# Chapitre I

# Rappel sur la régulation analogique

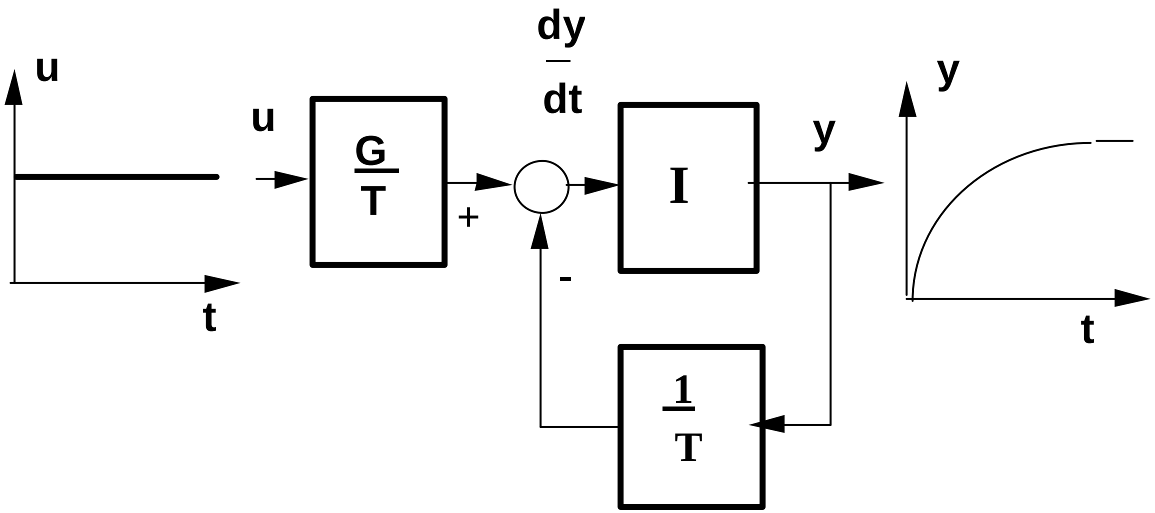
## Chapitre 1. Rappel sur la régulation analogique


**1.1 Les modèles continus**
1.1.1 Domaine temporel
1.1.2 Domaine fréquentiel
1.1.3 Stabilité
1.1.4 Réponses temporelles
1.1.5 Réponses fréquentielles
1.1.6 Etude du système du deuxième ordre
1.1.7 Systèmes avec retard
1.1.8 Systèmes à non minimum de phase
**1.2 Systèmes en boucle fermée**
1.2.1 Systèmes en cascade.
1.2.2 Fonction de transfert des systèmes en boucle fermée
1.2.3 Erreur statique
1.2.4 Rejet des perturbations
1.2 1.2.5 Analyse des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel – Lieu et critère de stabilité de Nyquist
1.3 **1.3 Synthèse des régulateurs P.I. et P.I.D**
1.3 1.3.1 Régulateur P.I
1.3.2 Régulateur P.I.D.
**1.4 Conclusion**
1.5 Notes et indications bibliographiques

# Les modèles continus

## Domaine Temporel

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}\,y(t) + \frac{G}{T}\,u(t) \quad (*)$$



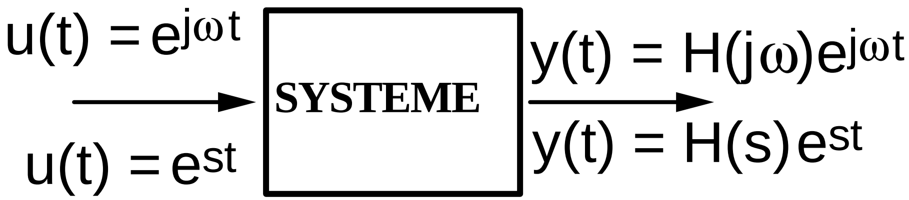

Obs.: $p = \dfrac{d}{dt}$

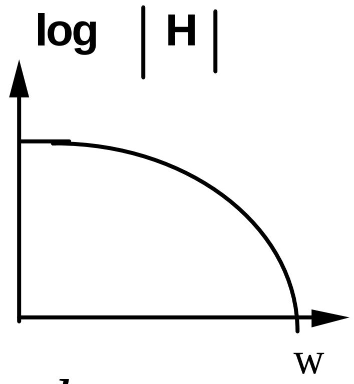
$$(p + \frac{1}{T})\,y(t) = \frac{G}{T}\,u(t)\,; \quad (*)$$

# Les modèles continus

Domaine Fréquentiel

u(t) = entrée périodique




$s = s + jw$ *s = fréquence complexe*

$$y(t) = H(s)e^{st} \qquad \frac{dy(t)}{dt} = s\,H(s)\,e^{st}$$

$$(s + \frac{1}{T})H(s)e^{st} = \frac{G}{T}e^{st} \quad (*) \quad \Rightarrow \quad \boxed{H(s) = \frac{G}{1+sT}} \quad = \text{fonction de transfert}$$

La fonction de transfert s'obtient aussi par:

-remplacement de « p » par « s » dans (*)(voir transp. 3)

-la transformée de Laplace

# Stabilité

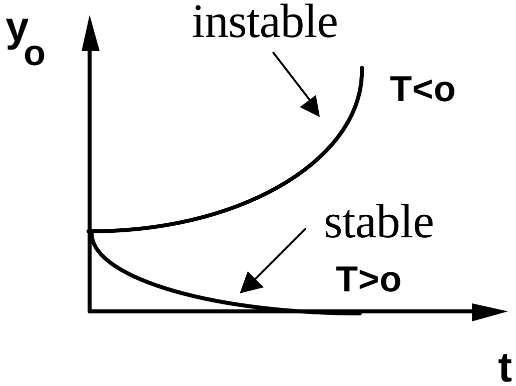
Ex.: Système du 1er ordre

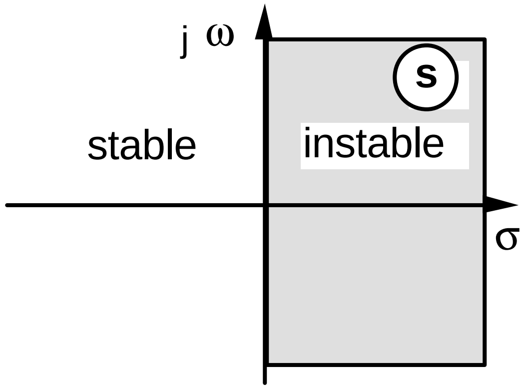
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}y(t) + \frac{G}{T}u(t) \quad \rightleftarrows \quad \text{F.T.:} \quad H(s) = \frac{G}{1+sT}$$

