

## Table des matières

<b>Chapitre 3. Approche prédictive</b> . . . . .	83
Emmanuel WITRANT, Didier GEORGES, Carlos CANUDAS DE WIT et Olivier SENAME	
3.1. Formulation du problème . . . . .	84
3.1.1. Exemple d'application : le protocole TCP . . . . .	85
3.2. Méthode de commande . . . . .	88
3.2.1. Description . . . . .	88
3.2.2. Analyse de stabilité asymptotique . . . . .	90
3.3. Calcul de l'horizon de prédiction . . . . .	94
3.3.1. Existence et unicité . . . . .	94
3.3.2. Méthodes de calcul analytiques et numériques . . . . .	96
3.3.2.1. Utilisation de la fonction de Lambert . . . . .	96
3.3.2.2. Résolution implicite analytique . . . . .	97
3.3.2.3. Calcul par dichotomie . . . . .	98
3.3.2.4. Méthode de la suite contractante . . . . .	98
3.3.3. Solution dynamique . . . . .	98
3.4. Prédicteur à horizon estimé . . . . .	103
3.4.1. Influence de l'estimation . . . . .	103
3.4.2. Formulation finale . . . . .	111
3.5. Comparaison avec les méthodes de commande classiques . . . . .	115
3.6. Construction d'un observateur d'état en vue de la commande . . . . .	117
3.7. Conclusion . . . . .	121
3.8. Remerciements . . . . .	121
3.9. Bibliographie . . . . .	121
<b>Chapitre 4. Index</b> . . . . .	123

## Chapitre 3

# Stabilisation des systèmes commandés par réseau : une approche prédictive

L'importance des retards en automatique, particulièrement en ce qui concerne les systèmes commandés par réseau, est maintenant comprise comme illustré dans [KIM 03, ZHA 01]. Dans la plupart des études concernant la stabilisation des systèmes commandés par réseau, le retard temporel est considéré comme constant ou de variation bornée, mais la dynamique du retard correspondant à la caractérisation du réseau n'est pas prise en compte en général.

Ce chapitre est dédié à la stabilisation de tels systèmes, en supposant la connaissance des dynamiques du protocole de transmission illustrée par un *modèle de retard*. Nous verrons comment le prédicteur d'état à horizon temps variant peut être utilisé pour stabiliser un système commandé par réseau. Différentes méthodes de calcul de l'horizon de prédiction seront proposées, afin d'obtenir une loi de commande utilisant le modèle du retard de manière *explicite*. Les contributions principales de ce chapitre sont l'analyse détaillée du système commandé par prédicteur d'état ainsi que la prise en compte des retards lors de la modélisation et la stabilisation du système à contrôler. La synthèse d'observateur d'état est aussi considérée. Une partie de ces résultats a été présentée dans [WIT 03, WIT 05, WIT 07a].

---

Chapitre rédigé par Emmanuel WITRANT, Didier GEORGES, Carlos CANUDAS DE WIT et Olivier SENAME.

### 3.1. Formulation du problème

Nous considérons la stabilisation à distance des systèmes linéaires commandés par réseau, ce dernier introduisant un retard variable dans l'entrée de commande. Le type de réseau considéré est dit *sans perte*, dans le sens où tout paquet perdu est ré-émis. Cette hypothèse, nécessaire pour garantir la causalité de la loi de commande proposée, implique un retard plus important que dans le cas d'un réseau avec pertes mais permet une compensation explicite de celui-ci (gain de performance), comme nous le verrons plus loin. Notons que le phénomène de variation du retard induit par le réseau, classiquement appelé *gigue* dans le milieu industriel, est source d'instabilité ou de perte de performance et que peu de solutions sont disponibles pour le résoudre. Plus précisément, la classe de systèmes étudiée est décrite par les équations suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau(t)), \quad x(0) = x_0 \quad [3.1]$$

$$y(t) = Cx(t) \quad [3.2]$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état interne du système,  $u \in \mathbb{R}^l$  est l'entrée de commande,  $y \in \mathbb{R}^m$  est la sortie mesurée, et  $A, B, C$  sont des matrices aux dimensions appropriées. Les paires  $(A, B)$  et  $(A, C)$  sont supposées stabilisables et détectables, respectivement, mais aucune hypothèse n'est faite quant à la stabilité de  $A$ . Nous considérons donc aussi le cas des systèmes instables en boucle ouverte.

Le réseau et le protocole de transfert (PT) interviennent par l'intermédiaire du retard variable, pouvant être décrit par un modèle de type :

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u_d(t)), \quad z(0) = z_0 \quad [3.3]$$

$$\tau(t) = h(z(t), u_d(t)) \quad [3.4]$$

où la variable  $z(t)$  décrit l'état interne du réseau et  $\tau(t)$  est le retard résultant. Le signal exogène  $u_d(t)$  est supposé connu et les fonctions  $f(\cdot)$  et  $h(\cdot)$  connues et continûment dérivables (de classe  $\mathcal{C}^1$ ). Les équations [3.3] et [3.4] sont obtenues grâce à un modèle du canal de transmission et décrivent la dynamique interne du retard. Par exemple, dans le cadre d'un réseau à routeur avec PT :

- $z(t)$  décrit l'évolution temporelle de la taille des fenêtres d'émission  $W_i(t)$  (pour  $i = 1 \dots N$  sources connectées au réseau) et de la longueur de file d'attente du routeur  $q(t)$  ;

- $u_d(t)$  est une entrée exogène du système composée du nombre d'utilisateurs  $N$ , de la capacité  $C$  de la ligne en sortie du routeur et de la probabilité de perte de paquets  $p(t)$  ;

- $f(z(t), u_d(t))$  décrit la dynamique interne du réseau, déterminée par le PT (taille des fenêtres) et par la politique de gestion de la file d'attente ;
- $h(z(t), u_d(t))$  donne le retard résultant  $\tau(t)$  du modèle complet.

Nous supposons que toutes les solutions du modèle [3.3]-[3.4] ont les propriétés suivantes, pour tout  $t \geq 0$  :

$$\tau_{max} \geq \tau(t) \geq 0 \quad [3.5]$$

$$\dot{\tau}(t) \leq \nu < 1 \quad [3.6]$$

où  $\tau_{max} \geq 0$  est une borne supérieure sur le retard  $\tau(t)$  et  $\nu > 0$  est une constante arbitrairement proche de un. Ces deux propriétés sont des conséquences directes du choix d'un réseau sécurisé, la seconde étant une caractéristique de causalité [WIT 05]. Plus précisément, le retard considéré ici est celui subi par les paquets transitant du contrôleur vers le système et mesuré à l'arrivée de chaque paquet. Une dérivée du retard égale à 1 signifie donc que le retard augmente proportionnellement au temps durant le transit du paquet, et donc que celui-ci n'arrive jamais (ce qui est contradictoire avec l'hypothèse d'un réseau sans pertes).

REMARQUE.— L'approche de commande développée dans ce chapitre est établie sur l'hypothèse que le réseau peut être représenté par un modèle déterministe. En effet, nous verrons par la suite que le retard doit être prédit sur un horizon  $[t, t + \tau_{max}]$ , où  $\tau_{max}$  est le retard maximum induit par le réseau, et que les incertitudes du modèle, ou comportement non déterministe du réseau, peuvent être prises en compte avec une analyse de robustesse. Le choix d'un modèle basé sur une équation différentielle ordinaire n'a qu'une importance secondaire et est motivé par le formalisme analytique utilisé.

Les résultats proposés peuvent aisément être étendus aux modèles de réseaux discrets ou hybrides. Ainsi le prédicteur pourrait aussi être utilisé avec un modèle établi sur les niveaux de charge du réseau, la charge pouvant être mesurée sans difficulté, dans la mesure où l'erreur induite par le temps d'actualisation du modèle lors d'une transition respecte les critères obtenus par l'analyse de robustesse.

### 3.1.1. Exemple d'application : le protocole TCP

Nous avons choisi le TCP comme exemple de réseau du fait de l'absence de perte de paquets, malgré ses faibles performances au niveau du retard induit. Cet exemple d'application constitue donc une étude du pire cas du point de vue de la commande des systèmes à retard.

EXEMPLE.— Un modèle de type flux de fluide du TCP a été développé dans [MIS 00] en utilisant des équations différentielles de Poisson pour représenter les phénomènes

de congestion et les caractéristiques du protocole (l'effet du *slow start* n'est pas inclus). Ce modèle considère  $N$  flux TCP (indexés par TCP (indexés par  $i = 1, \dots, N$ ) qui transitent par un routeur de capacité de ligne de sortie  $C$ . Chaque flux est caractérisé par le temps d'aller-retour  $R_i$  et par la taille de la fenêtre d'émission d'espérance  $W_i(t)$ . Au niveau du routeur, la dynamique de la file exprimée par la longueur de file d'attente d'espérance  $q(t)$  et par la longueur moyenne de file d'attente d'espérance  $\bar{q}(t)$ . Une politique de gestion active de la file telle que l'AQM (*Active Queue Management*) est introduite avec la fonction de perte de paquets  $p(\bar{q})$ . Cette fonction correspond à la probabilité de marquage des paquets qui seront considérés comme perdus. Les équations dynamiques décrivant le TCP s'écrivent alors :

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = \frac{1}{R_i(q)} - \frac{W_i(t)W_i(t - R_i(q))}{2R_i(q(t - R_i(q)))} p(\bar{q}(t - R_i(q))) \quad [3.7]$$

$$\frac{d\bar{q}(t)}{dt} = \frac{\ln(1 - \alpha)}{\delta} \bar{q}(t) - \frac{\ln(1 - \alpha)}{\delta} q(t) \quad [3.8]$$

$$\frac{dq(t)}{dt} \approx -C + \sum_{i=1}^N \frac{W_i(t)}{R_i(q)} \quad [3.9]$$

$$R_i(q) = \frac{q}{C} + T_{pi} \quad [3.10]$$

où  $T_{pi}$  est le retard constant induit par la ligne de transmission,  $\alpha$  est une constante de pondération comprise entre 0 et 1, et  $\delta$  est la période d'échantillonnage. La dynamique de  $W$  exprime le fait que la taille de la fenêtre augmente de façon additive ( $1/R_i$ ) en fonctionnement normal et décroît de façon multiplicative lorsqu'un paquet est perdu (dernier terme). La variation de la file  $q(t)$  est simplement la différence entre le flux entrant (somme des  $W_i/R_i$ ) et le flux sortant du routeur (capacité de la ligne en sortie). Ce modèle est basé sur l'hypothèse classique que le temps mis par l'information de perte de paquet (émise par le routeur) pour atteindre la source émettrice est assimilable à  $R_i(t)$ . Le contrôle d'un tel modèle peut choisissant une politique AQM appropriée (par la définition de  $p(\bar{q})$ , qui peut être par exemple un rejet de paquets proportionnel à la longueur de la file à partir d'un niveau donné).

La validation de ce modèle a été effectuée en le comparant aux résultats obtenus grâce au simulateur de réseau *ns* dans [MIS 00]. Ces résultats montrent que le modèle proposé est particulièrement efficace pour représenter le comportement moyen du réseau, bien que les phénomènes transitoires apparaissent de manière légèrement retardée.

L'exemple précédent montre comment la dynamique interne du réseau, induite par la file d'attente du routeur, est affectée par le protocole de transfert implémenté au niveau de l'émetteur (taille de la fenêtre) et par les caractéristiques intrinsèques au réseau (telles que la capacité du canal de transmission, etc.). L'émetteur adapte

la taille de la fenêtre d'émission  $W(t)$  en fonction des ressources disponibles sur le réseau. Le retard résultant dépend du temps de transmission, de la longueur de la file d'attente, ainsi que du temps induit par la gestion de l'information au niveau du routeur (adressage, etc.).

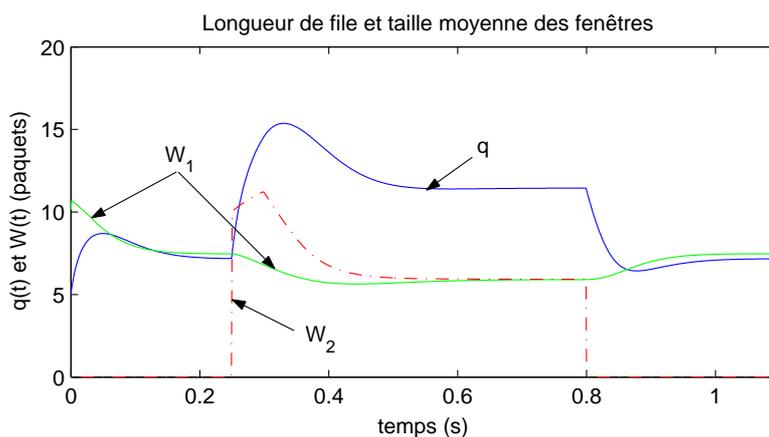


Figure 3.1. État du réseau et calcul de  $\delta(t)$

De manière plus générale, le modèle précédent fait partie de la classe de systèmes pouvant être représentés par une équation différentielle de type [3.3]-[3.4] avec :

$$\begin{aligned}
 z(t) &= [W_1(t) \dots W_N(t) q(t)]^T \\
 u_d(t) &= \{N(t), C(t), p(t)\} \\
 f(z(t), u_d(t)) &= \left[ \frac{W_1(t)}{dt} \dots \frac{dW_N(t)}{dt} \frac{dq(t)}{dt} \right]^T \\
 h(z(t), u_d(t)) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{q(t)}{C(t)} + T_{pi} \right]
 \end{aligned}$$

et où le retard induit  $\tau_i(t)$  est estimé comme étant la moitié du temps d'aller-retour ( $R_i/2$ ). La dynamique de l'état  $\bar{q}(t)$  n'apparaît pas explicitement ici du fait de la considération de  $p(t)$  comme une entrée exogène. Le modèle de réseau présenté ci-dessus est illustré par l'exemple numérique suivant :

EXEMPLE.— Soit un réseau constitué d'un routeur et de deux flux TCP (celui utilisé par le canal de commande et un flux perturbateur, agissant entre  $t = 0,25$  s et  $t = 0,8$  s). Les paramètres de ce réseau sont tels que le retard est obtenu à partir des équations dynamiques [3.7]-[3.10] avec  $i = 1, 2$ ,  $C = 300$  paquets/s,  $T_{p1} = 1$  ms,

$T_{p2} = 1,5 \text{ ms}$ ,  $q(0) = 5 \text{ paquets}$ ,  $p_i(t) = 0,005 \times q(t - R_i(t))$ ,  $i = 1, 2$ , et  $W_1(0) = W_2(0, 25) = 10 \text{ paquets}$ . Le canal de communication entre la commande et le système correspond à  $i = 1$  et le retard induit est  $\tau(t) = R_1(t)/2$ . L'évolution temporelle des états internes du réseau  $q(t)$ ,  $W_1(t)$  et  $W_2(t)$  est présentée dans la figure 3.1. La première source commence à émettre à  $t = 0$  puis la seconde, qui intervient comme une perturbation, entre en jeu entre 250 et 800  $\text{ms}$ . L'effet de cette perturbation apparaît comme une réduction de  $W_1(t)$  et une augmentation de la file d'attente (et donc du retard). Cet exemple sera utilisé comme base de modèle de retard dans la suite de ce chapitre.

