Contrôle optimal des systèmes de complémentarité linéaire

Alexandre Vieira

6 juin 2016

Sommaire

Sommaire

Problème étudié

$$
\begin{aligned}
\text{minimiser } & \int_0^T \left(x(t)^\intercal W(t)x(t) + u(t)^\intercal U(t)u(t)\right) dt, \\
\text{tel que } & \dot{x} = Ax + B\lambda + Fu, \\
& 0 \leq \lambda \perp Cx + D\lambda + Eu \geq 0, \\
& \text{Éventuelles CB : } x(0) = x_0,\ x(T) = x_T.
\end{aligned}
$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $\lambda(t) \in \mathbb{R}^q$, $\forall t \in [0, T]$
W, U, A, B, C, D, E, F des matrices de tailles adaptées.

Théorème d'existence

$$\dot{x} = Ax + B\lambda + Fu,$$
$$0 \leq \lambda \perp Cx + D\lambda + Eu \geq 0.$$

Pour que ce système soit complètement contrôlable : $m = q$!

Étude d'un système simplifié $q = m = 1$

$$\begin{aligned} \text{minimiser } & \int_0^T \left(\|x(t)\|^2 + u(t)^2\right) dt, \\ \text{tel que } & \dot{x} = Ax + B\lambda + Fu, \\ & 0 \leq \lambda \perp Cx + d\lambda + eu \geq 0, \\ & \text{Éventuelles CB : } x(0) = x_0,\ x(T) = x_T. \end{aligned}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $\lambda(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0, T]$,
A, B, C, F des matrices de tailles adaptées, d scalaire strictement positif, e scalaire.
Dans ce cas simple

$$\lambda = d^{-1}\Pi_{\mathbb{R}_+}(-Cx - eu)$$

Étude d'un système simplifié $q = m = 1$

$$\begin{aligned} \text{minimiser } & \int_0^T \left(\|x(t)\|^2 + u(t)^2\right) dt, \\ \text{tel que } & \dot{x} = Ax + Fu + Bd^{-1}\Pi_{\mathbb{R}_+}(-Cx - eu), \\ & \text{Éventuelles CB} : x(0) = x_0,\ x(T) = x_T. \end{aligned}$$

Comment trouver une solution optimale ?

Sommaire

Principe dans un cas lisse

$$\begin{aligned} &\text{minimiser } \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt, \\ &\text{tel que } \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \\ &\qquad x(0) \in M_0,\ x(T) \in M_T. \end{aligned}$$

avec $f^0 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{1+n+m}, \mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{1+n+m}, \mathbb{R}^n)$, $M_0, M_T \subseteq \mathbb{R}^n$.

Principe dans un cas lisse

Théorème

Si la commande u associée à la trajectoire x est optimale sur $[0, T]$, alors il existe $p : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ absolument continue, et un réel $p^0 \leq 0$ tels que, pour presque tout t, on vérifie :

1. $(p(\cdot), p^0)$ non trivial
2. $$\dot{x}(t) = \nabla_p H(t, x(t), p(t), p^0, u(t))$$
   $$\dot{p}(t) = -\nabla_x H(t, x(t), p(t), p^0, u(t))$$
   où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$.
3. la condition de maximisation du Hamiltonien :
   $$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v)$$
4. des conditions au bord : $p(0) \in \mathcal{N}_{x(0)} M_0$ et $-p(T) \in \mathcal{N}_{x(T)} M_T$

Un problème aux valeurs limites

Supposons qu'on fixe une condition initiale et qu'on n'impose aucune condition finale :

$$\begin{aligned} \text{minimiser } & \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt, \\ \text{tel que } & \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \\ & x(0) = 0,\ x(T) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

En posant $z(t) = (x(t), p(t))$, on peut réécrire les équations de Pontryagin sous la forme :

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t))$$

Un problème aux valeurs limites

Le principe du maximum impose $p(T) = 0$ (mais rien sur $p(0)$!). On résume les conditions initiales et finales sous la forme

$$R(z(0), z(T)) = 0$$

On obtient donc un problème aux valeurs limites :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)) \\ \quad 0 = R(z(0), z(T)) \end{cases}$$

Méthode de tir

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)),\ z(0) = z_0$$

et posons $G(z_0) = R(z_0, z(t_f, z_0))$.
Ainsi, le problème aux valeurs limites revient à chercher une condition initiale z_0 telle que

$$G(z_0) = 0$$

Principe dans un cas non lisse

$$\text{minimiser } \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt,$$
$$\text{tel que } \dot{x} = f(t, x(t), u(t)),$$
$$x(0) \in M_0, \ x(T) \in M_T.$$

avec f^0 et f sont localement lipschitziennes, $M_0, M_T \subseteq \mathbb{R}^n$.