Réponse libre (u=0): $$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{T}y(t) = 0 \; ; \; y(0) = y_0$$

Solution: $$y(t) = Ke^{st}$$ ? ? $$\frac{dy}{dt} = s\,Ke^{st}$$

$$Ke^{st}\left(s + \frac{1}{T}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{s = -\frac{1}{T} \; ; \; K = y_0} \quad \rightarrow \quad y(t) = y_0 e^{-t/T}$$



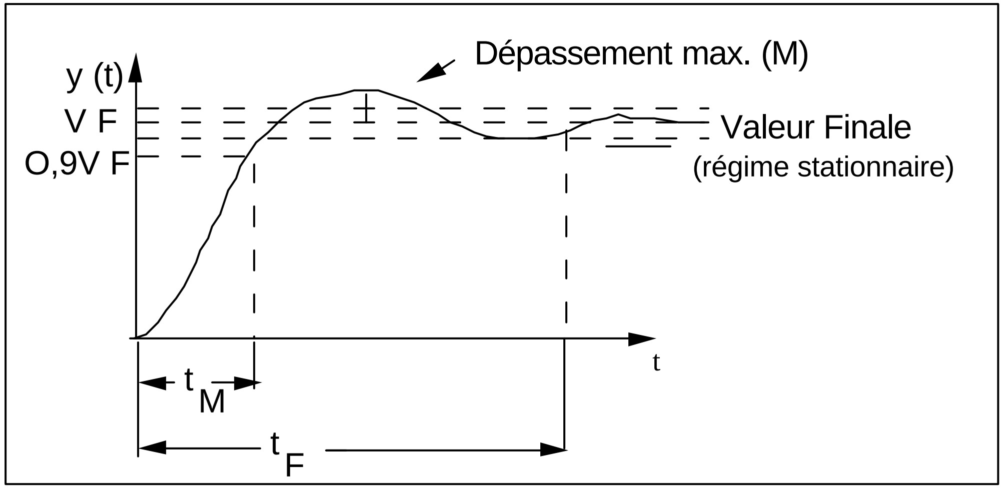
# Stabilité

**Les racines du dénominateur de la fonction de transfert déterminent la stabilité ou l'instabilité**

***Stabilité(asymptotique)*: toutes les racines ont $Re\ s < 0$**
***Instabilité*: une racine(ou plusieures) ont $Re\ s > 0$**
**$Re\ s = 0$ : cas limite de stabilité**

Il existe des critères de stabilité permettant de déterminer
L'existence de racines instables sans calcul explicite des racines.
(ex: critére de Routh – Hurwitz)

# Réponses temporelles




Entrée : *échelon unitaire*

$t_M$ – temps de montée

$t_F$ – temps d'établissement
(+/- tolérance)

VF – valeur finale

M – dépassement max.(%VF)

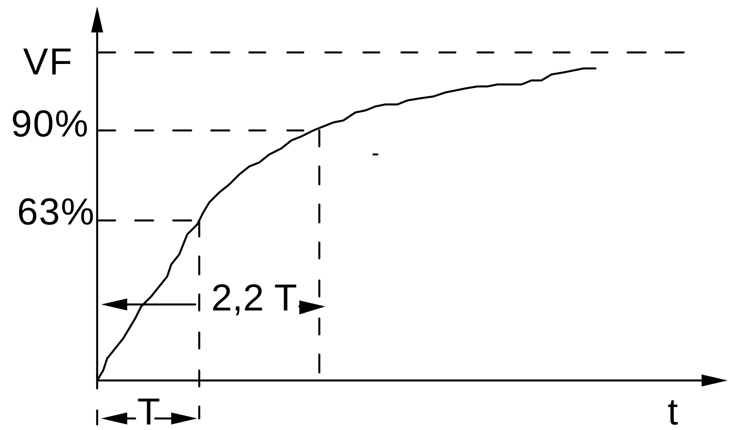
Ex : 1er ordre $H(s) = \dfrac{G}{1+sT}$

VF = G (*gain statique*);

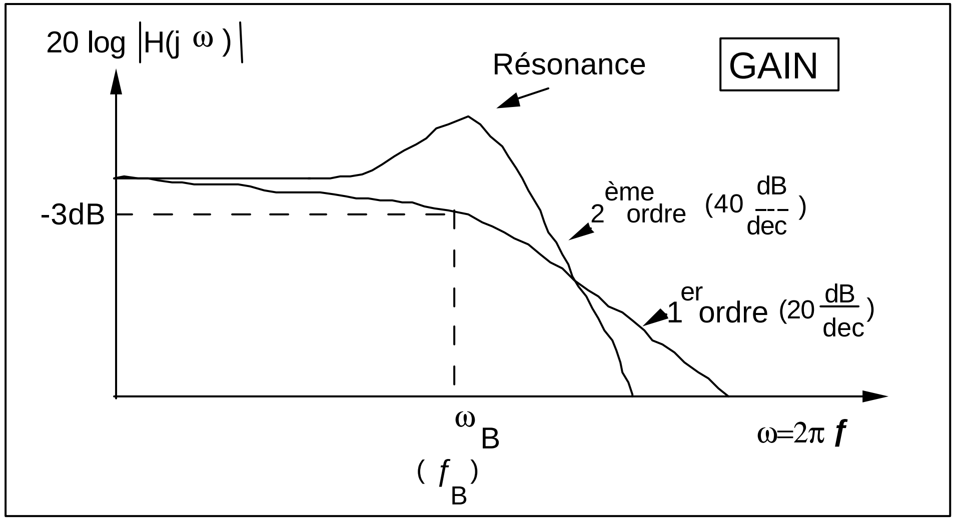
$t_M$ = 2.2T;

$t_F$ = 2.2T (+/-10%);

M = 0



# Réponses fréquentielles




(|*H*(*jw*)| *dB = 20 log* |*H*(*jw*)|

*w ( rad/s)= 2p f* (Hz)

*Pente :* dépend du nombre de pôles et de zéros et de leur distribution fréquentielle

*Pente asymptotyque (hautes fréq.)*

$$\frac{\Delta G}{\Delta w} = -(n - m)\times 20\, dB / dec$$

n = nb. de pôles; m= nb.de zéros

– $f_{BP}$($w_{BP}$) (*bande passante*) : la fréquence (pulsation) à partir de laquelle le gain à la fréquence nulle *G*(*0*) (gain stationnaire) est atténué de plus de 3 dB.

$$G(w_{BP}) = G(0) - 3dB; \qquad (G(w_{BP}) = 0.707\,G(0))$$

– $f_C$($w_C$) (*fréquence de coupure*) : la fréquence (pulsation) à partir de laquelle l'atténuation introduite par rapport à la fréquence nulle est supérieure à *N* dB.