### 3.2. Méthode de commande

Le problème de stabilisation d'un système à entrée retardée, où le retard varie dans le temps, est abordé ici. Nous utilisons la commande basée sur le prédicteur d'état pour compenser le retard [ART 82, MAN 79, NIH 89] et dont une étude détaillée est proposée dans [WIT 07b]. Ce choix est motivé par l'efficacité de cette méthode dans le cas où un modèle du réseau est disponible et par la diversité des stratégies de commande classiques applicables pour le choix du gain (le prédicteur compense le retard et le gain détermine les performances du système bouclé). Une analyse détaillée des conditions de stabilité est proposée dans cette section, ce qui permettra d'établir les hypothèses nécessaires à la suite de ce travail.

#### 3.2.1. Description

Définissons tout d'abord la nouvelle entrée  $v(t)$  par :

$$v(t) \doteq u(t - \tau(t))$$

En supposant l'existence d'une fonction bornée dépendante du temps  $\infty > \delta(t) \geq 0$  (qui sera définie par la suite) et en remplaçant l'argument temporel  $t$  par l'argument à coordonnée temporelle décalée  $t + \delta(t)$  dans [3.1], nous obtenons :

$$x'(t + \delta(t)) = Ax(t + \delta(t)) + Bv(t + \delta(t))$$

où  $x'$  est la dérivée de  $x$  par rapport à son argument. Il est intéressant de noter que, pour les systèmes à retard temps variant, la transformation temporelle n'est pas réversible pour un horizon de prédiction égal au retard. En effet :

$$v(t + \delta(t)) = u(t - \tau(t + \delta(t)) + \delta(t)) \quad [3.11]$$

contrairement au cas du retard constant, où  $\delta = \tau$  et  $v(t + \delta) = u(t)$ .

Supposons qu'il existe une fonction  $\delta(t)$ , respectant le principe de causalité, telle qu'il est possible de calculer :

$$v(t + \delta(t)) = -Kx(t + \delta(t)) \quad [3.12]$$

le système résultant en boucle fermée est alors :

$$x'(t + \delta(t)) = (A - BK)x(t + \delta(t)) = A_{cl}x(t + \delta(t)) \quad [3.13]$$

où  $A_{cl}$  est la matrice d'état du système bouclé, pouvant être rendue de Hurwitz du fait de l'hypothèse de contrôlabilité de la paire  $(A, B)$ . Néanmoins, la stabilité de l'état  $x(t)$  ne peut être déduite directement de la stabilité de  $A_{cl}$  du fait de l'argument en  $t + \delta(t)$  (au lieu de  $t$ ) et nécessite certaines contraintes sur  $\delta(t)$ . Nous reviendrons sur ce point après la présentation de la procédure de prédiction de  $v(t + \delta(t))$  et de la définition constructive résultante pour  $\delta(t)$ . Pour résumer, deux conditions doivent être satisfaites afin que la procédure décrite ci-dessus puisse être mise en place :

- la possibilité de prédire  $x(t + \delta(t))$ ;
- la possibilité de calculer  $v(t + \delta(t))$ .

La seconde condition est satisfaite si  $t - \tau(t + \delta(t)) + \delta(t) = t$ , du fait de l'équation [3.11]. Ceci conduit à une condition nécessaire sur  $\delta(t)$  qui sera utilisée par la suite. La prédiction de  $x(t + \delta(t))$  est donc l'élément clé pour la construction de [3.12] et pour que la relation [3.13] soit satisfaite. En substituant la solution de l'équation différentielle [3.1] :

$$x(t + \delta(t)) = e^{A\delta(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\delta(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau(\theta)) d\theta \right]$$

dans [3.12], nous obtenons :

$$v(t + \delta(t)) = -Ke^{A\delta(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\delta(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau(\theta)) d\theta \right]$$

Ensuite, la combinaison de [3.11] et de l'équation précédente permet d'écrire :

$$\begin{aligned} u(t - \tau(t + \delta(t)) + \delta(t)) &= -Ke^{A\delta(t)}x(t) \\ -Ke^{A(t+\delta(t))} \int_t^{t+\delta(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau(\theta)) d\theta & \end{aligned} \quad [3.14]$$

L'argument de l'intégrale implique de connaître l'information entre  $u(t - \tau(t))$  et  $u(t + \delta(t) - \tau(t + \delta(t)))$ . La causalité dans le calcul de la loi de commande est donc satisfaite si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\forall \theta \in [t, t + \delta(t)], \quad \theta - \tau(\theta) \leq t$$

C'est la raison pour laquelle  $\delta(t)$  est défini par :

$$\delta(t) \doteq \max \{ \delta \geq 0 \mid \forall \theta \in [t, t + \delta], \theta - \tau(\theta) \leq t \} \quad [3.15]$$

L'existence d'une solution de [3.15] est obtenue par la proposition suivante :

**PROPOSITION 3.1.**— *Le problème d'optimisation [3.15] admet une solution  $\delta(t)$  pour laquelle :*

$$\delta(t) - \tau(t + \delta(t)) = 0 \quad [3.16]$$

**DÉMONSTRATION.**— *Soit  $t$  un instant donné. L'ensemble admissible pour le problème d'optimisation [3.15] est non vide car la valeur  $\delta = 0$  est une solution candidate répondant à la contrainte  $t - \tau(t) \leq t$ . Ceci est dû au fait que  $\tau(t) \geq 0$ , par l'hypothèse [3.5]. De plus, l'ensemble admissible est clairement borné par  $\delta = \sup_{\sigma \geq 0} \tau(\sigma)$ . Finalement, en utilisant des arguments de continuité classiques, l'ensemble admissible est fermé. Le problème d'optimisation [3.15] est donc de trouver la valeur maximale d'une fonction continue (la fonction identité) sur un ensemble compact. Le fait que la solution  $\delta(t)$  satisfasse [3.16] est une conséquence directe de cette propriété de maximum. L'existence et l'unicité de la solution sont décrites de façon plus détaillée dans le paragraphe suivant.*

A partir de la proposition précédente, il est clair que  $\delta(t)$  défini par [3.15] permet d'écrire [3.14] sous la forme explicite suivante :

$$u(t) = -K e^{A\delta(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\delta(t)} e^{-A\theta} B u(\theta - \tau(\theta)) d\theta \right] \quad [3.17]$$

puisque l'information passée de  $u(t)$  est nécessaire uniquement sur l'intervalle temporel  $[t - \tau(t), t]$ .

**REMARQUE.**— Le calcul de  $\delta(t)$  requiert de résoudre continûment l'équation [3.16] pour tout instant. De plus, il est important de noter qu'une prédiction du retard est nécessaire. Celle-ci peut être obtenue par intégration du modèle [3.3]-[3.4] sur l'horizon de prédiction.

Pour l'implantation de la loi de commande [3.17], il est nécessaire de garder en mémoire l'histoire des signaux de commande passés durant un intervalle temporel  $[t - \tau(t), t]$ .

### 3.2.2. Analyse de stabilité asymptotique

Le but est ici de montrer la stabilité de l'état à partir de sa dynamique décrite dans l'espace temporel  $t + \delta(t)$  obtenue par la procédure décrite précédemment et

exprimée dans l'équation [3.13]. Nous utiliserons la notation  $x'(\cdot)$  pour faire référence à la dérivée de  $x(\cdot)$  par rapport à son argument ; ainsi :

$$x'(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}x(\zeta)$$

avec  $\zeta(t) = t + \delta(t)$ .

LEMME 3.1.– Soit le système décrit par :

$$x'(t + \delta(t)) = A_{cl}x(t + \delta(t))$$

avec  $t \geq 0$  et  $\delta(0) = \delta_0$ . Si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) toutes les valeurs propres de  $A_{cl}$  sont dans le demi-plan ouvert gauche du plan complexe ;

ii)  $0 \leq \delta(t) \leq \delta_M < \infty$  ;

iii)  $-1 < \dot{\delta}(t) < \infty$  ;

alors :

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \|x(\zeta)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t + \delta(t))\| = 0 \quad [3.18]$$

pour toute valeur bornée de  $x(\delta_0)$ . De plus, l'état  $x(t + \delta(t))$  décroît exponentiellement vers 0.

DÉMONSTRATION.– Introduisons tout d'abord la fonction correspondant à l'échelle temporelle décalée  $\zeta(t) = t + \delta(t)$ , notée  $\zeta$  pour plus de clarté. Soit la fonction de Lyapunov :

$$V(t) = x(\zeta)^T P x(\zeta) \quad [3.19]$$

où  $P = P^T > 0$ . En notant que la dérivée temporelle de l'état correspond au système linéaire temps variant :

$$\frac{d[x(\zeta)]}{dt} = \frac{dx(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt} = (1 + \dot{\delta}) A_{cl} x(\zeta)$$

nous obtenons, grâce à l'hypothèse (i), qu'il existe une matrice  $Q$  définie positive telle que :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (1 + \dot{\delta}(t))x(\zeta)^T (P A_{cl} + A_{cl}^T P)x(\zeta) \\ &= -(1 + \dot{\delta}(t))x(\zeta)^T Q x(\zeta) \\ &\leq -(1 + \dot{\delta}(t))\lambda_m(Q)\|x(\zeta)\|^2 < 0 \end{aligned} \quad [3.20]$$

où la dernière inégalité est obtenue avec l'hypothèse (iii). En utilisant les bornes :

$$\lambda_m(P)\|x(\zeta)\|^2 \leq V(t) \leq \lambda_M(P)\|x(\zeta)\|^2$$

avec  $\lambda_m(\cdot)$  et  $\lambda_M(\cdot)$  dénotant respectivement les valeurs propres minimum et maximum de la matrice considérée, et en intégrant l'inégalité [3.20] entre 0 et  $t$ , nous obtenons :

$$V(t) \leq V(0)e^{-\Psi(t)}$$

où :

$$\Psi(t) \doteq \frac{\lambda_m(Q)}{\lambda_M(P)} \int_0^t (1 + \dot{\delta}(\theta)) d\theta > 0$$

En utilisant à nouveau les bornes de l'équation de Lyapunov, nous pouvons en déduire :

$$\|x(\zeta)\|^2 \leq \frac{\lambda_m(P)}{\lambda_M(P)} \|x(\delta_0)\|^2 e^{-\Psi(t)} \quad [3.21]$$

Il reste à établir que  $\Psi(t) \rightarrow \infty$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Pour cela, nous utilisons la définition de  $\Psi(t)$  pour montrer que :

$$\Psi(t) = \frac{\lambda_m(Q)}{\lambda_M(P)} (t + \delta(t) - \delta_0)$$

où  $\delta(t)$  est positif et borné, du fait de l'hypothèse (ii). Nous pouvons donc en conclure que  $t \rightarrow \infty$  implique  $\Psi(t) \rightarrow \infty$ . L'application de cette propriété à [3.21] permet de conclure la démonstration.

**COROLLAIRE 3.1.**— Si les hypothèses du lemme 3.1 sont satisfaites, alors le système en boucle fermée résultant de l'application de la loi de commande [3.17] au système [3.1]-[3.2], a une solution bornée et converge exponentiellement vers 0, pour tout  $t \geq 0$ . De manière plus générale, la stabilité du système bouclé est déduite de celle de  $x(t + \delta(t))$  dès lors que les conditions de bornitude sur  $\delta(t)$  et sa dérivée sont vérifiées.

**DÉMONSTRATION.**— Le système [3.1]-[3.2] est linéaire, et ses états ne peuvent diverger en temps fini. Donc pour toute valeur bornée de  $\delta_0$ , l'état  $x(\delta_0)$  à cet instant est borné. Le lemme précédent permet ensuite de conclure, si ses hypothèses sont vérifiées, que l'état converge exponentiellement vers zéro.