Définition : Jacobien généralisé

$$\partial g(s) = conv\{\lim Dg(s_i)\}$$

On notera $\partial_s f(x, t)$ le jacobien généralisé de la fonction $s \mapsto f(s, t)$ au point x pour t fixé.

Principe dans un cas non lisse

Théorème

Si la commande u associée à la trajectoire x est optimale sur $[0, T]$, alors il existe $p : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ absolument continue, et un réel $p^0 \leq 0$ tels que, pour presque tout t, on vérifie :

1. $(p(\cdot), p^0)$ non trivial
2. $$-\dot{p}(t) \in \partial_x H(t, x(t), p(t), p^0, u(t))$$
   où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u)\rangle + p^0 f^0(t, x, u)$.
3. la condition de maximisation du Hamiltonien :
   $$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v)$$
4. des conditions au bord : $p(0) \in \mathcal{N}_{x(0)} M_0$ et $-p(T) \in \mathcal{N}_{x(T)} M_T$

Sommaire

Application du théorème à notre exemple

$$
\begin{aligned}
\text{minimiser } & \int_0^T \left(\|x(t)\|^2 + u(t)^2\right) dt, \\
\text{tel que } & \dot{x} = Ax + Fu + Bd^{-1}\Pi_{\mathbb{R}_+}(-Cx - eu), \\
& \text{Éventuelles CB : } x(0) = x_0,\ x(T) = x_T.
\end{aligned}
$$

Application du théorème à notre exemple

(.... Calcul de l'Hamiltonien... du sous-différentiel... Simplification...)

$$-\dot{p}(t) \in \begin{cases} 2p^0 x(t) + A^\intercal p & \text{si } Cx + eu > 0 \\ 2p^0 x(t) + \left(A - \dfrac{BC}{d}\right)^\intercal p(t) & \text{si } Cx + eu < 0 \\ 2p^0 x(t) + \left[\left(A - \dfrac{BC}{d}\right)^\intercal, A^\intercal\right] p(t) & \text{si } Cx + eu = 0 \end{cases}$$

Application du théorème à notre exemple

En notant $z = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$, on arrive à l'inclusion différentielle :

$$\dot{z} \in \begin{pmatrix} f^x(z,u) \\ f^p(z,u) \end{pmatrix} = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} Ax + Fu \\ -2p^0 x - A^\intercal p \end{pmatrix} \right\} & \text{if } Cx + eu > 0 \\ \begin{pmatrix} \left(A - \frac{FC}{e}\right) x \\ -2p^0 x + \left[\frac{C^\intercal B^\intercal}{d} - A^\intercal, -A^\intercal\right] p \end{pmatrix} & \text{if } Cx + eu = 0 \\ \left\{ \begin{pmatrix} \left(A - \frac{CB}{d}\right) x + \left(F - \frac{e}{d} B\right) u \\ -2p^0 x + \left(\frac{C^\intercal B^\intercal}{d} - A^\intercal\right) p \end{pmatrix} \right\} & \text{if } Cx + eu < 0 \end{cases}$$

Application du théorème à notre exemple

(... Encore quelques maniplations... Et des simplifications....)

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -2p^0 I & -A^\intercal \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \frac{C^\intercal B^\intercal}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^x \\ \lambda_1^p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} u = \tilde{A} z + \tilde{B}\Lambda + \tilde{F} u,$$

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda^x & \perp & Cx + d\lambda^x + eu \geq 0 \\ 0 \leq \mu_{x,u} & \perp & \mu_{x,u} - 2(Cx + eu) \geq 0 \\ 0 \leq \mu_p & \perp & \mu_p - 2p \geq 0 \\ 0 \leq \lambda_1^{abs} & \perp & \mu_{x,u}\mathbb{1}_n \geq 0 \\ 0 \leq \lambda_2^{abs} & \perp & (\mu_{x,u} - 2(Cx + eu))\mathbb{1}_n \geq 0 \\ 0 \leq \mu_1 & \perp & \mu_1 - 2\lambda_1^p \geq 0 \\ 0 \leq \mu_2 & \perp & \mu_2 - 2\lambda_2^p \geq 0 \\ & \lambda_1^{abs} + \lambda_2^{abs} = \mu_p - p & \\ & \lambda_1^p + \lambda_2^p = p & \\ & \mu_1 - \lambda_1^p = \lambda_1^{abs} & \\ & \mu_2 - \lambda_2^p = \lambda_2^{abs} & \end{cases}$$