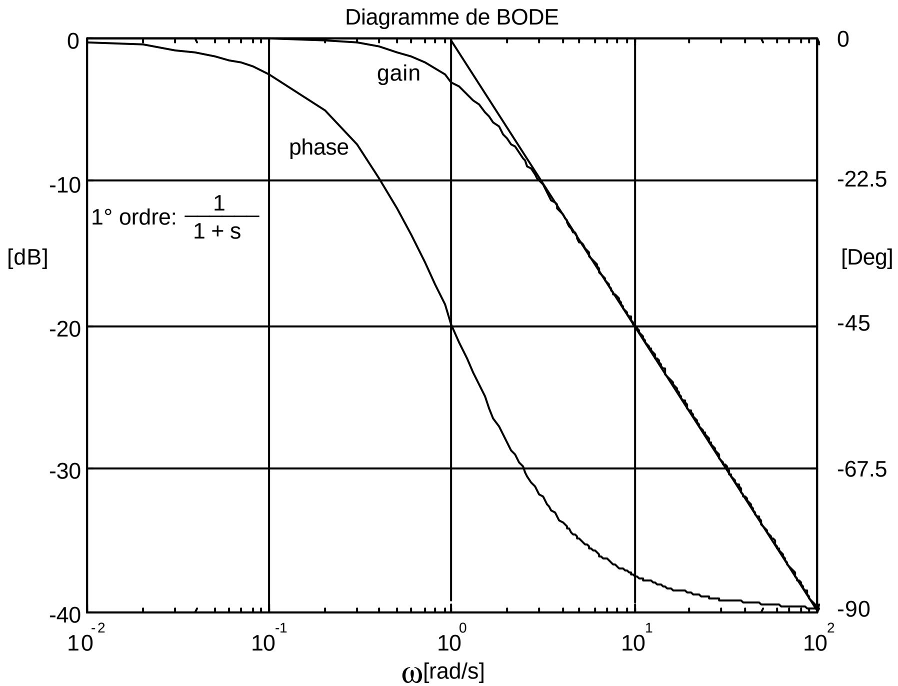
$$G(jw_C) = G(0) - N\,dB$$

– *Q* (*facteur de résonance*) : rapport entre le gain correspondant au maximum de la courbe de réponse fréquentielle et la valeur *G*(*0*).

# Réponse fréquentielle du système de 1er ordre

$$H(jw) = \frac{G}{1 + jwT} = \left|H(jw)\right| e^{jf(w)} = \left|H(jw)\right| \angle f(w)$$

$$G(w) = \left|H(jw)\right| = \frac{G}{\sqrt{(1 + w^2 T^2)}} \quad ; \quad \angle f(w) = \tan^{-1}\left[\frac{\operatorname{Im} G(jw)}{Re G(jw)}\right] = \tan^{-1}\left[-wT\right]$$



# Etude du système du deuxième ordre

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2z w_0 \frac{dy(t)}{dt} + w_0^2 y(t) = w_0^2 u(t)$$

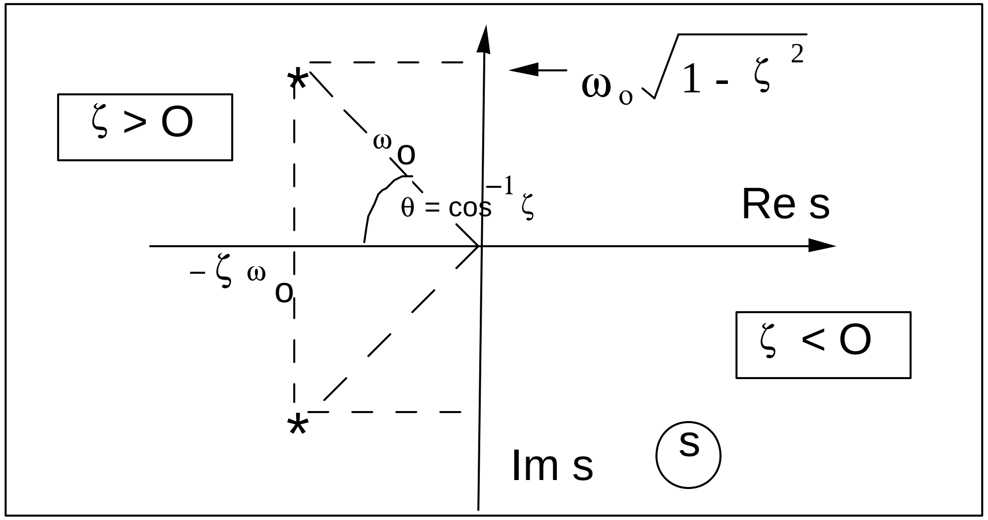
F.T.: $\boxed{H(s) = \dfrac{w_0^2}{s^2 + 2z\ w_0 s + w_0^2}}$

$w_0$ : pulsation naturelle ($w_0$ = $2\ p\ f_0$)
$z$ : coefficient d'amortissement

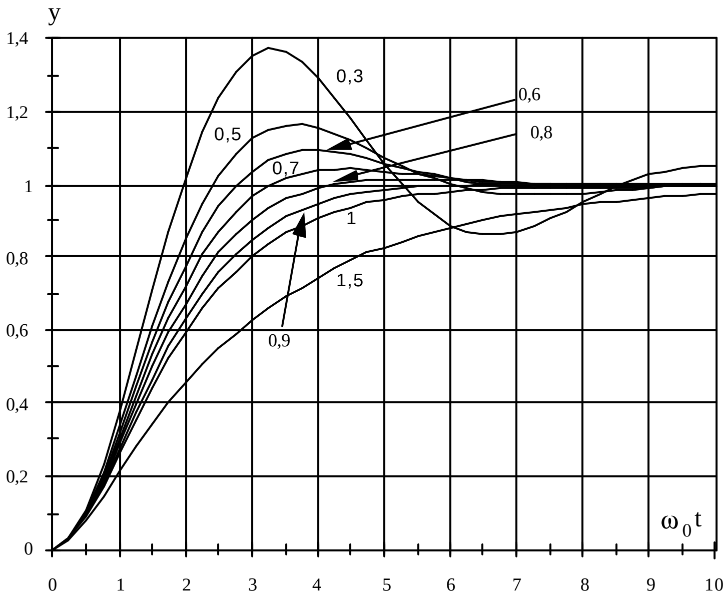
|$z$| < $1$ : pôles complexes (réponse oscillatoire). $\quad s_{1,2} = -z w_0 \pm\ j w_0 \sqrt{1 - z^2}$

|$z$| $1$ : pôles réels (réponse apériodique). $\quad s_{1,2} = -z w_0 \pm w_0 \sqrt{z^2 - 1}$