Les conditions de stabilité précédentes concernant la nature de  $\delta(t)$  peuvent être exprimées en fonction de la nature du retard  $\tau(t)$  avec la proposition suivante :

**PROPOSITION 3.2.**— Les conditions sur l'horizon de prédiction  $\delta(t)$  :

$$i) 0 \leq \delta(t) \leq \delta_M < \infty;$$

$$ii) -1 < \dot{\delta}(t) \leq \rho < \infty;$$

sont toujours satisfaites pour les modèles de retard définis par [3.3]-[3.4] et ayant les propriétés :

- P1)  $0 \leq \tau(t) \leq \tau_{max}$  ;  
 P2)  $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \dot{\tau}(t) = \nu < 1$ .

DÉMONSTRATION.– L'hypothèse (i) ( $\delta(t)$  bornée) est clairement satisfaite par la définition de  $\delta(t)$  et par la condition sur le retard (P1). En utilisant la propriété  $\dot{\tau}(t) \neq 1$  pour tout  $t$ , nous pouvons dériver [3.16] par rapport au temps et réécrire l'hypothèse (ii) ainsi :

$$-1 < \frac{\tau'(\zeta)}{1 - \tau'(\zeta)} \leq \rho$$

avec  $\rho > 0$  fini. La partie gauche de cette inégalité est équivalente à  $-1 < 0$  et est donc toujours satisfaite ( $\dot{\tau}(t) \leq 1$ ). La partie droite de l'inégalité (dérivée de  $\delta(t)$  finie) est satisfaite par (P2). En effet, nous pouvons choisir  $\rho$  tel que :

$$\rho = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{\dot{\tau}(t)}{1 - \dot{\tau}(t)}$$

Les résultats de cette section sont maintenant résumés dans le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1.– Soit le système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau(t))$$

avec  $(A, B)$  une paire commandable. En supposant que la dynamique du retard [3.3]-[3.4] est telle que les conditions suivantes sur  $\tau(t)$  sont satisfaites pour tout  $t \geq 0$  :

- A1)  $\tau_{max} \geq \tau(t) \geq 0$  pour une constante finie  $\tau_{max} \geq 0$  ;  
 A2)  $\dot{\tau}(t) < 1, \quad \forall t \geq t_0$  ;

alors la loi de commande :

$$u(t) = -K e^{A\delta(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\delta(t)} e^{-A\theta} B u(\theta - \tau(\theta)) d\theta \right] \quad [3.22]$$

avec  $\delta(t) = \tau(t + \delta(t))$  assure que le système en boucle fermée est borné, et que son état converge exponentiellement vers zéro.

DÉMONSTRATION.– Ce théorème découle naturellement de l'approche constructive présentée dans la section précédente et des résultats obtenus dans cette section. Plus précisément, la causalité de la loi de commande est assurée par la définition de  $\delta$ . Puis la stabilité du système résultant est obtenue en appliquant successivement le lemme, le corollaire et la proposition présentés dans cette section.

REMARQUE.— L'originalité de ce résultat réside plus dans la manière dont il est obtenu que dans le résultat lui-même. En effet, l'effet stabilisant de la commande prédictive en raisonnant sur un système réduit ainsi que la propriété de stabilité de l'état  $x(t + \delta(t))$  ont été étudiés dans [ART 82] et [NIH 89], respectivement. La méthode d'analyse proposée ici est singulière dans le sens qu'elle est élaborée directement à partir de l'état temps décalé, permettant ainsi une analyse de stabilité classique et faisant apparaître les conditions de causalité (propriétés du modèle de retard admissible) de façon explicite.

### 3.3. Calcul de l'horizon de prédiction

Nous nous intéressons ici à la résolution de l'équation *implicite* :

$$\delta(t) = \tau(t + \delta(t))$$

utilisée lors du calcul de la loi de commande. Cette équation implique l'évolution temporelle du retard  $\tau(t)$  et se trouve donc directement affectée par la dynamique de ce retard. Nous verrons tout d'abord quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir une solution unique à ce problème. Des méthodes de résolution exacte seront ensuite présentées, permettant dans certains cas l'obtention d'une solution explicite. Enfin, nous proposerons une approche de calcul dynamique permettant l'utilisation *explicite* de la dynamique du retard, applicable à la classe de retards considérée.

#### 3.3.1. Existence et unicité

Nous reconsidérons tout d'abord le problème d'existence d'une solution, abordé dans le cadre de la résolution du problème optimal [3.15] avec la proposition 3.1. Ceci nous permettra, dans un premier temps, d'établir le formalisme nécessaire à l'application du théorème du point fixe (existence d'une solution). La version de Brouwer de ce théorème sera ensuite utilisée pour déterminer les conditions d'unicité de la solution. Ce problème est de type  $\delta = g(\delta, t)$  où  $g(\delta, t) = \tau(t + \delta)$ . L'existence d'une solution à ce problème est établie en considérant le cas spécifique où le temps est fixé (c'est-à-dire  $g(\delta, t) = g(\delta)$ ). Le résultat obtenu est ensuite étendu au cas général en remarquant qu'il reste vrai pour tout temps  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Soit  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+}, [a, b])$  la classe des applications continues de  $\mathbb{R}^{n+}$  dans  $[a, b]$ . De par la définition des retards admissibles  $\tau(\cdot)$ , continus et bornés, considérés dans le système [3.3]-[3.4], et le fait que  $t \in \mathbb{R}^+$ , nous avons  $\tau(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, [0, \tau_{max}])$ . Ensuite, en considérant aussi le fait que  $g(\delta, t)$  est une projection de  $\mathbb{R}^{2+}$  dans  $\mathbb{R}^+$ , la propriété suivante est établie :

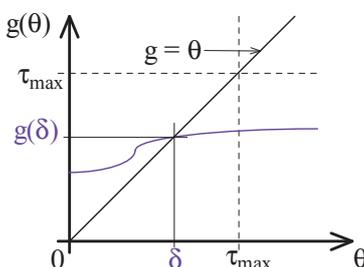
$$g(\delta, t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{2+}, [0, \tau_{max}]) \quad [3.23]$$

Finalement, le fait que  $\delta = g(\delta, t)$  permet de conclure que, si  $\delta$  existe :

$$\delta \in [0, \tau_{max}] \tag{3.24}$$

L'existence d'une solution peut maintenant être établie à l'aide du théorème du point fixe avec la proposition suivante :

**PROPOSITION 3.3.**— *Si le retard  $\tau(t)$  est continu et borné, alors il existe toujours une solution  $\delta(t)$  telle que l'équation implicite [3.16] soit vérifiée.*



**Figure 3.2.** Illustration du théorème du point fixe

**DÉMONSTRATION.**— *Le théorème du point fixe [WEL 91] établit que si  $g$  est une fonction continue  $g(\theta) \in [a, b]$  pour tout  $\theta \in [a, b]$ , alors  $g$  a un point fixe dans  $[a, b]$ . Ce théorème est appliqué au problème d'existence de  $\delta$  en considérant tout d'abord  $g(\delta, t_1)$ , où  $t_1 > 0$  est un instant donné. Dans ce cas le théorème du point fixe, avec les propriétés de  $g$  et  $\delta$  établies par [3.23]-[3.24], assure directement qu'il existe un point fixe  $\delta \in [0, \tau_{max}]$ . En effet, le fait que  $g(\theta) \in [0, \tau_{max}]$  pour tout  $\theta \in [0, \tau_{max}]$  implique l'intersection de  $g(\theta)$  avec la droite  $g(\theta) = \theta$ , comme illustré dans la figure 3.2. Le point fixe  $g(\delta, t_1) = \delta(t_1)$  est donc défini par cette intersection. Ceci est ensuite étendu au cas général en remarquant que cette propriété reste vraie pour tout  $t_1 \in \mathbb{R}^+$ . Donc nous pouvons garantir qu'il existe un  $\delta(t) \in [0, \tau_{max}]$  tel que la relation [3.16] soit satisfaite.*

L'unicité de la solution est obtenue par application du théorème du point fixe de Brouwer [MIL 65] et présentée dans la proposition suivante :

**PROPOSITION 3.4.**— *Si le retard  $\tau(t)$  est continu et borné, et si sa dérivée vérifie  $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \dot{\tau}(t) < 1$ , alors la solution  $\delta(t)$  de l'équation implicite [3.16] existe et est unique, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ .*

**DÉMONSTRATION.**— *La propriété d'unicité découle naturellement du fait que la condition imposée sur  $\dot{\tau}$  nécessite que la fonction  $\tau(t)$  ait une dérivée inférieure à un. Plus précisément, supposons qu'il existe deux points fixes  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , alors :*

$$d(\delta_1, \delta_2) = d(g(\delta_1), g(\delta_2)) \leq Lip(g) \cdot d(\delta_1, \delta_2)$$

où  $d(\cdot, \cdot)$  est la distance entre deux points,  $g(\delta)$  est telle que définie précédemment et  $Lip(g)$  est la constante de Lipschitz de  $g$ . Le fait que  $\dot{\tau}(t) < 1$  implique que  $Lip(g) < 1$ , donc que  $\delta_1 = \delta_2$ .

REMARQUE.— L'inégalité stricte sur la borne supérieure de la dérivée du retard est nécessaire à l'unicité de l'horizon de prédiction  $\delta(t)$ .

### 3.3.2. Méthodes de calcul analytiques et numériques

Il apparaît clairement qu'un modèle complet du retard est nécessaire pour calculer  $\delta(t)$ , tout du moins sur l'intervalle temporel  $[0, t + \delta(t)]$ . La solution de l'équation implicite définissant  $\delta(t)$  peut être obtenue par différentes méthodes, selon la structure du modèle du retard et l'information disponible. Nous considérerons ici deux méthodes analytiques et deux numériques.

#### 3.3.2.1. Utilisation de la fonction de Lambert

Un cas particulier où une solution *explicite* pour  $\delta$  existe est donnée dans l'exemple suivant. Supposons que le retard soit représenté par un équation différentielle scalaire et linéaire du type :

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= az(t) + b, \quad \text{avec } z(0) = z_0 \\ \tau(t) &= cz(t)\end{aligned}$$

où  $a, b, c$  et  $z_0$  sont des constantes scalaires connues. L'évolution temporelle du retard est déterminée par l'intégration du système précédent et s'écrit :

$$\tau(t) = c \left( z_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at} - \frac{bc}{a}$$

L'horizon de prédiction  $\delta$  est donc solution de l'équation :

$$\delta(t) = c \left( z_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at} e^{a\delta(t)} - \frac{bc}{a}$$

cette équation devant être résolue à tout temps  $t$ . Dans ce cas, la solution explicite de [3.16] peut être établie et résolue analytiquement en utilisant la *fonction de Lambert* [COR 93]<sup>1</sup>, notée  $W$ . Cette fonction est telle que  $W : xe^x \mapsto x$  et peut être calculée par un développement en série. Son utilisation est illustrée par l'exemple suivant :

1. Cette fonction fût introduite par Euler dans [EUL 79] lors de son étude de l'équation transcendante de Lambert [LAM 58] :  $x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}$ . Euler définit alors une fonction de  $x$  satisfaisant  $we^{-w} = x$ .

EXEMPLE.— Soit une variable  $x$  définie par l'équation transcendantale  $x = \alpha e^{\beta x} - \gamma$ . Afin de pouvoir utiliser la fonction de Lambert, cette égalité est reformulée comme suit :

$$\begin{aligned} x e^{-\beta x} &= \alpha - \gamma e^{-\beta x} \Leftrightarrow -\beta x e^{-\beta x} = -\alpha\beta + \beta\gamma e^{-\beta x} \\ \Leftrightarrow (-\beta\gamma - \beta x) e^{-\beta x} &= -\alpha\beta \Leftrightarrow (-\beta\gamma - \beta x) e^{-\beta\gamma - \beta x} = -\alpha\beta e^{-\beta\gamma} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant utiliser la transformation  $W : x e^x \mapsto x$ , ce qui donne :

$$-\beta\gamma - \beta x = W(-\alpha\beta e^{-\beta\gamma})$$

ou, de manière équivalente :

$$x = -\frac{1}{\beta} [W(-\alpha\beta e^{-\beta\gamma}) + \beta\gamma]$$

Le résultat de l'exemple précédent peut être utilisé pour le calcul de  $\delta(t)$  en remplaçant  $\alpha$  par  $c \left( z_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at}$ ,  $\beta$  par  $a$  et  $\gamma$  par  $\frac{bc}{a}$ . La solution finale est donc :

$$\delta(t) = -\frac{1}{a} \left[ W \left( -ac \left( z_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at-bc} \right) + bc \right]$$

REMARQUE.— Cette méthode peut aussi être appliquée au cas multivariable ainsi que pour les modèles dynamiques linéaires avec une entrée dépendante du temps. Son principal défaut est la complexité introduite par le calcul de la série associée à  $W$ , qui peut induire de longs temps de calcul et la rendre inapplicable pour les lois de commande synthétisées en temps réel. Si l'argument  $x$  de la fonction de Lambert est réel, alors pour  $-1/e \leq x < 0$  il y a deux valeurs réelles possibles de  $W(x)$ . La première branche satisfait l'inégalité  $W(x) \leq -1$  alors que la seconde, dite *branche principale*, est caractérisée par  $W(x) \geq -1$ . Notons que dans le cas étudié ici, ce problème n'apparaît que si  $a > -\frac{b}{cz_0}$  et ne sera pas étudié plus en détails.

