

# Chapitre II

## Systemes de commande par ordinateur

## **Chapitre 2. Systèmes de commande par ordinateur**

2.1 Introduction à la commande par ordinateur

2.2 Discrétisation et fondements des systèmes échantillonnés

2.2.1 Discrétisation et choix de la fréquence d'échantillonnage

2.2.2 Choix de la fréquence d'échantillonnage pour l'Automatique

2.3 Les modèles échantillonnés

2.3.1 Domaine temporel

2.3.2 Domaine fréquentiel

2.3.3 Formes générales des modèles échantillonnés linéaires

2.3.4 Stabilité des systèmes échantillonnés

2.3.5 Régime stationnaire (gain statique)

2.3.6 Modèles échantillonnés des procédés avec bloqueur

2.3.7 Etude du système du 1<sup>er</sup> ordre avec retard

2.3.8 Etude du système du 2<sup>ème</sup> ordre

2.4 Systèmes échantillonnés en boucle fermée

2.4.1 Fonction de transfert du système en boucle fermée

2.4.2 Erreur statique

2.4.3 Rejet des perturbations

2.5 Principes des méthodes modernes de calcul des régulateurs numériques

2.5.1 Structures des régulateurs numériques

2.5.2 Structure canonique des régulateurs numériques

2.5.3 Boucle de régulation avec régulateur P.I. numérique

2.6 Analyse des systèmes échantillonnés en boucle fermée dans le domaine fréquentiel

2.6.1 Stabilité des systèmes en boucle fermée

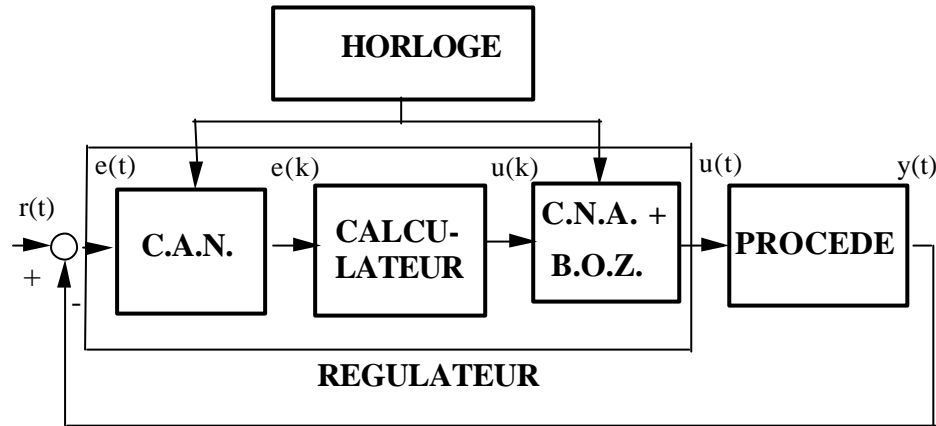
2.6.2 Robustesse des systèmes en boucle fermée