$\zeta > 0$ : système asymptotiquement stable
$\zeta < 0$ : système instable



# Système du 2ème ordre – Réponses temporelles normalisées



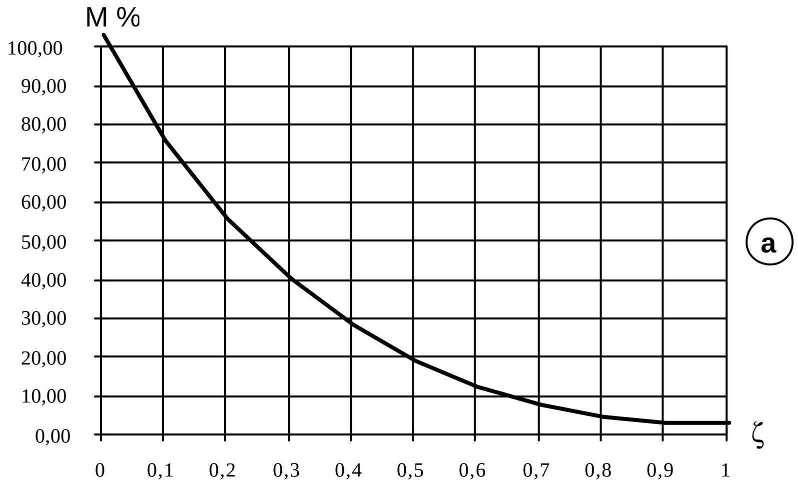

$w_0 t_M$ = temps de réponse normalisé

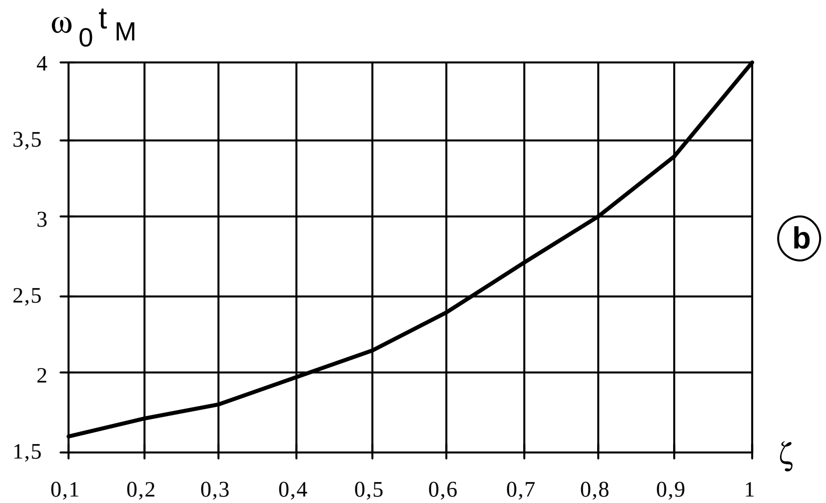
Comment choisir $\omega_0$ et $\zeta$ ?