### 3.3.2.2. Résolution implicite analytique

Pour le cas multivariable avec entrée temps variante, une expression analytique impliquant  $\delta(t)$  peut être obtenue en utilisant la prédiction du retard. Par exemple, dans le cas simplifié où  $\tau(t) = z(t)$ , l'horizon de prédiction est obtenu par :

$$\delta(t) = \tau(t + \delta(t)) = \tau(t) + \int_t^{t+\delta} f(\tau(\theta), u_d(\theta)) d\theta$$

La résolution de cette égalité peut être effectuée de manière numérique en effectuant une approximation discrète du terme intégral. Cette méthode peut s'avérer efficace, en temps de calcul, pour des retards à faible variation (moins de pas d'intégration à calculer).

### 3.3.2.3. Calcul par dichotomie

La méthode de dichotomie peut être appliquée à la résolution de [3.16] en utilisant les valeurs numériques du retard. La dynamique du retard n'intervient pas directement dans le calcul de l'horizon de prédiction lorsque cette approche est utilisée. La validité de cette méthode est une conséquence directe du théorème du point fixe. Le temps de calcul induit peut aussi être relativement long, du fait que la dichotomie doit être appliquée à chaque période d'échantillonnage.

### 3.3.2.4. Méthode de la suite contractante

Nous pouvons aussi utiliser directement le fait que la fonction étudiée est positive et de dérivée inférieure à un pour résoudre  $\delta = g(\delta)$ . En effet, le calcul de la suite  $\delta_{n+1} = g(\delta_n)$  pour un  $\delta_0$  au voisinage du point fixe nous permet de trouver ce dernier. Cet algorithme est dit *méthode des approximations successives* et l'existence et l'unicité d'une solution est une conséquence directe des propriétés de contraction.

### 3.3.3. Solution dynamique

La fonction  $\delta(t)$  peut aussi être calculée de manière dynamique, en utilisant directement le modèle du retard. Nous exploitons ici le fait que l'équation différentielle scalaire  $\dot{\delta}(t) = -\delta + g(\delta)$  possède un seul point fixe globalement attractif si l'application  $g$  n'a qu'un point fixe. Il s'agit d'une version continue de l'itération discrète  $\delta_{n+1} = g(\delta_n)$ . Cette approche a l'avantage de proposer une solution explicite, où le retard apparaît dans l'état du contrôleur, et d'être plus performante au niveau du temps de calcul nécessaire à la résolution de l'équation implicite [3.16]. Nous décrirons comment la dynamique de  $\delta(t)$ , exprimée de manière continue pour plus de simplicité d'analyse du fait du choix d'une dynamique du retard décrite par une équation différentielle ordinaire, est définie afin de garantir une convergence asymptotique vers la valeur nominale. Notons qu'un modèle interne du retard est nécessaire pour la mise en œuvre de cette approche.

Définissons tout d'abord la fonction d'erreur induite par l'estimation de  $\delta(t)$  par la relation :

$$\hat{s}(t) \doteq \hat{\delta}(t) - \tau(t + \hat{\delta}(t)) \quad [3.25]$$

où  $\hat{\delta}(t)$  est la valeur estimée de  $\delta(t)$ . L'idée directrice de l'approche proposée est de trouver une loi de variation pour  $\hat{\delta}(t)$  telle que la surface  $s(t) = 0$ , où  $s(t)$  correspond à la valeur recherchée de  $\hat{s}(t)$  (car correspondant à une solution exacte de l'équation

implicite), soit rendue attractive et invariante. Le résultat d'une telle dynamique garantit la convergence exponentielle de  $\hat{\delta}(t)$  vers  $\delta(t)$ . Nous construisons en fait un estimateur de  $\delta(t)$  en boucle ouverte, solution du système de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = 0 \\ s(t=0) = 0 \end{cases}$$

Pour prévenir des instabilités numériques induites par cette approche, la dynamique de  $\hat{s}(t)$  est définie par :

$$\dot{\hat{s}}(t) + \sigma \hat{s}(t) = 0 \quad [3.26]$$

où  $\sigma$  est une constante positive pouvant être choisie arbitrairement. En dérivant [3.25] par rapport au temps et en substituant  $\hat{s}$  dans [3.26], nous obtenons :

$$\dot{\hat{\delta}}(t) - \tau'(\hat{\zeta})(1 + \dot{\hat{\delta}}(t)) + \sigma(\hat{\delta}(t) - \tau(\hat{\zeta})) = 0$$

où  $\hat{\zeta}(t) \doteq t + \hat{\delta}(t)$  et  $\tau'(\cdot)$  est la dérivée de  $\tau(\cdot)$  par rapport à son argument. L'équation précédente implique que [3.26] soit satisfaite si  $\tau'(\cdot) \neq 1$  et si la loi de variation  $\dot{\hat{\delta}}(t)$  est établie avec :

$$\dot{\hat{\delta}}(t) = -\frac{\sigma \hat{\delta}}{1 - \tau'(\hat{\zeta})} + \frac{\tau'(\hat{\zeta}) + \sigma \tau(\hat{\zeta})}{1 - \tau'(\hat{\zeta})} \quad [3.27]$$

Cette expression *explicite* de la dynamique de  $\hat{\delta}(t)$  garantit donc que l'estimation  $\hat{\delta}(t)$  converge vers la valeur désirée  $\delta(t)$ , et que la fonction  $\hat{s}(t)$  converge exponentiellement vers zéro. La vitesse de convergence peut être établie comme arbitrairement rapide par le choix d'un  $\sigma$  suffisamment grand, mais nous verrons par la suite que ce paramètre doit être borné supérieurement afin de garantir la stabilité du système en boucle fermée. Nous utilisons ainsi directement les dynamiques de  $\tau(\hat{\zeta})$  et de  $\tau'(\hat{\zeta})$  données par [3.3]-[3.4]. Il reste à démontrer que l'erreur d'estimation sur  $\delta(t)$  induite par la méthode proposée a les mêmes propriétés de convergence que  $\hat{s}(t)$ , pour le type de fonctions considéré. Ceci est établi avec le lemme suivant :

LEMME 3.2.— Soit  $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$  la solution de l'équation implicite  $x(t) = f(x(t))$  avec  $f(x(t))$  une fonction continue et dérivable sur  $\mathcal{X}$  de coefficient de Lipschitz  $M < 1$ . Soit  $\hat{x}(t)$  l'estimée de cette solution, calculée par résolution dynamique avec la relation :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}(t) &= -\sigma \hat{s}(t) \\ \hat{s}(t) &= \hat{x}(t) - f(\hat{x}(t)) \end{cases}$$

où  $\sigma$  est une constante positive. Alors l'erreur d'estimation  $\epsilon(t) \doteq x(t) - \hat{x}(t)$  satisfait l'inégalité :

$$|\epsilon(t)| \leq \frac{|\hat{s}(t)|}{1 - M}$$

et converge exponentiellement vers zéro.

DÉMONSTRATION.— L'erreur d'estimation<sup>2</sup>  $\epsilon$  est tout d'abord exprimée en fonction de  $f$  et de  $\hat{s}$  avec :

$$\epsilon = f(x) - \hat{s} - f(\hat{x}) = -\hat{s} + f(x) - f(x - \epsilon)$$

Les propriétés de continuité et de dérivabilité sur  $\mathcal{X}$  de  $f$ , ainsi que le théorème des accroissements finis permettent ensuite d'établir qu'il existe un  $c$  compris dans l'intervalle  $[x - \epsilon, x]$  tel que :

$$f(x) - f(x - \epsilon) = f'(c)\epsilon$$

d'où la relation :

$$\epsilon(1 - f'(c)) = -\hat{s}$$

ce qui implique :

$$\epsilon = -\frac{\hat{s}}{1 - f'(c)}$$

L'hypothèse sur le coefficient de Lipschitz  $f$  permet finalement d'établir que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f'(x) = M < 1 \Rightarrow f'(c) < 1$$

justifiant ainsi l'inégalité proposée dans le lemme. La convergence exponentielle de  $\epsilon(t)$  est directement obtenue de l'équation dynamique définissant  $s(t)$ , qui a pour solution  $\hat{s}(t) = \hat{s}(0)e^{-\sigma t}$ .

REMARQUE.— Le résultat précédent montre de manière équivalente que l'erreur de poursuite  $e(t) = s(t) - \hat{s}(t)$  obéit à la loi de décroissance exponentielle  $e(t) = e(0)e^{-\sigma t}$ . Ceci découle directement du fait que la fonction  $s(t)$  est décrite par le système de Cauchy présenté plus haut. Une autre approche, basée sur une méthode similaire à la commande par modes glissants, peut aussi être utilisée pour résoudre ce type de problème. Nous obtiendrions ainsi une convergence de la fonction  $\hat{s}(t)$  vers zéro en temps finis mais devrions inclure une partie non linéaire liée à la fonction  $\text{sign}(\cdot)$  dans l'analyse.

Le lemme précédent peut maintenant être appliqué au problème considéré dans cette section avec le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2.— La solution  $\delta(t)$  de l'équation implicite [3.16] peut être estimée par la variable  $\hat{\delta}(t)$  solution de l'équation dynamique [3.27] avec  $\hat{\delta}(0) = \hat{\delta}_0 \in [0, \tau_{max}]$  et  $\tau(t)$  satisfaisant les conditions :

---

2. Les indices temporels sont omis pour plus de clarté dans la démonstration, le développement proposé restant vrai pour tout  $t$ .

- P1)  $0 \leq \tau(t) \leq \tau_{max}$  ;  
 P2)  $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \dot{\tau}(t) = \nu < 1$ .

L'erreur induite par cette approximation converge exponentiellement vers zéro et est bornée de la manière suivante :

$$|\epsilon(t)| = |\delta(t) - \hat{\delta}(t)| \leq \frac{|\hat{\delta}_0 - \tau(\hat{\delta}_0)|e^{-\sigma t}}{1 - \nu} \quad [3.28]$$

où  $\sigma$  est une constante positive.

DÉMONSTRATION.— Cette proposition découle naturellement du développement proposé dans cette section et des propriétés du retard considéré, qui permettent d'appliquer le lemme 3.2. En effet, le domaine d'étude considéré se situe sur  $\mathbb{R}^+$ , de par la définition de  $\delta$  [3.16] et la condition de bornitude sur  $\tau(t)$  (P1). La condition sur la dérivée du retard (P2) remplit la condition sur le coefficient de Lipschitz du lemme 3.2. Enfin, les variables  $\epsilon(t)$  et  $s(t)$  sont substituées par leur expression en fonction de  $\delta(\cdot)$ ,  $\hat{\delta}(\cdot)$  et  $\tau(\cdot)$ .

REMARQUE.— Dans le cadre considéré ici, la valeur de la constante  $\sigma$  doit être choisie en accord avec la sensibilité aux bruits de mesure sur le retard et aux erreurs numériques générées par l'algorithme utilisé. Nous verrons apparaître dans la section suivante une contrainte plus forte, liée à la stabilité du système en boucle fermée.

Pour illustrer le calcul de  $\dot{\hat{\delta}}$ , considérons tout d'abord l'exemple présenté dans la section précédente, où  $\tau(t) = z(t)$ . Dans ce cas, la dynamique [3.27] est évaluée avec :

$$\begin{aligned} \tau(\hat{\zeta}) &= z(\hat{\zeta}) \\ \tau'(\hat{\zeta}) &= z'(\hat{\zeta}) = f(z(\hat{\zeta}), u_d(\hat{\zeta})) \end{aligned}$$

Nous retrouvons ici la nécessité de prédire l'évolution temporelle du retard sur l'horizon  $[t, t + \tau_{max}]$  et donc de connaître l'entrée perturbatrice  $u_d(\theta)$  sur cet horizon. Un second exemple, illustrant l'application de la méthode proposée à un réseau TCP, est présenté ci-dessous :

EXEMPLE.— Nous considérons ici le modèle TCP dans le cas spécifique où la capacité du routeur est constante. La définition de  $R_i(t)$  permet d'établir que :

$$\tau(\hat{\zeta}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{q(\hat{\zeta})}{C_r} + T_{pcs} \right] \quad [3.29]$$

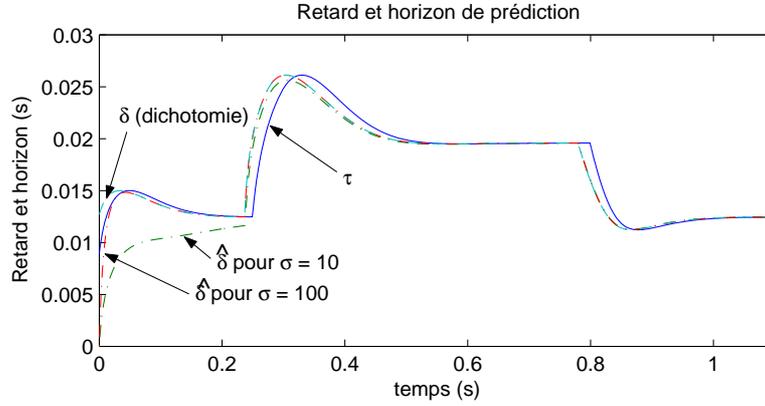


Figure 3.3. État du réseau et calcul de  $\delta(t)$

En dérivant l'équation précédente et en substituant la dynamique de la file d'attente  $\dot{q}(t)$  présentée dans le modèle, nous obtenons :

$$\frac{d\tau}{d\hat{\zeta}}(\hat{\zeta}) = \frac{1}{2C_r} \left[ \sum_{i=1}^{N(\hat{\zeta})} \frac{W_i(\hat{\zeta})}{R_i(\hat{\zeta})} - C_r \right] \quad [3.30]$$

où  $R_i(\hat{\zeta})$  est obtenu avec le calcul de  $q(\hat{\zeta})$ .  $N(\hat{\zeta})$  est supposé connu sur l'horizon  $[t, t + \tau_{max}]$ , permettant ainsi la prédiction du modèle du retard. L'évolution temporelle des variables  $W_i(\hat{\zeta})$  et  $q(\hat{\zeta})$  est obtenue à partir de la dynamique du modèle, en évaluant de manière continue ses solutions jusqu'à l'instant  $(t + \tau_{max})$ . Les équations [3.29]-[3.30] peuvent maintenant être substituées dans [3.27] afin d'évaluer  $\dot{\delta}(t)$ .

