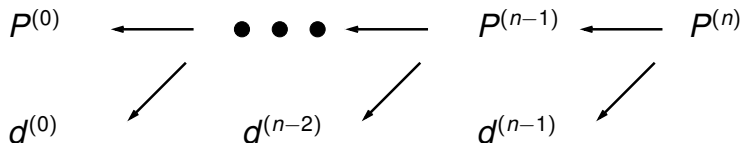
# Multiples résolutions de basses fréquences



Pour modéliser des hautes fréquences :

- ajouter des détails
- est-ce une synthèse multirésolution ?
- si l'on peut construire une analyse...

# Multiples résolutions de basses fréquences



Pour modéliser des hautes fréquences :

- ajouter des détails
- est-ce une synthèse multirésolution ?
- si l'on peut construire une analyse...

# Plan

- 1 Un lien algorithmique entre discret et continu
  - Exemples historiques
  - B-splines
  - Généralisation I : autre masque
  - Généralisation II : non-stationnaire, non-uniforme
- 2 Un outil pour généraliser les Box-splines aux polyèdres de contrôle quelconque
  - Box-splines surfaciques
  - Etude au voisinage d'un sommet extraordinaire
  - Exemples de *tuning*
  - Généralisations
- 3 Un outil pour construire de multiples résolutions
  - Synthèse Multirésolution sans détails
  - Prédicteur dans un Schéma *Lifting*

# Schéma *Lifting*

## Origines

[Sweldens, 1994] après les travaux de  
[Lounsbery, 1994] sur l'anal. multires. sur les maillages quelc.  
[Donoho, 1992] sur les transf. en ondelettes interpolantes

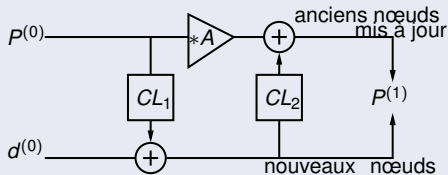
## Principe

modélisation particulière d'une transformée en ondelettes qui :

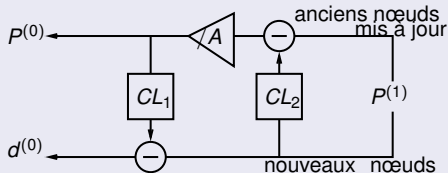
- construit des **ondelettes de 2ème génération**  
(connectivité non régulière, nœuds non uniformes ...)
- la construction se fait dans le **domaine spatial** (et non fréquentiel)
- **calculs en place** : efficace (même pour ondelettes de 1ère génération)

# Schéma *Lifting*

## Synthèse



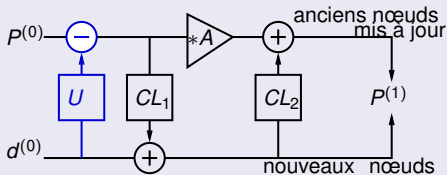
## Analyse



On peut construire ainsi notre propre schéma en ajoutant des éléments à notre guise.

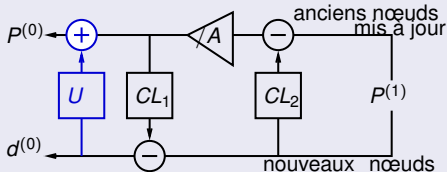
# Schéma *Lifting*

## Synthèse



On peut construire ainsi notre propre schéma en ajoutant des éléments à notre guise.

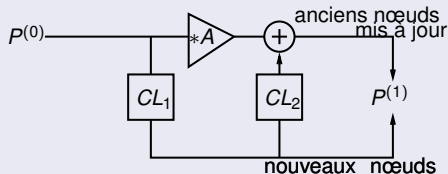
## Analyse



Exemple : [mise-à-jour](#) pour conserver la moyenne entre anciens et nouveaux coeff.

# Subdivision : prédicteur pour Schéma *Lifting*

## Condition sur le stencil du sommet extraordinaire

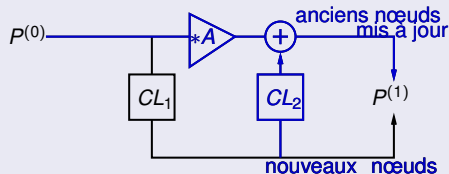


## Est-ce possible ?

- interpolant :  $A = 1$ ,  $CL_2 = 0$
- non-interpolant : non en toute généralité, mais les classiques oui (Loop, Catmull-Clark ...)

# Subdivision : prédicteur pour Schéma *Lifting*

## Condition sur le stencil du sommet extraordinaire



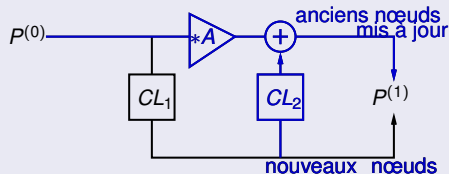
## Est-ce possible ?

- interpolant :  $A = 1$ ,  $CL_2 = 0$
- non-interpolant : non en toute généralité, mais les classiques oui (Loop, Catmull-Clark ...)



# Subdivision : prédicteur pour Schéma *Lifting*

## Condition sur le stencil du sommet extraordinaire



## Est-ce possible ?

- interpolant :  $A = 1$ ,  $CL_2 = 0$
- non-interpolant : non en toute généralité, mais les classiques oui (Loop, Catmull-Clark ...)

# Conclusion

## Comment construire un schéma de subdivision ?

- Recette Box-spline (formalisme flèches)
- Conditions suffisantes pour convergence pour zones régulières (schéma aux différences contractant)
- Conditions nécessaires pour voisinage d'un sommet extraordinaire (analyse des éléments propres de la matrice de subdivision)
- Conditions pour l'utiliser comme prédicteur pour ondelettes de 2ème génération

# Conclusion

## Actualités de la recherche

- tuning (encore un peu)
- schémas NON (linéaires, stationnaires, uniformes...)
- en particulier pour analyse en ondelettes (pour compression d'images ...)