$$M_{désiré} \rightarrow z\ (diagr.a) \rightarrow w_0 t_M\ (diagr.b)$$

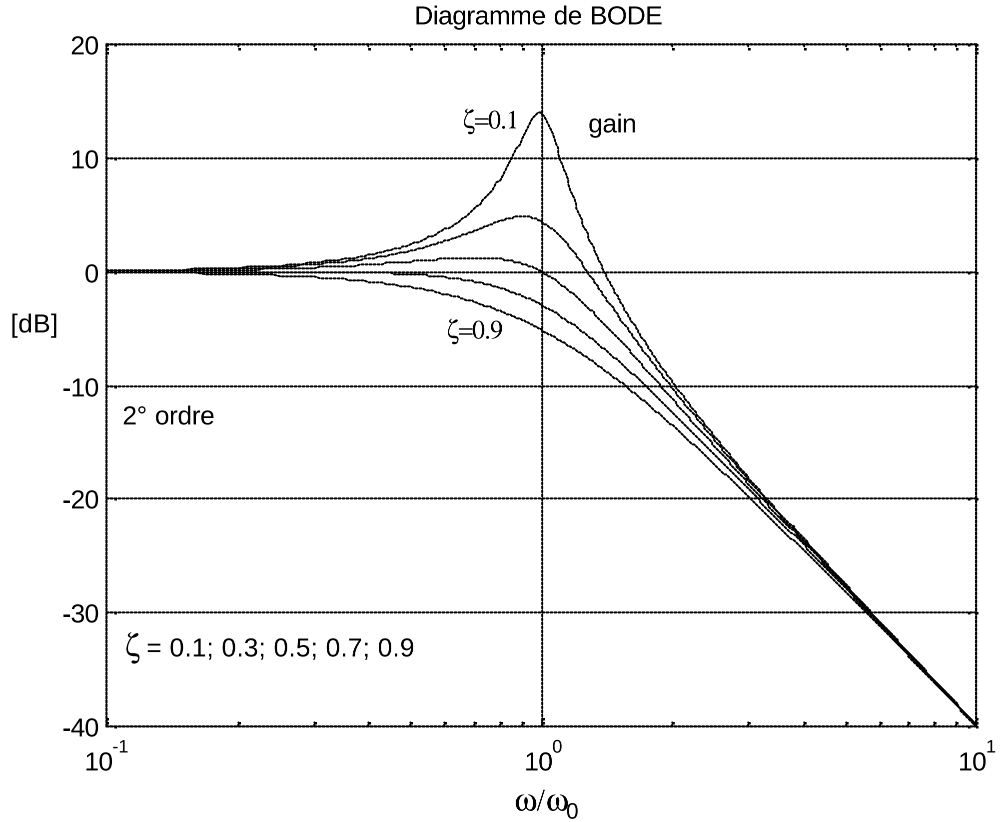
$$w_0 = (w_0 t_M)/(t_M)_{désiré}$$

- utilisation des fonctions ***omega_dmp.sci(.m)***

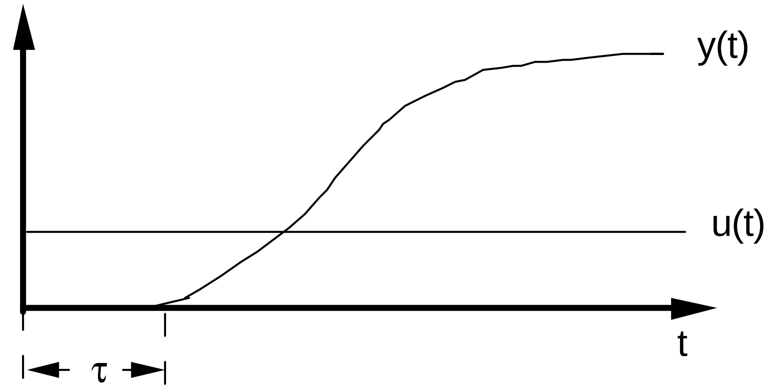


# Système du 2ème ordre – Réponses fréquentielles normalisées



# Systèmes avec retard




$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}y(t) + \frac{G}{T}u(t - t)$$

$\rightleftarrows$

F.T.: $H(s) = \dfrac{Ge^{-st}}{1+sT}$

Rem.(domaine fréquentiel):

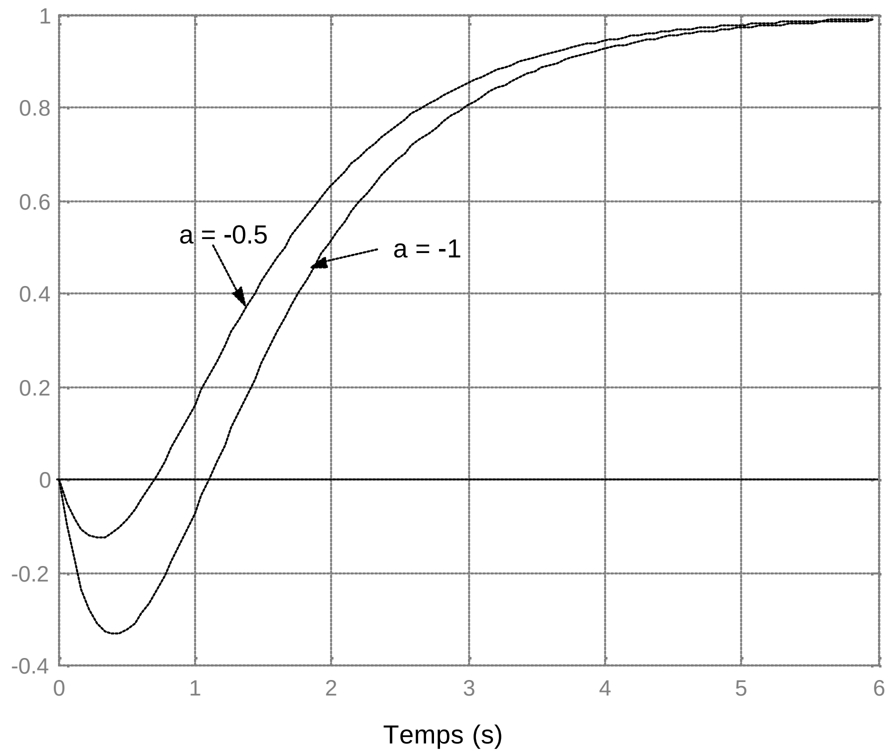
*Le retard pur ne modifie pas le gain du système mais introduit un déphasage proportionnel à la fréquence*

$H_{retard}(j\,w) = e^{-jwt} = |\,1 \measuredangle\ f(w)$ avec $\angle\ f(w) = -\,w\ t\ (rad)$

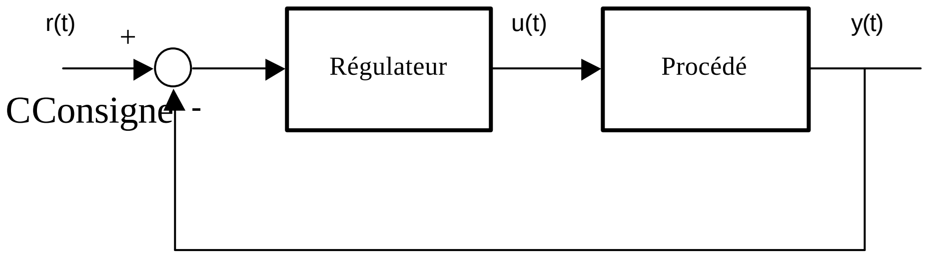
# Systèmes à non-minimum de phase

Systèmes continus (uniquement) = un ou plusieurs *zéros instables*

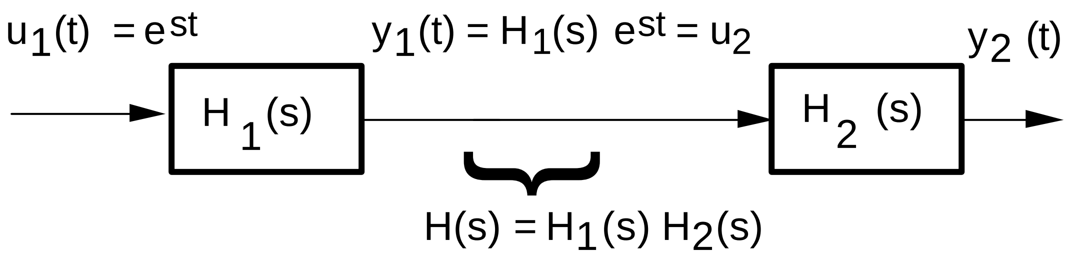
$$H(s) = \frac{1 - sa}{(1+s)(1+0.5s)} \longrightarrow$$