Un dernier exemple est introduit ici afin de présenter une application numérique permettant de comparer la solution exacte de  $\delta(t)$ , calculée par dichotomie, avec son estimation obtenue par résolution dynamique :

EXEMPLE.— Nous considérons ici le modèle de réseau TCP présenté précédemment. Le calcul de l'estimation de l'horizon de prédiction  $\hat{\delta}(t)$  s'effectue à partir des équations [3.29]-[3.30] avec  $\hat{\delta}(0) = 0$ , ce qui correspond au pire cas possible. Nous pourrions en effet éliminer l'effet des transitoires en calculant la condition initiale avec une méthode numérique, mais le but ici est d'illustrer la qualité de la méthode dynamique ainsi que sa simplicité d'utilisation.

La figure 3.3 permet une comparaison entre les horizons de prédiction obtenus avec la méthode par dichotomie (solution exacte), et ceux fournis par l'approche dynamique, pour  $\sigma = 10$  et  $\sigma = 100$ . Nous pouvons apprécier grâce à la figure 3.4 l'efficacité de la méthode dynamique, qui converge rapidement vers la solution exacte

pour un  $\sigma$  suffisamment grand. Notons que le pic est dû à la perturbation intervenant sur le réseau, induisant une discontinuité dans la dérivée de  $\tau(t)$ .

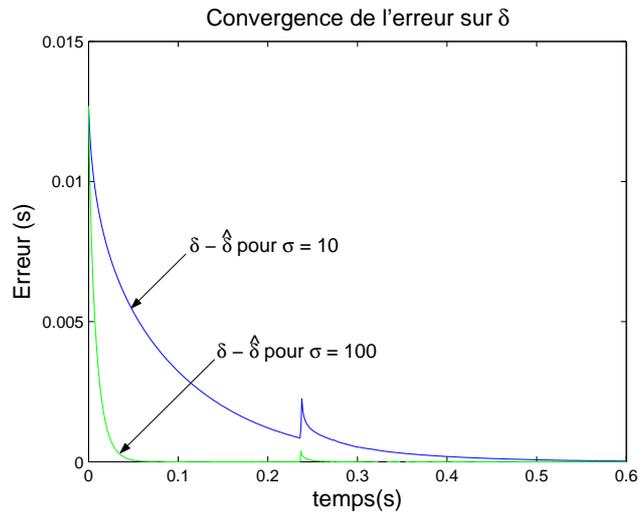


Figure 3.4. Erreur induite par la méthode dynamique sur  $\delta(t)$

### 3.4. Prédicteur à horizon estimé

Cette section est dédiée à la synthèse d'une loi de commande à horizon estimé pour la stabilisation du système commandé par réseau. Nous verrons en premier lieu la formalisation de l'influence de l'estimation de l'horizon de prédiction sur le système en boucle fermée. Puis nous validerons la méthode de calcul dynamique de l'horizon proposée dans la section précédente, en garantissant la stabilité exponentielle du système bouclé. Enfin, une loi de commande utilisant explicitement la dynamique du réseau décrite par [3.3]-[3.4] sera proposée.

#### 3.4.1. Influence de l'estimation

L'estimation de l'horizon de prédiction  $\hat{\delta}(t)$  induit une nouvelle dynamique qui influence le système en boucle fermée. En effet, la commande basée sur le prédicteur d'état est maintenant évaluée à partir de l'estimation de  $\delta(t)$ , comme présenté dans la figure 3.5, et s'écrit :

$$u(t) = -K e^{A\hat{\delta}(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\hat{\delta}(t)} e^{-A\theta} B u(\theta - \tau(\theta)) d\theta \right] \quad [3.31]$$

ou, de manière équivalente :

$$u(t) = -Kx(t + \hat{\delta}(t))$$

avec  $\hat{\delta}(t)$  définie par sa dynamique [3.27]. En utilisant la même transformation sur l'espace temporel d'évolution de l'état que celle décrite en début de chapitre, l'équation dynamique considérée est<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} x'(t + \delta) &= Ax(t + \delta) + Bu(t) \\ &= Ax(t + \delta) - BKx(t + \hat{\delta}) \end{aligned} \quad [3.32]$$

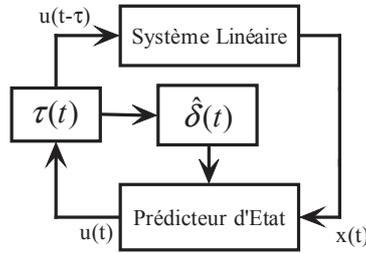


Figure 3.5. Commande à partir de l'estimation de  $\delta(t)$

Après addition et soustraction du terme  $BKx(t + \delta)$  à droite de l'égalité précédente, puis changement de variable, nous obtenons le système :

$$\Sigma_o : x'(\zeta) = (A - BK)x(\zeta) + BK(x(\zeta) - x(\zeta - \epsilon))$$

où  $\epsilon(t) = \delta(t) - \hat{\delta}(t)$  a les propriétés décrites par le théorème 3.2 et  $\zeta(t) = t + \delta(t)$ . Le système précédent peut se réécrire, par équivalence arithmétique en utilisant la formule de Leibniz-Newton :

$$x'(\zeta) = (A - BK)x(\zeta) + BK \int_{-\epsilon}^0 x'(\zeta + \theta) d\theta$$

L'expression [3.32] est ensuite substituée dans l'intégrale pour obtenir le système transformé :

$$\Sigma_t : x'(\zeta) = (A - BK)x(\zeta) + BKA \int_{-\epsilon}^0 x(\zeta + \theta) d\theta - (BK)^2 \int_{-2\epsilon}^{-\epsilon} x(\zeta + \theta) d\theta$$

3. La dépendance temporelle de  $\delta(t)$  et de  $\hat{\delta}(t)$  est omise ici pour plus de clarté.

Notons que la stabilité de  $\Sigma_t$  implique celle de  $\Sigma_o$  mais que l'inverse n'est pas vrai (principe de comparaison), du fait de la prolongation des conditions initiales sur l'espace temporel  $[\delta(0) - 2\epsilon, \delta(0) - \epsilon]$ . La stabilité du système transformé est garantie par le lemme suivant, qui est une application des résultats de [NIC 98] au problème considéré.

LEMME 3.3.– Soit le système décrit par l'évolution dynamique :

$$\begin{aligned} x'(\zeta) &= A_{cl}x(\zeta) + BKA \int_{-\epsilon}^0 x(\zeta + \theta)d\theta - (BK)^2 \int_{-2\epsilon}^{-\epsilon} x(\zeta + \theta)d\theta \\ x(\theta) &= \phi(\theta), \theta \in [t_0 - 2 \sup_t \epsilon(t), t_0], (t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_{n, -2 \sup_t \epsilon(t)}^\nu \end{aligned}$$

avec  $\zeta(t) = t + \delta(t)$ . Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- i)  $A_{cl}$  est une matrice de Hurwitz ;
- ii)  $\epsilon(t)$  satisfait [3.28] avec :

$$0 < \dot{\epsilon}_M \doteq \sup_t \dot{\epsilon}(t) < \frac{1}{2}$$

alors la trajectoire  $x(\zeta(t))$  est asymptotiquement stable.

DÉMONSTRATION.– Soit la fonction de Lyapunov-Krasovskii établie pour  $\Sigma_t$  :

$$\begin{aligned} V(x(\zeta)) &= \underbrace{x(\zeta)^T P x(\zeta)}_{V_1(x(\zeta))} + \frac{1}{1 - \dot{\epsilon}_M} \int_{-\epsilon}^0 \left[ \underbrace{\int_{\zeta+\theta}^{\zeta} x(\mu)^T S x(\mu) d\mu}_{V_2(x(\zeta))} \right] d\theta \\ &\quad + \frac{\alpha}{1 - 2\dot{\epsilon}_M} \int_{-2\epsilon}^{-\epsilon} \left[ \underbrace{\int_{\zeta+\theta}^{\zeta} x(\mu)^T S x(\mu) d\mu}_{V_3(x(\zeta))} \right] d\theta \end{aligned}$$

avec  $P$  et  $S$  des matrices symétriques définies positives, et :

$$0 < \alpha < \frac{1 - 2\dot{\epsilon}_M}{\dot{\epsilon}_M} \quad [3.33]$$

La dérivée de  $V$  le long des solutions de  $\Sigma_t$  est obtenue par sommation pondérée des éléments :

$$\begin{aligned}\frac{dV_1(x(\zeta))}{d\zeta} &= x(\zeta)^T [PA_{cl} + A_{cl}^T P]x(\zeta) + 2x(\zeta)^T PBKA \int_{-\epsilon}^0 x(\zeta + \theta)d\theta \\ &\quad - 2x(\zeta)^T P(BK)^2 \int_{-2\epsilon}^{-\epsilon} x(\zeta + \theta)d\theta \\ \frac{dV_2(x(\zeta))}{d\zeta} &\leq \epsilon x(\theta)^T S_1 x(\theta) - (1 - \dot{\epsilon}_M) \int_{-\epsilon}^0 x(\zeta + \theta)^T S x(\zeta + \theta)d\theta \\ \frac{dV_3(x(\zeta))}{d\zeta} &\leq \epsilon x(\theta)^T S x(\theta) - (1 - 2\dot{\epsilon}_M) \int_{-2\epsilon}^{\epsilon} x(\zeta + \theta)^T S x(\zeta + \theta)d\theta \\ &\quad + \dot{\epsilon}_M \int_{-\epsilon}^0 x(\zeta + \theta)^T S x(\zeta + \theta)d\theta\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[ \int_{a(t)}^{b(t)} \int_{t+\theta}^t f(\mu) d\mu d\theta \right] &= (b - a)f(t) - (1 + \dot{b}) \int_a^b f(t + \theta)d\theta \\ &\quad + (\dot{b} - \dot{a}) \int_a^0 f(t + \theta)d\theta\end{aligned}$$

Après réorganisation des termes semblables, la dérivée de  $V(\cdot)$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{dV(x(\zeta))}{d\zeta} &= x(\zeta)^T \left[ PA_{cl} + A_{cl}^T P + \left( \frac{1}{1 - \dot{\epsilon}_M} + \frac{\alpha}{1 - 2\dot{\epsilon}_M} \right) \epsilon S \right] x(\zeta) \\ &\quad + \int_{-\epsilon}^0 [2x(\zeta)^T PBKAx(\zeta + \theta) - x(\zeta + \theta)^T S x(\zeta + \theta) \\ &\quad + \frac{\alpha \dot{\epsilon}_M}{1 - 2\dot{\epsilon}_M} x(\zeta + \theta)^T S x(\zeta + \theta)] d\theta \\ &\quad + \int_{-2\epsilon}^{-\epsilon} [-2x(\zeta)^T P(BK)^2 x(\zeta + \theta) - \alpha x(\zeta + \theta)^T S x(\zeta + \theta)] d\theta\end{aligned}$$

Cette fonction peut être bornée en utilisant la relation du complément des carrés de type :

$$2u^T v \leq u^T S_i^{-1} u + v^T S_i v$$

pour  $i = 1, 2$ . Nous obtenons ainsi l'inégalité :

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(x(\zeta))}{d\zeta} &\leq x(\zeta)^T [PA_{cl} + A_{cl}^T P + \epsilon a_1 S] x(\zeta) \\
 &\quad + \int_{-\epsilon}^0 a_2 x(\zeta)^T PBKAS^{-1}(PBKA)^T x(\zeta) d\theta \\
 &\quad + \int_{-2\epsilon}^{-\epsilon} \frac{1}{\alpha} x(\zeta)^T P(BK)^2 S^{-1}(P(BK)^2)^T x(\zeta) d\theta \\
 &\leq x(\zeta)^T [PA_{cl} + A_{cl}^T P + \epsilon a_1 S + \epsilon a_2 PBKAS^{-1}(PBKA)^T \\
 &\quad + \epsilon \frac{1}{\alpha} P(BK)^2 S^{-1}(P(BK)^2)^T] \quad [3.34]
 \end{aligned}$$

avec :

$$a_1 \doteq \frac{1 + \alpha(1 - \dot{\epsilon}_M)}{(1 - \dot{\epsilon}_M)(1 - 2\dot{\epsilon}_M)}, \quad a_2 \doteq \frac{1 - 2\dot{\epsilon}_M}{1 - (2 + \alpha)\dot{\epsilon}_M} \quad [3.35]$$

des constantes positives. En introduisant les matrices :

$$\begin{aligned}
 R &\doteq a_1 S + a_2 PBKAS^{-1}(PBKA)^T + \frac{1}{\alpha} P(BK)^2 S^{-1}(P(BK)^2)^T \\
 Q &\doteq -(PA_{cl} + A_{cl}^T P)
 \end{aligned}$$

qui sont définies positives par construction et par l'hypothèse  $i$ ), respectivement, l'inégalité précédente s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(x(\zeta))}{d\zeta} &\leq -x(\zeta)^T Q x(\zeta) + \epsilon x(\zeta)^T R x(\zeta) \\
 &\leq (-\lambda_m(Q) + |\epsilon| \lambda_M(R)) \|x(\zeta)\|^2
 \end{aligned}$$

La convergence de la fonction  $\epsilon(t)$  nous assure qu'il existe un temps  $t_c$  tel que :

$$|\epsilon(t)| < \frac{\lambda_m(Q)}{\lambda_M(R)}$$

pour tout  $t > t_c$ , et donc que la fonction de Lyapunov-Krasovskii converge pour tout  $x(\zeta) \in \{x(\zeta(t)) : t > t_c\}$ . Ceci permet de conclure que  $\Sigma_t$  est asymptotiquement stable (voir [KHA 96] pour plus de précision concernant la stabilité).