2.7 Conclusion

2.8 Notes et indications bibliographiques

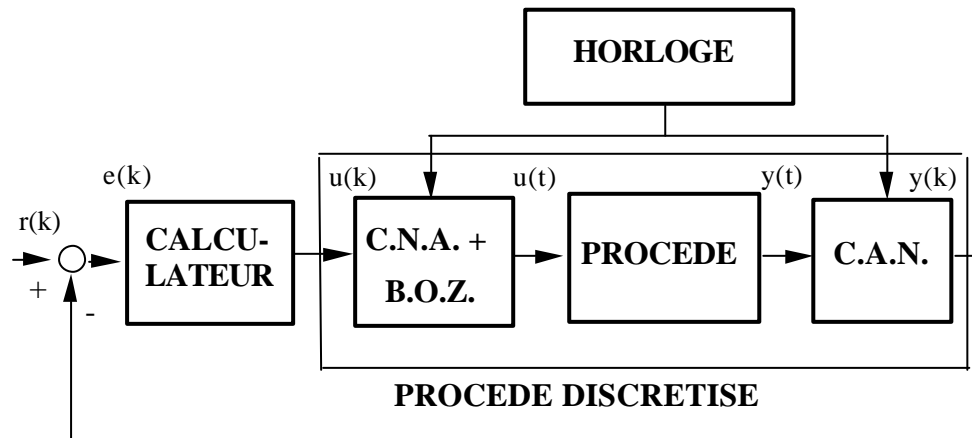
# Commande par ordinateur

## Réalisation numérique d'un régulateur analogique



- On reproduit l'analogique en échantillonnant vite
- Fonction du calculateur: simple (manque d'intelligence)

## Système de régulation numérique



- On échantillonne en fonction de la « bande passante » du processus (beaucoup plus lentement)
- Utilisation « intelligente » de la capacité de calcul