# Systèmes en boucle fermée



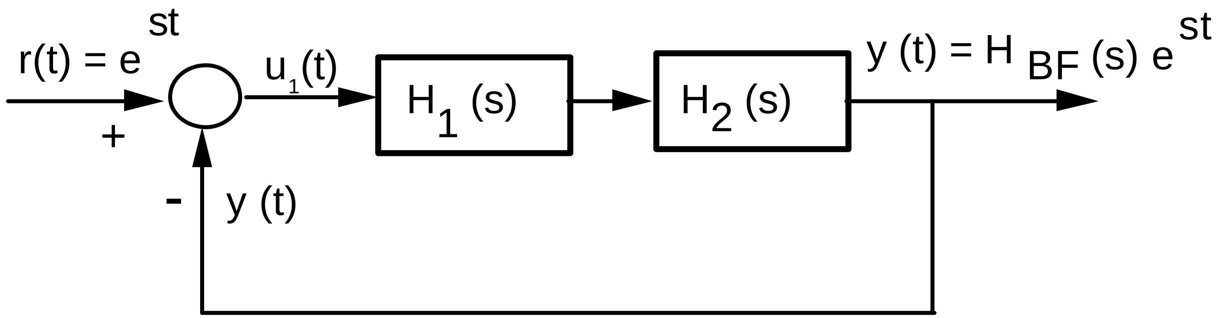

## Systèmes en cascade




$$y_2(t) = H_2(s)u_2(t) = H_2(s)H_1(s)u_1(t) = H(s)e^{st}$$

$$H(s) = H_n(s)....H_2(s)H_1(s)$$

# Systèmes en boucle fermée

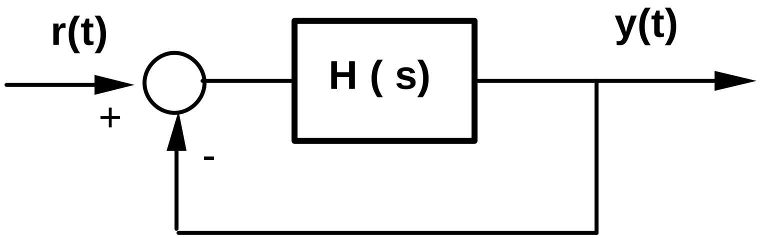



$$y(t) = H_{BF}(s)e^{st} = H_2(s)H_1(s)u(t);\ u(t) = r(t) - y(t)$$

$$y(t)\left[1 + H_2(s)H_1(s)\right] = H_2(s)H_1(s)r(t)$$

$$\boxed{H_{BF}(s) = \frac{H_2(s)H_1(s)}{1 + H_2(s)H_1(s)}}$$

# Erreur statique




$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$H_{BF}(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)} = \frac{B(s)}{A(s) + B(s)}$$

Régime statique (stationnaire): r(t) = const. $\rightarrow$ $s = 0$

$$y = H_{BF}(0)\, r = \frac{B(0)}{A(0) + B(0)} r = \frac{b_0}{a_0 + b_0} r$$

Erreur statique nulle $(y = r)$ : $H_{BF}(0) = 1$ $\rightarrow$ $\frac{b_0}{a_0 + b_0} = 1 \Rightarrow a_0 = 0$

$a_0 = 0$ $\rightarrow$ $A(s) = s(a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_{n-1} s^{n-1}) = s.A'(s)$

$$\boxed{H(s) = \boxed{\frac{1}{s}} \cdot \frac{B(s)}{A'(s)}}$$

# Principe du modèle interne

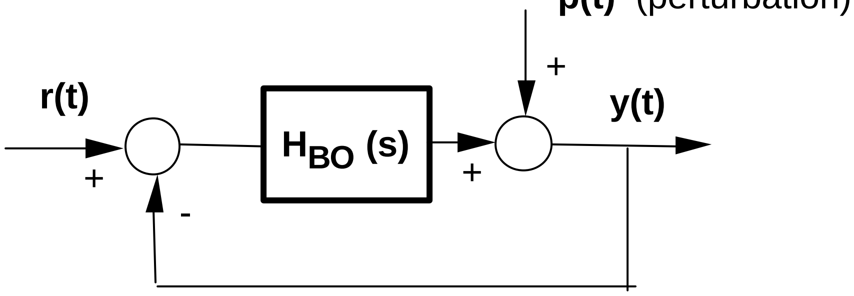
Erreur statique nulle pour consigne constante:
*La F.T. de la voie directe doit contenir un **intégrateur***

Rem.: échelon = impulsion de Dirac passée par un *intégrateur*
*intégrateur = modèle interne de l'échelon*

***Principe du modèle interne**:* Pour obtenir une erreur statique nulle, *H(s)* doit contenir le *modèle interne* de la consigne *r(t)*

*Modèle interne* d'un signal = F.T. du filtre qui engendre le signal à partir d'une impulsion de Dirac

# Rejet de perturbations




F.T. perturbation/sortie:
(*fonction de sensibilité*)

$$S_{yp}(s) = \frac{1}{1+H_{BO}(s)} = \frac{A(s)}{A(s)+B(s)}$$

*Objectif* : réduire l'effet des perturbations sur la sortie dans certaines zones de fréquences

*Cas typique* : annulation de l'effet des perturbations constantes (échelon) en régime stationnaire $(t \to \infty, s \to 0)$

$$y = S_{yp}(0)\,p = \frac{A(0)}{A(0)+B(0)}\,p = \frac{a_0}{a_0+b_0}\,p \qquad y = 0 \longrightarrow a_0 = 0$$