REMARQUE.— Bien que la méthode utilisée pour établir le lemme précédent puisse sembler conservative, notamment au niveau des bornes imposées sur la variation de

l'erreur, elle reste appropriée pour soutenir le propos de cette section. En effet, ces bornes sont déterminées par un choix approprié de la constante  $\sigma$ , qui doit être choisie telle que :

$$\sigma < \frac{1 - \nu}{2|\hat{\delta}_0 - \tau(\hat{\delta}_0)|}$$

L'influence de l'estimation dynamique de l'horizon de prédiction peut être étudiée de manière plus précise en déterminant à quel instant  $t$  l'erreur d'estimation  $\epsilon(t)$  est suffisamment petite pour que les trajectoires du système suivent une décroissance exponentielle. Ceci est réalisé dans le corollaire suivant, qui spécifie cette erreur maximale et dont le résultat pourra être utilisé pour déterminer le temps associé.

**COROLLAIRE 3.2.**— *Si les conditions du lemme 3.3 sont satisfaites, si l'horizon de prédiction vérifie les propriétés :*

- i)  $0 \leq \delta(t) \leq \delta_M < \infty$ ;
- ii)  $-1 < \dot{\delta}(t) < \infty$ ;

et si  $\epsilon(t)$  est tel que :

- 1) il existe des matrices  $P$  et  $S$  définies positives ;
- 2) la LMI suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} PA_{cl} + A_{cl}^T P + \epsilon a_1 S & \epsilon PBKA & \epsilon P(BK)^2 \\ (*) & -\epsilon \frac{1}{a_2} S & 0 \\ (*) & (*) & -\epsilon \alpha S \end{bmatrix} < 0 \quad [3.36]$$

où (\*) représente le bloc obtenu par symétrie et  $a_1, a_2, \alpha$  sont définis par [3.33]-[3.35]; alors les trajectoires du système en boucle fermée [3.1]-[3.31], avec l'horizon de prédiction estimé par [3.27], convergent exponentiellement vers zéro pour tout  $\zeta(t) \geq \zeta(0)$ .

**DÉMONSTRATION.**— *L'application du complément de Schur sur l'inégalité [3.34] permet d'établir que la dérivée de la fonction de Lyapunov-Krasovshii est négative si  $\epsilon$  est tel que la LMI [3.36] soit vérifiée. Ceci reste vrai pour l'évolution temporelle l'état  $x(\zeta(t))$  (en fonction de  $t$ ), sous les hypothèses i) et ii), en notant que  $\dot{V}(t) = (1 + \dot{\delta}(t))V'(\zeta)$  et en utilisant des arguments similaires à ceux présentés dans la démonstration du lemme 3.1 et le corollaire 3.1.*

REMARQUE.— La LMI [3.36] peut s'écrire sous la forme du problème de valeur propre généralisée :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 S & PBKA & P(BK)^2 \\ (*) & -\frac{1}{a_2} S & 0 \\ (*) & (*) & -\alpha S \end{bmatrix}}_{A(x)} < - \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\frac{\epsilon}{\lambda}} \underbrace{\begin{bmatrix} PA_{cl} + A_{cl}^T P & 0 & 0 \\ (*) & 0 & 0 \\ (*) & (*) & 0 \end{bmatrix}}_{-B(x)} \quad [3.37]$$

avec  $C(x) = \text{diag}(P, S) > 0$ , où  $A(x)$ ,  $B(x)$  et  $C(x)$  sont des fonctions affine de  $x$ , le vecteur des variables de décision constitué à partir de  $P$  et  $S$ . Ce problème s'exprime sous sa forme générale :

$$\text{minimiser } \lambda, \text{ tel que } \lambda B(x) - A(x) > 0, B(x) > 0, C(x) > 0$$

Notons ici que la matrice  $B(x)$  de l'inégalité [3.37] est semi-définie positive. Il convient donc de reformuler ce problème afin qu'il soit bien posé. Pour cela, nous introduisons la matrice auxiliaire  $Y > 0$ , ce qui permet d'écrire le problème d'optimisation final :

$$\begin{aligned} \min_{P, S, Y} \frac{1}{\epsilon}, \quad & \text{sous les contraintes :} \\ & P > 0, S > 0, Y > 0 \\ & \begin{bmatrix} a_1 S - Y & PBKA & P(BK)^2 \\ (*) & -\frac{1}{a_2} S & 0 \\ (*) & (*) & -\alpha S \end{bmatrix} < 0 \\ & 0 < -PA_{cl} - A_{cl}^T P \\ & Y < \frac{1}{\epsilon} (-PA_{cl} - A_{cl}^T P) \end{aligned}$$

La formulation obtenue dans la précédente remarque permet d'évaluer l'erreur d'estimation de l'horizon qui garantit la convergence exponentielle de l'état. Ce résultat, associé à celui présenté dans le théorème 3.2 et aux caractéristiques intrinsèques du système considéré (dynamique de l'état et du retard), conduit à une estimation du temps  $t_c$  à partir duquel le système va converger. Cet instant est obtenu grâce à la relation :

$$t_c = -\frac{1}{\sigma} \ln \left( \frac{1 - \nu}{|\hat{\delta}_0 - \tau(\hat{\delta}_0)|} \epsilon(t_c) \right)$$

Nous pouvons donc en déduire que l'état  $x(t)$  converge exponentiellement vers zéro pour tout  $t \geq t_c + \delta(t_c)$ . Cette démarche est illustrée par l'exemple suivant :

EXEMPLE.– Soit le pendule inversé en forme de “T” ayant pour dynamique :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18,78 & 0 & 14,82 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 56,92 & 0 & -15,18 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 7,52 \\ 0 \\ -8,82 \end{bmatrix} u(t - \tau(t))$$

Le gain de commande  $K$  est choisi pour placer les pôles de la matrice  $A_{cl}$  en  $[-8 + 0,5i; -8 - 0,5i; -16; -32]$ . La valeur de  $\dot{\epsilon}_M$  est fixée à  $0,36$  et  $\alpha = 0,9 \times \frac{1 - 2\dot{\epsilon}_M}{\dot{\epsilon}_M} = 0,7$ . Le problème d'optimisation exprimé dans la remarque précédente est résolu en prenant les conditions initiales :

- $S_0 = I$ ;
- $P_0 > 0$  solution de  $P_0 A_{cl} + A_{cl}^T P_0 < 0$ ;
- $\epsilon_0 = \frac{\lambda_m(Q_0)}{\lambda_M(R_0)}$  avec  $Q_0$  et  $R_0$  définis comme dans la démonstration précédente;
- $Y_0 > 0$  solution de  $a_1 S_0 - Y_0 < 0$  et de  $Y_0 < -\frac{1}{\epsilon_0} (P_0 A_{cl} + A_{cl}^T P_0)$ .

Nous obtenons ainsi une erreur d'estimation admissible, au sens où :

$$\frac{dV(x(\zeta))}{d\zeta} < 0$$

de  $\epsilon = 2,3$  ms. Notons ici que l'utilisation de conditions initiales  $S_0, P_0, Y_0$  et  $\epsilon_0$  permet une légère amélioration de la solution trouvée ( $\epsilon$  augmente d'environ 1,5%), du fait de la méthode numérique utilisée. L'amplitude des solutions peut être contrainte en modifiant le rayon de faisabilité ou en introduisant des LMIs de type :

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P > 0, Y > 0, \lambda_{\min}(PY) > 1$$

mais ceci n'influence pas la solution optimale.

En considérant le retard induit par le réseau TCP, de valeur initiale  $\tau(0) = 8,96$  ms et de dérivée maximale  $\nu = 0,617$ , l'instant de convergence est déterminé par  $t_c = 233,4$  ms et l'état  $x(t)$  suit une décroissance exponentielle pour  $t > t_c + \delta(t_c) = 245,8$  ms, pour une vitesse de convergence de l'approximation déterminée par  $\sigma =$

10. Le dernier calcul est effectué en utilisant la dichotomie pour évaluer  $\delta(t_c)$ , étant donné la faible vitesse de convergence choisie.

REMARQUE.— La variation maximale admissible de l'erreur  $\dot{\epsilon}_M$  est donnée par le degré de fiabilité du réseau ou peut être ajustée par l'utilisateur du réseau si une file de stockage est mise en place en entrée du récepteur (utilisation du protocole de transfert à ce niveau pour les nécessités de la commande).

### 3.4.2. Formulation finale

Nous avons pu voir au cours de ce chapitre comment l'effet retard du réseau peut être compensé avec un prédicteur d'état à horizon temps variant. Plusieurs méthodes ont été proposées pour calculer cet horizon, de manière statique ou dynamique. La méthode dynamique étant la plus efficace, au niveau du temps de calcul, c'est celle que nous avons retenue pour la suite du travail. Une analyse de robustesse du système bouclé vis-à-vis de l'erreur d'estimation nous a permis d'établir la stabilité de l'état, et notamment que la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation induit la stabilité exponentielle de l'état. La dernière étape, décrite dans cette section, vise à décrire la loi de commande comme une fonction *explicite* du retard et à montrer que la stabilité est assurée pour un retard vérifiant [3.5]-[3.6]. Ceci est établi par le théorème suivant :

THÉORÈME 3.3.— Soit le système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau(t))$$

où la paire  $(A, B)$  est commandable. En supposant que la dynamique du retard décrite par [3.3]-[3.4] est telle que les conditions suivantes sont satisfaites pour tout  $t$  :

$$A1) \tau(t) \in \mathcal{C}(R^+, [0, \tau_{max}]);$$

$$A2) \dot{\tau}(t) < 1;$$

$$A3) 0 < \dot{\epsilon}_M \doteq \sup_t \dot{\epsilon}(t) < \frac{1}{2};$$

alors la loi de commande par retour d'état :

$$u(t) = -Ke^{A\hat{\delta}(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\hat{\delta}(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau(\theta)) d\theta \right]$$

$$\dot{\hat{\delta}}(t) = -\Phi_1 \left( \frac{d\tau(\zeta)}{d\zeta} \right) \hat{\delta} + \Phi_2 \left( \frac{d\tau(\zeta)}{d\zeta}, \tau(\zeta) \right)$$

$$\frac{d\tau}{d\zeta}(\zeta) = \frac{dh}{d\zeta}(z(\zeta), u_d(\zeta))$$

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta) = f(z(\zeta), u_d(\zeta)), \quad z(0) = z_0$$

avec  $\zeta = \zeta(t) = 1 + \hat{\delta}(t)$ ,  $\sigma$  une constante positive,  $\hat{\delta}(0) = \hat{\delta}_0 \in [0, \tau_{max}]$ , et :

$$\begin{aligned}\Phi_1(d\tau(\zeta)/d\zeta) &= \frac{\sigma}{1 - d\tau(\zeta)/d\zeta} \\ \Phi_2(d\tau(\zeta)/d\zeta, \tau(\zeta)) &= \frac{d\tau(\zeta)/d\zeta + \sigma\tau(\zeta)}{1 - d\tau(\zeta)/d\zeta}\end{aligned}$$

assure que le système en boucle fermée est borné, et que la trajectoire de  $x(t)$  converge exponentiellement vers zéro.

**DÉMONSTRATION.**— Ce théorème est la suite logique du développement effectué au cours de ce chapitre. En effet, les hypothèses (A1) et (A2) permettent :

- de garantir la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation du fait que les conditions du théorème 3.2 sont vérifiées ;
- d'avoir les conditions nécessaires au corollaire 3.2 sur la dynamique de l'horizon de prédiction  $\delta(t)$ , par application de la proposition 3.2.

Le fait que la paire  $(A, B)$  soit commandable permet de garantir qu'il existe un gain  $K$  tel que  $A - BK$  soit une matrice de Hurwitz. Nous pouvons donc appliquer le lemme 3.3 ainsi que le corollaire 3.2, en notant que le fait d'avoir la garantie d'une trajectoire bornée (résultat du lemme) avant l'instant de convergence exponentielle nous assure qu'il existe une fonction exponentielle décroissante bornant supérieurement la valeur absolue de la trajectoire tout au long de son évolution (pour  $t \in \mathbb{R}$ ).

**REMARQUE.**— Cette loi de commande nécessite de garder en mémoire les signaux de commande émis durant l'intervalle temporel  $[t - \tau_{max}, t]$ . De plus, le calcul de l'horizon de prédiction implique une connaissance du retard sur l'intervalle  $[t, t + \tau_{max}]$ . Cette dernière hypothèse est la plus restrictive ; elle peut être satisfaite :

- pour les systèmes périodiques, grâce à la connaissance du cycle suivant ;
- pour les systèmes entièrement déterministes, en utilisant un prédicteur d'état sur le retard (éventuellement non linéaire) ;
- de manière plus générale, en combinant un observateur et un prédicteur sur le retard.