## Commande par ordinateur

Pour tirer avantage des possibilités du ordinateur il faut changer de *langage*

Modèles *continus*  
de procédés



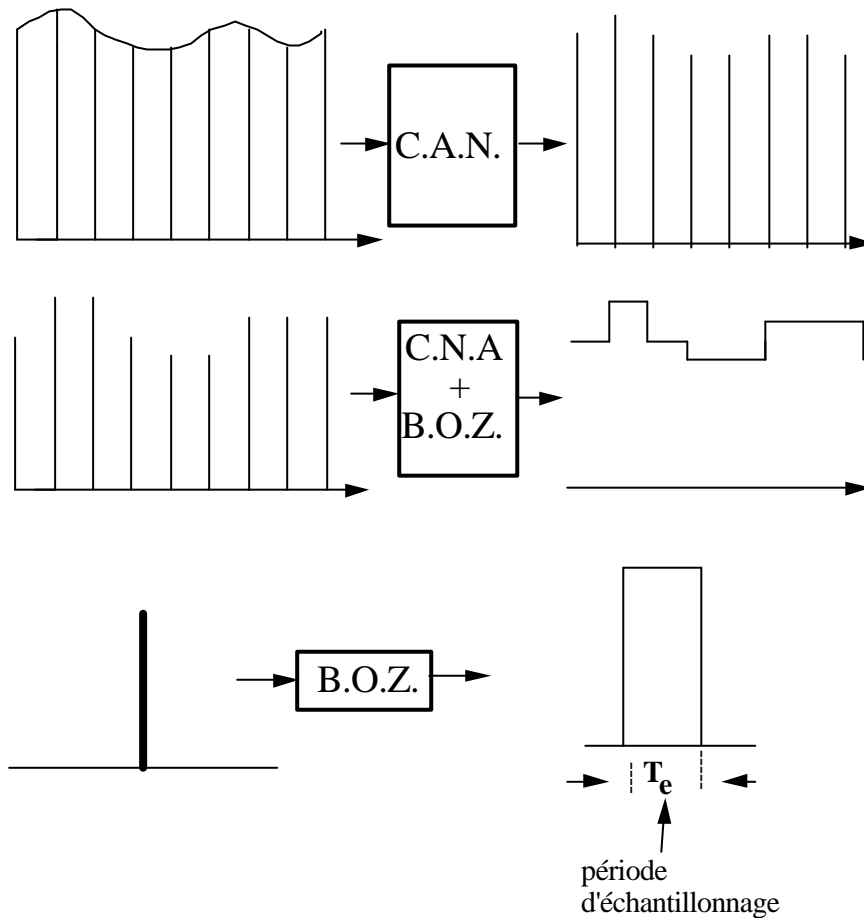
Modèles *échantillonnés*  
de procédés

Régulateur *continu*



Régulateur *échantillonné*

# Echantillonnage



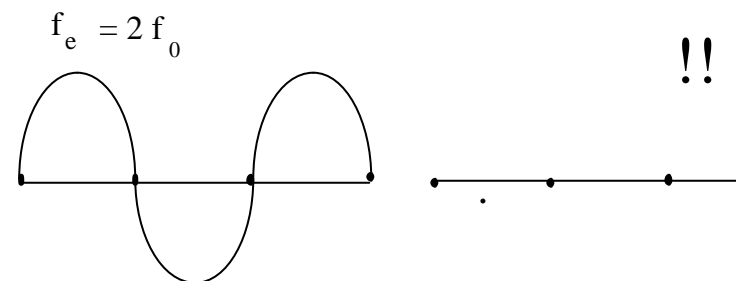
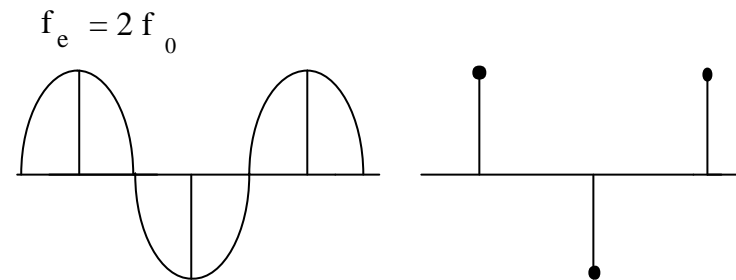
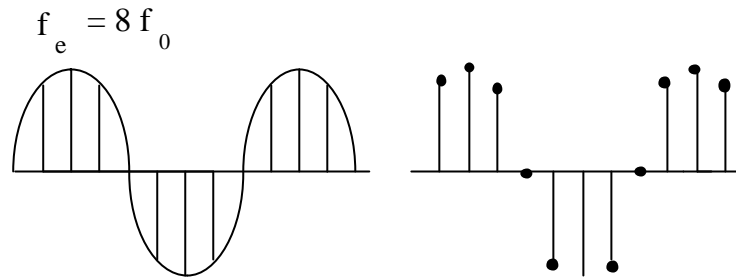
C.A.N.:  
Convertisseur  
analogique-numérique

C.N.A.:  
Convertisseur  
numérique-analogique

B.O.Z.:  
Bloqueur d'ordre zéro

$f_e = 1/T_e$  : fréquence d'échantillonnage

# Choix de la fréquence d'échantillonnage



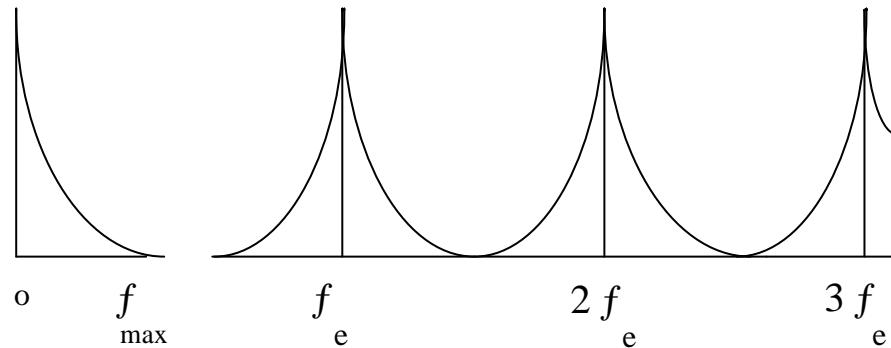
$f_{max}$  : fréquence maximum à transmettre