# Ouvrages de référence



J. Warren, H. Weimer.  
Subdivision Methods for Geometric Design.  
Morgan Kaufmann, 2002.



G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim.  
Handbook of Computer Aided Geometric Design  
Elsevier, 2002.



C. de Boor, K. Höllig, S. Riemenschneider.  
Box Splines  
Springer-Verlag, 1993.



A. S. Caravetta, W. Dahmen, C. A. Micchelli.  
Stationary Subdivision  
Memoirs of the AMS, n.453, 1991.



J. Peters, U. Reif.  
Subdivision Surfaces  
Springer-Verlag, 2008.

## Articles cités (1/6)



U. H. Augsdörfer, N. A. Dodgson, M. A. Sabin.

Tuning subdivision by minimising Gaussian curvature variation near extraordinary vertices.

Computer Graphics Forum, 25(3) :263-272, 2006.



A. A. Ball, J. D. T. Storry.

Conditions for tangent plane continuity over recursively generated B-spline surfaces.

ACM Trans. on Graphics, 7(2) :83-102, 1988.



L. Barthe, L. Kobbelt.

Subdivision scheme tuning around extraordinary vertices.

Computer Aided Geometric Design, 21(6) :561-583, 2004.



C. de Boor.

Cutting corners always works.

Computer Aided Geometric Design, 4(1) :125-131, 1987.



T. J. Cashman, N. A. Dodgson, M. A. Sabin.

A symmetric, non-uniform, refine and smooth subdivision algorithm for general degree B-splines.

Computer Aided Geometric Design, 26(1) :94-104, 2009.

## Articles cités (2/6)



E. Catmull, J. Clark.

Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes.  
Computer Aided Design, 10(6) :183-188, 1978.



G. M. Chaikin.

An algorithm for high-speed curve generation.  
Computer Graphics and Image Processing, 3(4) :346-349, 1974.



A. Cohen, N. Dyn, B. Matei.

Quasilinear subdivision schemes with applications to ENO interpolation.  
Applied and Computational Harmonic Analysis, 15(2) :89-116, 2003.



D. L. Donoho.

Interpolating wavelet transforms.  
Report, Stanford University, 1992.



D. Doo, M. Sabin.

Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points.  
Computer Aided Design, 10(6) :177-181, 1978.

## Articles cités (3/6)



N. Dyn, D. Levin, J. A. Gregory.

A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design.

Computer Aided Geometric Design, 4(4) :257-268, 1987.



N. Dyn, D. Levin, J. A. Gregory.

A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control.

Computer Aided Geometric Design, 9(2) :160-169, 1990.



N. Dyn, D. Levin.

Analysis of asymptotically equivalent binary subdivision schemes.

J. Mathematical Analysis and Applications, 193 :594-621, 1995.



I. Ginkel, G. Umlauf.

Controlling a subdivision tuning method.

Curves and Surface Fitting, 170-179, 2006.



C. Gérot, F. Destelle, A. Montanvert.

Smoothing the antagonism between extraordinary vertex and ordinary neighbourhood on subdivision surfaces.

MMCS 2008, LNCS 5862 :242-260, 2010.

## Articles cités (4/6)



A. Harten, S. Osher, S. R. Chakravarthy.

Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III.  
Journal of Computational Physics, 71(2) :231-303, 1987.



K. Karčiauskas, J. Peters.

Concentric tessellation maps and curvature continuous guided surfaces.  
Computer Aided Geometric Design, 24(2) :99-111, 2007.



L. Kobbelt.

$\sqrt{3}$ -subdivision.  
ACM SIGGRAPH , 103-112, 2000.



A. Levin.

Modified subdivision surfaces with continuous curvature.  
ACM Transaction on Graphics, 25(3) :1035-1040, 2006.



M. Lounsbery.

Multiresolution analysis of surfaces of arbitrary topological type.  
PhD thesis, University of Washington, 1994.



## Articles cités (5/6)



A. Myles, J. Peters.

Bi-3  $C^2$  polar subdivision.

ACM Transaction on Graphics, 28(3), 2009.



H. Prautzsch.

Smoothness of subdivision surfaces at extraordinary points.

Advances in Computational Mathematics, 9(3) :377-389, 1998.



H. Prautzsch, G. Umlauf.

A  $G^2$  subdivision algorithm.

Computing, 13 :217-224, 1998.



U. Reif.

A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary vertices.

Computer Aided Geometric Design, 12(2) :153-174, 1995.



G. de Rham.

Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane.

Elemente der Mathematik, 2(4) :73-88, 1947.

## Articles cités (6/6)



S. Schaefer, R. Goldman.

Non-uniform subdivision for B-splines of arbitrary degree.

Computer Aided Geometric Design, 26(1) :75-81, 2009.



W. Sweldens.

Construction and applications of wavelets in numerical analysis.

PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 1994.



W. Sweldens, P. Schröder.

Building your own wavelets at home.

Wavelets in Computer Graphics SIGGRAPH Course, 1996.



L. Velho, D. Zorin.

4-8 subdivision.

Computer Aided Geometric Design, 18(5) :397-427, 2001.



D. Zorin.

Smoothness of subdivision on irregular meshes.

Constructive Approximation, 16(3) :359-397, 2000.



D. Zorin, P. Schröder.

A unified framework for primal/dual quadrilateral subdivision schemes.

Computer Aided Geometric Design, 18(5) :429-454, 2001.