Il faut un *intégrateur* dans la voie directe

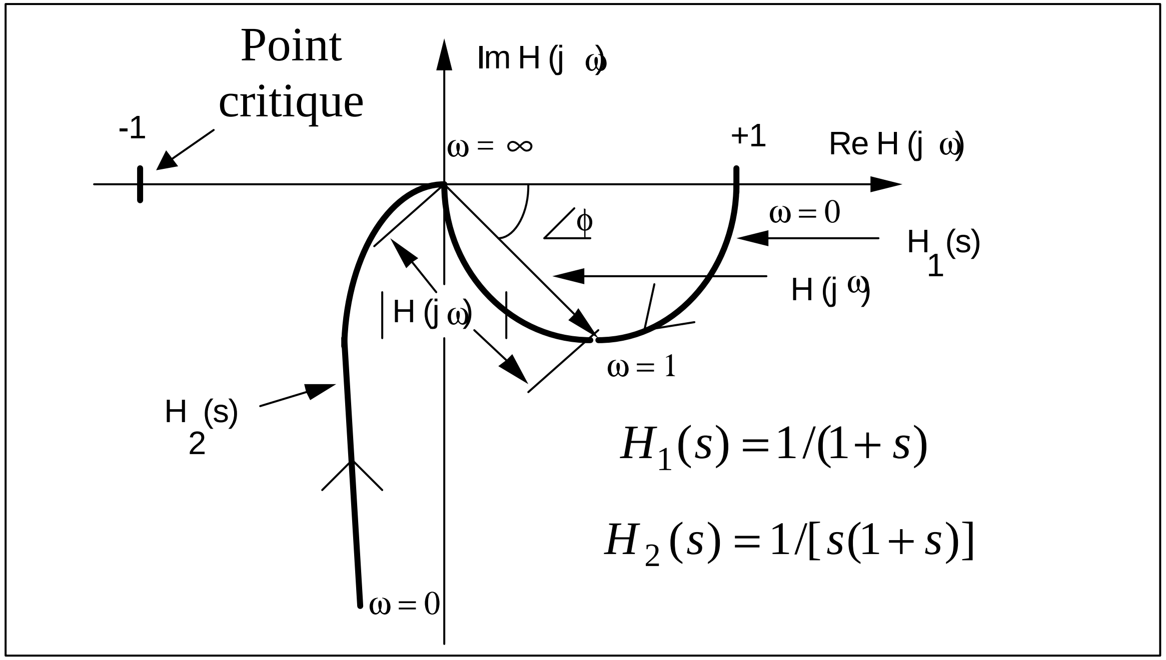
Pour une réjection parfaite d'une perturbation en régime stationnaire la voie directe doit contenir le *modèle interne de la perturbation*

# Lieu et critére de stabilité de Nyquist

*Objectif:*

Etude de la stabilité et de la robustesse des systèmes en boucle fermée

$$H_{BO}(jw) = ReH_{BO}(jw) + j\,\mathrm{Im}\,H_{BO}(jw) = \left|H_{BO}(jw)\right| . \angle f(w)$$

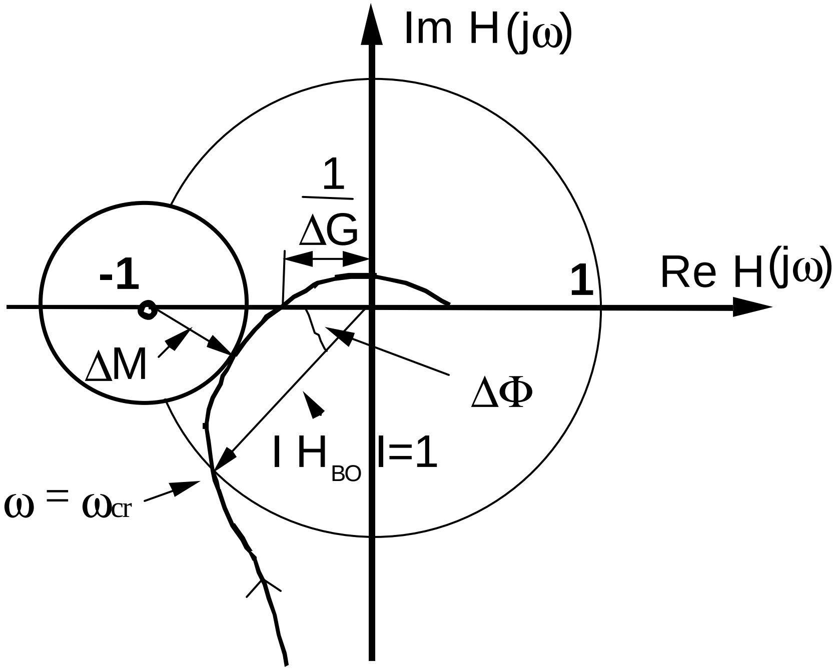



*Critère de stabilité:*

L'hodographe de $H_{BO}(j\omega)$ parcouru dans le sens des fréquences croissantes doit laisser à gauche le *point critique*

# Marges de robustesse

La distance minimale par rapport au point critique caractérise la robustesse du système en B.F. vis-à-vis des variations des paramètres du systèmes (ou des incertitudes sur leur valeur)




-Marge de gain *DG*
-Marge de phase *Df*
**-Marge de retard** *Dt*
**-Marge de module** ***DM***

# Marges de robustesse

## Marge de gain

$$\Delta G = \frac{1}{\left|H_{BO}(jw_{180})\right|} \qquad \text{pour} \qquad \angle f(w_{180}) = -180^{\circ}$$

## Marge de phase

$$\Delta f = 180^{0} - \angle f(w_{cr}) \quad pour \quad \left|H_{BO}(jw_{cr})\right| = 1$$

$$\Delta f = \min_{i} \Delta f_{i}$$

Si plusieurs points d'intersection du cercle unité

## Marge de retard

$$\Delta t = \frac{\Delta f}{w_{cr}}$$

Plusieurs points d'intersection: $\Delta t = \min_{i} \frac{\Delta f_{i}}{w_{cr}^{i}}$

## Marge de module

$$\Delta M = \left|1 + H_{BO}(jw)\right|_{\min} = \left|S_{yp}^{-1}(jw)\right|_{\min} = \left(\left|S_{yp}(jw)\right|_{\max}\right)^{-1}$$

## Marges de robustesse – valeurs typiques

Marge de gain : *DG ³ 2* (*6 dB*) [*min : 1,6* (*4 dB*)]

Marge de phase : *30° £ Df £ 60°*

Marge de retard : fraction du retard du système (10%) ou
du temps de montée (10%)

Marge de module : *D M ³ 0.5* (- *6 dB*) [*min : 0,4* (-*8 dB*)]

Une marge de module *D M ³ 0.5* implique *DG ³ 2 et Df > 29°*
*Mais attention la réciproque n’est pas vraie !*

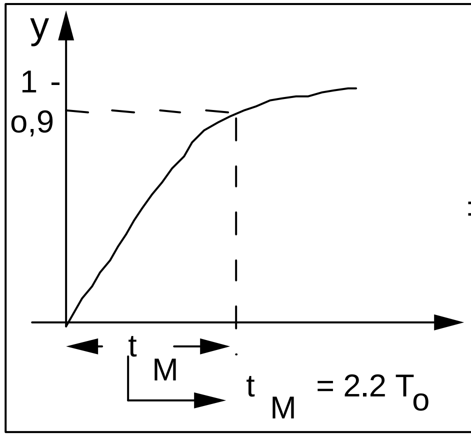
La *marge du module* définit aussi la tolérance vis-à-vis des non linéarités (voir livre pg.50-52)