Notons que l'algorithme d'émission peut être utilisé à ce niveau pour rendre un réseau a périodique complètement déterministe. En effet, supposons qu'une source émette un signal, de taille négligeable, informant de son intention d'utiliser le réseau et attende durant un temps  $\tau_{max}$  avant d'émettre. Le nombre de sources prévoyant d'utiliser le réseau est ainsi connu en avance et un modèle des protocoles d'émission et de la file d'attente peut être utilisé afin de prédire l'évolution du retard de manière précise.

L'utilisation du prédicteur d'état à horizon variable pour compenser le retard temps variant conduit à un contrôleur discret à *dimension variable*. Nous estimons la partie intégrale de la loi de commande en utilisant la méthode des rectangles *backward*, en choisissant un pas d'intégration fixe et égal à la période d'échantillonnage  $T_s$ . Il en résulte que le nombre de pas  $n_k = n(t_k)$  nécessaires pour estimer l'intégrale à un instant donné  $t = t_k$  dépend de  $\hat{\delta}_k = \hat{\delta}(t_k)$  et est défini par  $n_k \doteq \hat{\delta}_k/T_s$ . Ceci conduit à l'approximation suivante du terme intégral :

$$\begin{aligned} I_k &= I(t_k) \doteq e^{At_k} \int_{t_k}^{t_k + \hat{\delta}(t_k)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau(\theta)) d\theta \\ &\approx T_s \sum_{i=0}^{n_k-1} e^{-iAT_s} Bu(k+i - \frac{\tau(k+i)}{T_s}) \end{aligned}$$

où le retard est supposé être un multiple de la période d'échantillonnage. Cette hypothèse n'est pas trop restrictive si la période d'échantillonnage est suffisamment petite par rapport au retard, afin que la partie fractionnelle  $\tau(k+i)/T_s$  puisse être négligée dans l'approximation de l'intégrale.

La partie prédictive de la loi de commande proposée dans le théorème précédent peut maintenant être exprimée de manière discrète :

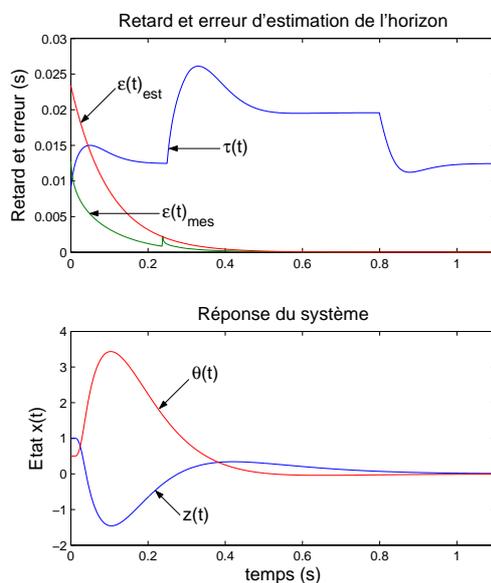
$$u_k = -K e^{A\hat{\delta}_k} (x_k + I_k) \quad [3.38]$$

Le terme d'exponentielle de matrice peut être calculé de manière approchée en utilisant la méthode de Krylov [SID 98] ou de façon exacte par la méthode des composantes de matrices [BOR 92].

EXEMPLE.— Nous considérons ici la stabilisation à distance du pendule inversé ayant comme condition initiale :

$$x(0) = [1 \ 0 \ 0,5 \ 0]^T$$

Le réseau a les propriétés décrites précédemment et induit le retard  $\tau(t)$  présenté en haut de la figure 3.6. L'évolution temporelle de l'erreur d'estimation de l'horizon de prédiction induite par l'utilisation de l'approche dynamique pour le calcul de  $\delta(t)$  est aussi présentée. Une première courbe, notée  $\epsilon_{mes}$ , montre l'erreur d'estimation calculée à partir de la différence entre  $\hat{\delta}(t)$  et  $\delta(t)$  obtenu par dichotomie. La seconde, notée  $\epsilon_{est}$ , est la borne supérieure obtenue avec le théorème 3.2. La comparaison de ces deux courbes permet d'évaluer le conservatisme induit par ce théorème, qui est assez important initialement puis se réduit. L'augmentation du retard (et de l'erreur



**Figure 3.6.** Réponse du système à une condition initiale non nulle

d'estimation) induite par l'émission de la source perturbatrice reste cependant dans les bornes prévues par le théorème. Les conditions initiales sur la commande sont considérées comme nulles, avec :

$$u(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in [-\tau_{max}, 0]$$

et une période d'échantillonnage utilisée pour l'estimation de la partie intégrale de la commande de 1 ms. Le système est simulé de manière continue. Le bas de la figure 3.6 montre la stabilisation du pendule inversé en T, avec l'évolution de deux états le caractérisant (position de la barre en translation et angle de la barre verticale). Notons ici le temps de latence induit par le retard (d'une centaine de millisecondes), temps pendant lequel l'état diverge du fait des conditions initiales non nulles et de son instabilité. Puis le signal de commande atteint le système, produisant des trajectoires inverses à celles de la stabilisation du fait de la nature du pendule, qui est à non minimum de phase. Une fois cet effet passé, les trajectoires se stabilisent de manière exponentielle.

Notons que l'effet du retard n'apparaît pas de manière explicite sur l'évolution du système, une fois la période de latence passée, du fait de la loi de commande choisie. En effet, la prédiction permet d'enlever le retard de la boucle. Cette simulation illustre l'efficacité théorique de la loi de commande proposée dans le théorème 3.3 pour stabiliser un système ayant des conditions initiales non nulles.

### 3.5. Comparaison avec les méthodes de commande classiques

Le but de cette section est de fournir quelques éléments justifiant l'utilisation d'un prédicteur à horizon variable plutôt qu'un simple retour d'état, un prédicteur à horizon fixe ou une stratégie de tampon. Ces éléments sont d'ordre qualitatif et sont illustrés par un exemple.

Il est clair que l'utilisation d'un prédicteur pour compenser le retard ne se justifie que pour des applications où les dynamiques du système sont rapides par rapport à l'amplitude du retard généré par le réseau. En effet, un simple retour d'état de type :

$$u(t) = -Kx(t)$$

permet d'assurer la stabilité d'un système linéaire pour un retard suffisamment petit par rapport aux modes propres du système bouclé (marge de stabilité). Dans le cas d'applications plus sensibles où ce n'est pas le cas, la compensation du retard s'avère préférable voire nécessaire. L'instabilité induite par un retard fixe d'amplitude non négligeable, tel que celui généré par des lignes de transmission homogènes ou des temps de calcul constants, peut être compensée avec un prédicteur d'état à horizon fixe.

Dans le cadre de la commande des systèmes commandés par réseau, nous considérons des retards dont la valeur moyenne est assez peu représentative. Ces retards sont fortement dépendants de l'état de charge du réseau et peuvent varier de manière drastique d'un instant à l'autre. Ce problème de *gigue* induit des variations de phase difficilement compensables et justifie l'utilisation d'un prédicteur à horizon variable. Ceci est illustré dans l'exemple suivant :

EXEMPLE.– Soient le pendule inversé et le réseau décrits dans les exemples précédents. Nous étudions la réponse du système pour quatre lois de commande différentes :

- retour d'état ;
- prédicteur à horizon variable ;
- prédicteur à horizon fixe, d'horizon égal au retard maximal ;
- la mise en œuvre d'une stratégie de tampon, consistant à ajouter un *buffer* en entrée du système afin de rendre le retard constant (égal à sa valeur maximale  $\tau_{max}$ ), combinée au prédicteur précédent.

Afin de comparer ces méthodes, la réponse du système à une condition initiale non nulle et son comportement lorsque la mesure est erronée (bruit blanc de puissance 0,01) sont illustrés par la figure 3.7. L'évolution temporelle de l'angle du pendule inversé montre que, par rapport à l'utilisation d'un prédicteur à horizon variable :

- le simple retour d'état induit un dépassement et de légères oscillations lors d'une condition initiale non nulle, et des oscillations importantes lorsqu'un bruit de mesure est ajouté ;

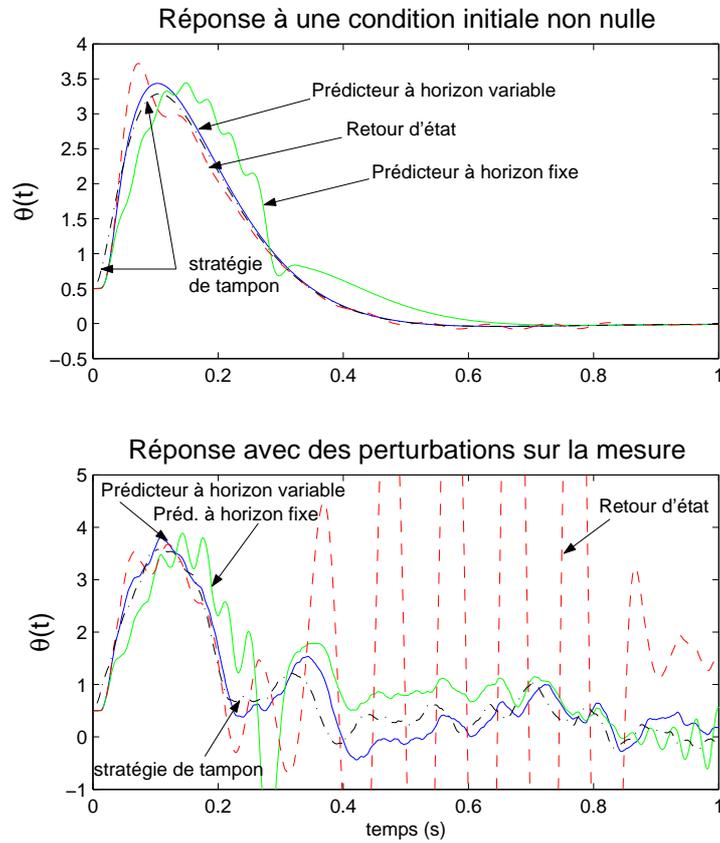


Figure 3.7. Réponse du système avec diverses lois de commande

– le prédicteur à horizon fixe, bien que plus approprié que le contrôleur précédent, induit des oscillations et un temps de stabilisation plus long lors d'une condition initiale non nulle, et est plus sensible aux bruits de mesure ;

– la stratégie de tampon montre une divergence initiale (due au retard plus important induit par le tampon) rapidement compensée et présente des performances similaires à celles du prédicteur à horizon variable (pic légèrement plus faible). Cependant, des résultats expérimentaux [WIT 05] ont montré un comportement détérioré en régime transitoire dans le cas de la poursuite de trajectoire. Cette stratégie a l'avantage d'être plus simple à mettre en œuvre au niveau du correcteur mais introduit une complexité au niveau du système. Outre la présence du tampon, elle implique en effet soit de connaître le retard réel au niveau du système pour l'incrémenter au niveau du

retard maximum, soit un synchronisation des horloges entre le correcteur et le système (ce qui peut être une problématique de recherche en soi lorsque l'utilisation d'un GPS n'est pas possible). De plus, l'augmentation du temps de réponse à une entrée de commande peut s'avérer un facteur limitant pour les systèmes à dynamique rapide.

Notons que les effets précédents sont largement amplifiés pour des retards d'amplitude et/ou de variation plus importante.

### 3.6. Construction d'un observateur d'état en vue de la commande

Dans cette partie, un observateur sera développé pour le système commandé par réseau. Nous considérons que cet observateur est implanté avec la commande. Il reçoit donc des mesures retardées, et est utilisé dans la commande, elle-même appliquée avec un retard. Ces deux retards sont potentiellement variables et différents.

Le système est supposé satisfaire la représentation suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau_2(t)), \quad x(0) = x_0 \quad [3.39]$$

$$y(t) = Cx(t) \quad [3.40]$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est la valeur instantanée de l'état interne du système,  $u \in \mathbb{R}^l$  est l'entrée de commande,  $y \in \mathbb{R}^m$  est la sortie mesurée, et  $A, B, C$  sont des matrices aux dimensions appropriées,  $\tau_2(t)$  est le retard de transfert d'information du calculateur vers le système. L'observateur-contrôleur est supposé de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t - \tau_2(t - \tau_1(t))) \\ &\quad - L(y(t - \tau_1(t)) - C\hat{x}(t - \tau_1(t))) \end{aligned} \quad [3.41]$$

$$u(t) = -K\hat{x}(t + \delta(t)) \quad [3.42]$$

où  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  est la valeur instantanée de l'état de l'observateur et  $\tau_1(t)$  le retard entre le système et le calculateur. Notons que le terme de commande calculé à l'instant  $t - \tau_2(t - \tau_1(t))$  est utilisé ici, en supposant que les retards sont mesurés lors du transfert d'informations *via* le réseau. Seule est donc connue, dans le calculateur, la valeur  $\tau_2(t - \tau_1(t))$  ( $\tau_2(t)$  étant le retard appliqué au système à l'instant courant). L'erreur d'estimation, notée  $e(t) \doteq x(t) - \hat{x}(t)$ , satisfait alors le système dynamique suivant :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t + \delta(t)) &= Ae(t + \delta(t)) - LCe(t + \delta(t) - \tau_1(t + \delta(t))) \\ &\quad + Bu(t + \delta(t) - \tau_2(t + \delta(t))) \\ &\quad - Bu(t + \delta(t) - \tau_2(t + \delta(t) - \tau_1(t + \delta(t)))) \end{aligned} \quad [3.43]$$

En utilisant l'hypothèse  $\delta(t) - \tau_2(t + \delta(t)) = 0$  et en notant  $\xi(t) \doteq \delta(t) - \tau_1(t + \delta(t))$ , on définit la fonction :

$$\begin{aligned} w_u(t + \delta(t)) &\doteq u(t) - u(t + \delta(t) - \tau_2(t + \xi(t))) \\ &= u(t) - u(t + \tau_2(t + \delta(t)) - \tau_2(t + \xi(t))) \end{aligned} \quad [3.44]$$

qui sera considérée par la suite comme une perturbation, ce terme pouvant être borné par une constante.