Sommaire

Méthode directe

$$\min_{u \in \mathbb{R}^N} \sum_{i=0}^{N} f^0(x_i, u_i)$$

$$t.q. \left\{ \begin{array}{ccc} 0 \leq \lambda_k^x & \perp & Cx_k + d\lambda_k^x + eu_k \geq 0 \\ \frac{x_k - x_{k-1}}{h} & = & \tilde{A}x_{k(-1)} + \tilde{B}\lambda_{k(-1)}^x + \tilde{F}u_{k(-1)} \end{array} \right. \quad k = 1 \ldots N$$

Méthode robuste mais pas très précise.

Méthode indirecte

$$\max_{v\in\mathbb{R}}\{\langle p_{k+1}, f^x(x_{k+1}, v)\rangle + p^0 f^0(x_{k+1}, v)\}$$

$$t.q. \begin{cases} 0 \leq \lambda^x_{k+1} \quad \perp \quad Cx_{k+1} + d\lambda^x_{k+1} + ev \geq 0 \\ 0 \leq \mu_{x,u} \quad \perp \quad \mu_{x,u} - 2(Cx_{k+1} + ev) \geq 0 \\ 0 \leq \mu_p \quad \perp \quad \mu_p - 2p_{k+1} \geq 0 \\ 0 \leq \lambda^{abs}_1 \quad \perp \quad \mu_{x,u}\mathbb{1}_n \geq 0 \\ 0 \leq \lambda^{abs}_2 \quad \perp \quad (\mu_{x,u} - 2(Cx_{k+1} + ev))\mathbb{1}_n \geq 0 \\ 0 \leq \mu_1 \quad \perp \quad \mu_1 - 2\lambda^p_{1\,k+1} \geq 0 \\ 0 \leq \mu_2 \quad \perp \quad \mu_2 - 2\lambda^p_{2\,k+1} \geq 0 \\ \lambda^{abs}_1 + \lambda^{abs}_2 = \mu_p - p_{k+1} \\ \lambda^p_{1\,k+1} + \lambda^p_{2\,k+1} = p_{k+1} \\ \mu_1 - \lambda^p_{1\,k+1} = \lambda^{abs}_1 \\ \mu_2 - \lambda^p_{2\,k+1} = \lambda^{abs}_2 \\ \frac{z_{k+1} - z_k}{h} = \tilde{A}z_{k+1} + \tilde{B}\Lambda_{k+1} + \tilde{F}v \end{cases}$$

MPEC

$$\max \; g(x, \lambda, u)$$
$$t.q. \begin{cases} G(x, \lambda, u) = 0 \\ 0 \leq \lambda \perp H(x, \lambda, u) \geq 0 \end{cases}$$

Différentes manières de résoudre ces problèmes (pénalisation, conditions du premier et second ordre, programmation implicite par fonction de mérite).

Ce qu'il reste à faire

- Implémenter les algos de résolution
- Passer au cas d'un contrôle dans $\mathbb{R}^m$
- Étudier plus précisément les discrétisations (stabilité, convergence vers la solution optimale ?)
- Cas où λ et u ne sont pas de même dimension ?

Théorème d'existence

$$\dot{x} = Ax + B\lambda + Fu,$$
$$0 \leq \lambda \perp Cx + D\lambda + Eu \geq 0.$$

Théorème 1/2

Supposons que la dynamique soumis à la complémentarité vérifie les hypothèses suivantes :

- D est une P-matrice, i.e. toutes les mineurs principales sont inversibles.
- La matrice de transfert $E + C(sI - A)^{-1}F$ est inversible comme matrice rationnelle (implique en particulier $m = q$.)

Alors, le système est complètement contrôlable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- La paire $(A, [F \ \ B])$ est contrôlable

Théorème d'existence

Théorème 2/2

- Le système d'inégalités

$$\eta \geq 0,$$
$$\begin{pmatrix} \zeta^\intercal & \eta^\intercal \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \lambda I & F \\ C & E \end{pmatrix} = 0,$$
$$\begin{pmatrix} \zeta^\intercal & \eta^\intercal \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \leq 0$$

n'admet aucune solution $\lambda \in \mathbb{R}$ et $0 \neq (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^{n+m}$.