# Régulateur PI

Procédé : $\boxed{G/(1+sT)}$

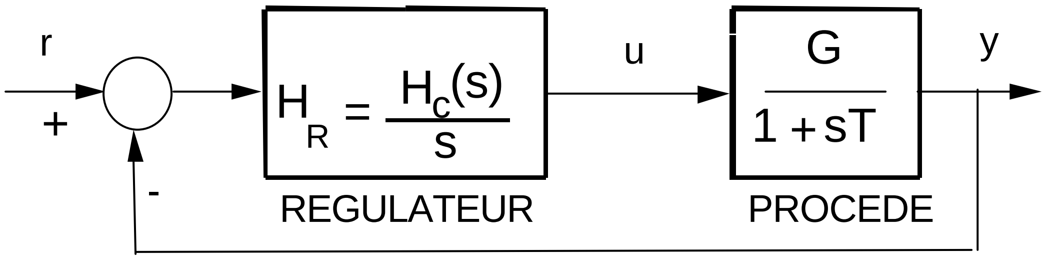
Objectifs :

1) erreur statique nulle
2) temps de montée $t_M$




$\Rightarrow H_{BF}(s) = \dfrac{1}{1 + s\,T_o}$

F.T. désirée pour la B.F.




$$H_{BF}(s) = \frac{H_c(s)G}{G\,H_c(s) + s + s^2 T} = \frac{1}{1+sT_0} = \frac{H_c(s)G}{H_c(s)G\left(1+sT_0\right)}$$

$H_c(s)\, G\, s\, T_0 = s^2\, T + s$ $\quad\rightarrow\quad H_c(s) = \dfrac{1}{G\,T_0}(1+sT)$

# Régulateur PI

$$H_R(s) = \frac{\frac{1}{G\,T_0}(1+sT)}{s} = \frac{T}{G\,T_0}\left[1+\frac{1}{T\,s}\right] = K\left[1+\frac{1}{T_i\,s}\right]$$

**Gain proportionnel** **Action intégrale**

*Remarque:*

Les paramètres du régulateur dépendent des performances désirées ($T_0$) et des paramètres de la f.t. du procédé ($G$,$T$)

# Régulateur PID

Il existe plusieurs structures de régulateurs PID.

On considère (a titre d'exemple) la structure :

action dérivée

gain proportionnel

$$H_{PID}(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s}\right) \qquad (*)$$

action intégrale

filtrage action dérivée

Procédé :

$$H(s) = \frac{G}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = \frac{b_0}{1 + a_1 s + a_2 s^2}$$

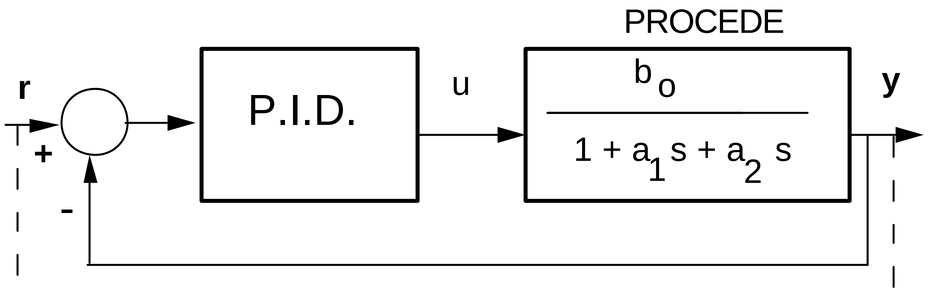
Objectifs:

1) $t_M$, M $\xrightarrow{\text{Voir transp.18}}$ $H_{BF}(s) = \dfrac{w_0^2}{w_0^2 + 2z\, w_0 s + s^2}$

2) Erreur statique nulle

F.T. désirée de la Boucle Fermée

# Régulateur PID




$$H_{BF}(s) = \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 + 2\zeta\omega_o s + s^2}$$

$$H_{PID}(s) = \frac{K\left[1 + s\left(T_i + \frac{T_d}{N}\right) + s^2\left(T_i T_d + \frac{T_i T_d}{N}\right)\right]}{T_i s\left(1 + \frac{T_d}{N}s\right)} \qquad (*)$$

Numérateur F.T. du PID = Dénominateur F.T. procédé

# Régulateur PID

$$H_{BO}(s) = H(s)\cdot H_{PID}(s) = \frac{Kb_0}{T_i s\left(1+\dfrac{T_d}{N}s\right)}$$

$$a_1 = T_i + \frac{T_d}{N};$$

$$a_2 = T_i T_d\left(1+\frac{1}{N}\right)$$

$$H_{BF}(s) = \frac{Kb_0}{Kb_0 + T_i s + \dfrac{T_i T_d}{N}s^2} = \frac{\dfrac{Kb_0 N}{T_i T_d}}{\dfrac{Kb_0 N}{T_i T_d} + \dfrac{N}{T_d}s + s^2} = \frac{w_0^2}{w_0^2 + 2Vw_0 s + s^2}$$

$$T_i = a_1 - \frac{T_d}{N} = a_1 - \frac{1}{2zw_0} \qquad T_d = \frac{a_2}{T_i} - \frac{T_d}{N} = \frac{a_2}{T_i} - \frac{1}{2z\,w_0} \qquad K = \frac{w_0 T_i}{2z\,b_0} \qquad \frac{T_d}{N} = \frac{1}{2zw_0}$$

Les paramètres du régulateur dépendent des performances désirées ($w_0$ , $z$ ) et des paramètres de la f.t. du procédé ($a_1$, $a_2$, $b_0$)

# Quelques remarques récapitulatives

-Le comportement des processus à réguler autour d'un point de fonctionnement peut être souvent décrit par un *modèle dynamique linéaire*.

-Les *modèles dynamiques linéaires* sont décrits dans le domaine temporel par des *équations différentielles linéaires* et dans le domaine fréquentiel par des *fonctions de transfert.*

-Les systèmes de régulation sont des systèmes en boucle fermée comprenant : régulateur, procédé (qui englobe l'actionneur et le capteur) et la connexion de *contre-réaction.*

-Les performances désirées de la B.F.peuvent s'exprimer en termes de caractéristiques souhaitées du modèle dynamique de la B.F.

-Le lieu de Nyquist (domaine fréquentiel) joue un rôle essentiel pour l'étude de la stabilité du système en boucle fermée et de sa robustesse vis-à-vis des variations des paramètres du procédé.