Nous pouvons aussi montrer, comme pour le système [3.32], que le système bouclé s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t + \delta(t)) &= Ax(t + \delta(t)) - BK\hat{x}(t + \hat{\delta}(t)) \\ &= (A - BK)x(t + \delta(t)) - BKe(t + \delta(t)) + BKw_x(t + \delta(t)) \end{aligned}$$

avec :

$$w_x(t + \delta(t)) \doteq \hat{x}(t + \delta(t)) - \hat{x}(t + \hat{\delta}(t)) \quad [3.45]$$

En considérant l'état étendu :

$$x_e(t) \doteq \begin{bmatrix} x(t) & e(t) \end{bmatrix}^T$$

le système étendu a pour dynamique :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(\zeta) &= \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A \end{bmatrix} x_e(\zeta) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -LC \end{bmatrix} x_e(\zeta - \tau_1(\zeta)) \\ &\quad + \begin{bmatrix} BK \\ 0 \end{bmatrix} w_x(\zeta) + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} w_u(\zeta) \end{aligned} \quad [3.46]$$

avec  $\zeta = t + \delta(t)$ . Cette représentation permet de déduire que, si le gain  $K$  de la loi de commande est connu, alors nous pouvons concevoir le gain de l'observateur sur le système réduit :

$$\dot{e}(\zeta) = Ae(\zeta) - LCe(\zeta - \tau_1(\zeta)) + Bw_u(\zeta) \quad [3.47]$$

En revanche, même si le principe de séparation nous garantit que la conception séparée des gains de la loi de commande et de l'observateur assure la stabilité du système bouclé, le système [3.46] montre que la propriété d'atténuation des perturbations pour le système bouclé dépend de l'observateur. En effet, à partir de [3.46], nous

pouvons en déduire que l'état du système bouclé dépend de l'erreur d'estimation et des perturbations  $w_x$  et  $w_u$ . En revanche, l'erreur d'estimation ne dépend que de la perturbation  $w_u$ .

L'objectif est donc de trouver un gain  $L$  qui garantisse la stabilité du système [3.46] ainsi qu'une atténuation, au sens  $H_\infty$ , de la perturbation  $w_u$ . Notons que ce problème est équivalent à stabiliser un système à retard variable sur l'entrée. Dans cet objectif, de nombreuses méthodes peuvent être utilisées parmi celles qui traitent de la stabilité des systèmes à retards variables sur l'état (avec des critères soit indépendant soit dépendant du retard). Vu que nous considérons ici des retards variables bornés, les méthodes existantes sont en général comparées vis-à-vis de leur conservatisme quant à l'évaluation de la borne sur le retard admissible et sur sa dérivée. Ainsi, parmi les résultats récents que l'on peut trouver, citons [FRI 03, WU 04], nous nous sommes appuyés ici sur la méthodologie développée dans [WU 04] car elle est simple à mettre en œuvre et mène à des résultats peu conservatifs. Toutefois, comme la méthode de [WU 04] ne concerne que la stabilité, nous avons étendu la formulation, afin d'inclure la synthèse du gain  $L$  de l'observateur dans une formulation de type  $H_\infty$ . Le résultat principal est alors le suivant :

**THÉORÈME 3.4.**— *Considérons le système à retard [3.39] et l'observateur [3.41]. Etant donné un scalaire positif  $\gamma$ , s'il existe des matrices symétriques définies positives  $P = P^T > 0$ ,  $Q = Q^T > 0$ , une matrice définie positive :*

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} > 0$$

*et des matrices quelconques de dimensions appropriées  $Y$ ,  $T$  et  $Z$  satisfaisant les LMI suivantes :*

$$\oplus = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \tau_{max} A^T P & PB \\ * & \Phi_{22} & -\tau_{max} C^T Z^T & 0 \\ * & * & -\tau_{max} P & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} < 0 \quad [3.48]$$

$$\ominus = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & Y \\ * & X_{22} & T \\ * & * & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad [3.49]$$

*avec :*

$$\Phi_{11} = PA + A^T P + Y + Y^T + Q + \tau_{max} X_{11} \quad [3.50]$$

$$\Phi_{12} = -ZC - Y + T^T + \tau_{max} X_{12} \quad [3.51]$$

$$\Phi_{22} = -T - T^T - (1 - \zeta)Q + \tau_{max} X_{22} \quad [3.52]$$

où \* désigne l'élément symétrique, alors la matrice suivante :

$$L = P^{-1}Z \quad [3.53]$$

garantit que l'erreur d'observation [3.43] est stable pour tout retard  $\tau_1(t)$  tel que  $\tau_1(t) \leq \tau_{max}$  et  $\dot{\tau}_1(t) \leq \nu$ , et satisfait :

$$\frac{\|e(t)\|_2}{\|w_u(t)\|_2} \leq \gamma$$

Enfin, si l'atténuation minimale est recherchée, alors on doit résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \gamma_{min}^2 &= \min_{P,Q,X,Y,T,Z} \gamma^2 \\ \text{t.q. } \oplus &< 0, \ominus \geq 0, P > 0, Q > 0, X > 0 \end{aligned} \quad [3.54]$$

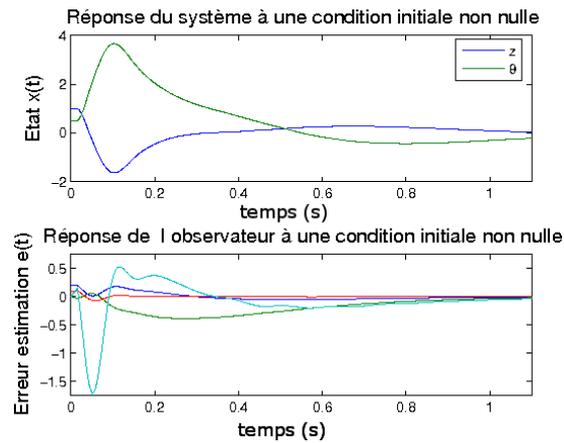


Figure 3.8. Réponse du système de commande avec observateur à une condition initiale non nulle

EXEMPLE.— Nous considérons ici l'exemple précédent du pendule T inversé avec comme mesures la position de la barre en translation et l'angle de la barre verticale. Nous cherchons à trouver le gain  $L$  de l'observateur, en supposant  $\tau_{max} = 60 \text{ ms}$  et  $\nu = 0,8$ , afin d'être en conformité avec ce qui a été dit précédemment. En appliquant l'optimisation [3.54], on obtient  $\gamma_{min} = 3,3147$  et :

$$L = \begin{bmatrix} 68,5514 \\ -50,8868 \\ 47,4222 \\ 729,3227 \end{bmatrix}$$

L'observateur-contrôleur est déterminé par [3.41]-[3.42], avec le retard  $\tau_2(t)$  décrit précédemment dans ce chapitre et un retard  $\tau_1(t)$  choisi 20 % plus grand que  $\tau_2(t)$ . Les conditions initiales de l'observateur sont telles que  $\hat{x}(0) = 0,8 \times x(0)$ .

L'évolution des deux sorties et des quatre erreurs d'estimation caractérisant le système (position et vitesse de la barre en translation, angle et vitesse angulaire de la barre verticale) est présentée dans la figure 3.8. En comparant ces résultats avec ceux obtenus par retour d'état (figure 3.6), nous pouvons conclure que l'observateur dégrade peu les performances du système bouclé, illustrant ainsi l'efficacité de la méthodologie proposée.

### 3.7. Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'établir une loi de commande performante et adaptée pour la stabilisation des systèmes commandés par réseaux déterministes, dans le sens où un modèle moyen est supposé disponible. La synthèse proposée prend explicitement en compte la dynamique du réseau au travers du calcul de l'horizon de prédiction, variable dans le temps. Cette commande conduit à l'élaboration d'un contrôleur à taille variable, du fait de la variation de l'horizon d'intégration. La robustesse de cette méthode vis-à-vis des incertitudes induites par l'estimation de l'horizon a aussi été étudiée. Dans le cas où l'état n'est pas complètement observable, nous avons proposé un observateur, dont la synthèse garantit l'atténuation des perturbations induites par les retards variables.

### 3.8. Remerciements

Les auteurs remercient Guy Juanele et Gérard Mouney pour leur relecture attentive ainsi que le projet NECS-CNRS/INRIA pour le financement partiel de ce travail.

### 3.9. Bibliographie

- [ART 82] ARTSTEIN Z., « Linear Systems with Delayed Control : a Reduction », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. ac-27, n°4, p. 869-879, août 1982.
- [BOR 92] BORNE P., DAUPHIN-TANGUY G., RICHARD J.-P., ROTELLA F., ZAMBETTAKIS I., *Modélisation et identification des processus. Tome 1, Méthodes et Pratiques de l'Ingénieur*, Technip, Paris, 1992.
- [COR 93] CORLESS R., GONNET G., HARE D., JEFFREY D., On Lambert's W function, Rapport n°CS-93-03, University of Waterloo, Dept. Comp. Sci., 1993.
- [EUL 79] EULER E., « De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus », *Leonhardi euleri opera omnia, ser. 1, Opera mathematica*, Bd 6, 1921, 1779.

- [FRI 03] FRIDMAN E., SHAKED U., « Delay-dependent stability and  $\mathcal{H}_\infty$  control : constant and time-varying delays », *International Journal of Control*, vol. 76, n°1, p. 48-60, 2003.
- [KHA 96] KHALIL H., *Nonlinear System, Second Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1996.
- [KIM 03] KIM D.-S., LEE Y., KWON W., PARK H., « Maximum allowable delay bounds of networked control systems », *Control Engineering Practice*, vol. 11, n°11, p. 1301-1313, 2003.
- [LAM 58] LAMBERT J., « Observationes variae in Mathesin Puram », *Acta Helvetica, physico-mathematico-anatomico-botanico-medica*, vol. 3, Bâle, Suisse, p. 128-168, 1758.
- [MAN 79] MANITIUS A., OLBROT A., « Finite spectrum assignment problem for systems with delays », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, p. 541-552, août 1979.
- [MIL 65] MILNOR J., *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, 1965.
- [MIS 00] MISRA V., GONG W.-B., TOWSLEY D., « Fluid-based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED », *Proc. of ACM SIGCOMM'00*, Stockholm, Suède, septembre 2000.
- [NIC 98] NICULESCU S.-I., DE SOUZA C., DUGARD L., DION J.-M., « Robust Exponential Stability of Uncertain Systems with Time-Varying Delays », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, n°5, p. 743-748, mai 1998.
- [NIH 89] NIHTILÄ M. T., « Adaptive control of a continuous-time system with time-varying input delay », *Systems and Control Letters*, vol. 12, p. 357-364, 1989.
- [SID 98] SIDJE R. B., « Expokit : a software package for computing matrix exponentials », *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 24, n°1, p. 130-156, mars 1998.
- [WEL 91] WELLS D., *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin Books, Middlesex, Royaume Uni, 1991.
- [WIT 03] WITRANT E., CANUDAS-DE-WIT C., GEORGES D., « Remote Output Stabilization Under Two Channels Time-Varying Delays », *Proc. of the 4<sup>th</sup> IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Rocquencourt, septembre 2003.
- [WIT 05] WITRANT E., *Stabilisation des Systèmes Commandés par Réseaux*, PhD thesis, INPG/Laboratoire d'Automatique de Grenoble, Grenoble, septembre 2005.
- [WIT 07a] WITRANT E., CANUDAS-DE-WIT C., GEORGES D., « Remote Stabilization via Communication Networks with a Distributed Control Law », *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007.
- [WIT 07b] WITRANT E., CANUDAS-DE-WIT C., GEORGES D., ALAMIR M., « On the use of State Predictors in Networked Control Systems », *Applications of Time-Delay Systems*, Springer, 2007.
- [WU 04] WU M., HE Y., SHE J.-H., LIU G.-P., « Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems », *Automatica*, vol. 40, p. 1435-1439, 2004.
- [ZHA 01] ZHANG B., BRANICKY M., PHILLIPS M., « Stability of Networked Control Systems », *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 21, n°1, p. 84-99, février 2001.

## Chapitre 4

### Index

- $H_\infty$ , 119
- équation de Leibniz-Newton, 104
- Active Queue Management, 86
- canal de transmission, 84
- causalité, 84, 85, 89, 93, 94
- fonction de Lambert, 96, 97
- fonction de Lyapunov-Krasovskii, 105, 107
- gigue, 84, 115
- linear matrix inequality (LMI), 108–110, 119
- modèle de retard, 83, 88, 94
- observateur d'état, 83, 117
- optimisation, 90, 109, 110, 120
- prédicteur à horizon fixe, 115, 116
- prédicteur à horizon variable, 115, 116
- prédicteur d'état, 83, 88, 103, 111–113, 115
- protocole de transfert, 84, 86, 111
- protocole TCP, 86, 101, 102, 110
- retard variable, 84, 119
- retour d'état, 111, 115, 121
- routeur, 84, 86, 87, 101
- stabilisation, 83, 84, 88, 103, 113, 114, 116, 121
- stabilité asymptotique, 90
- stratégie de tampon, 115, 116
- systèmes commandés par réseau, 83, 115