$$f_e > 2 f_{max}$$

# Spectre du signal échantillonné

Il s'agit d'une « modulation en amplitude » avec fréquence porteuse  $f_e$

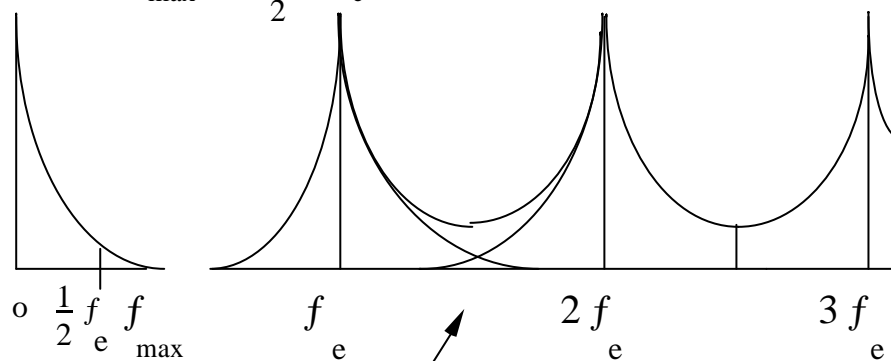
Cas 1 :  $f_{\max} < \frac{1}{2} f_e$



Spectre continu

Spectre signal échantillonné

Cas 2 :  $f_{\max} > \frac{1}{2} f_e$



Spectre continu

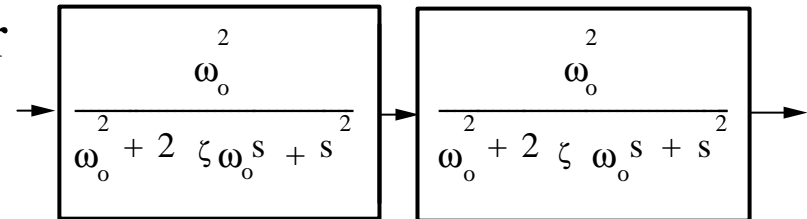
Recouvrement (repliement) du spectre (distorsions !!)

## Filtres anti - repliement

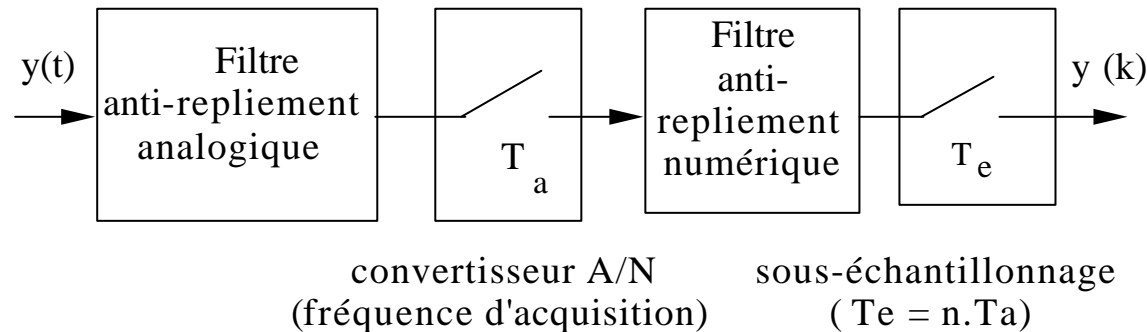
Pour éviter le « repliement du spectre » les signaux analogiques doivent être « filtrés » avant échantillonnage pour assurer:

$$f_{\max} < \frac{1}{2} f_e$$

Un bon filtre anti-repliement doit avoir minimum 2 cellules du 2<sup>e</sup> ordre en cascade (sauf si  $f_{\max} \ll 0.5 f_e$ )



*Filtrage anti-repliement avec suréchantillonnage (pour  $f_e$  très bas)*





# Choix de la fréquence d'échantillonnage pour l'Automatique

$f_{BP}^{BF}$  : bande passante de la boucle fermée

$$f_e = (6 \text{ à } 25) f_{BP}^{BF}$$

1<sup>er</sup> ordre :  $H(s) = \frac{1}{1 + sT_0}$        $f_{BP} = f_0 = \frac{1}{2p T_0}$

$T_e = 1/f_e$  : période d'échantillonnage

$$\frac{T_0}{4} < T_e < T_0$$

2<sup>e</sup> ordre :  $H(s) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2z \omega_0 s + s^2}$

$$z = 0.7 \Rightarrow f_{BP} = \frac{\omega_0}{2p}$$

$$z = 1 \Rightarrow f_{BP} = \frac{0.6 \omega_0}{2p}$$

$$0.25 \leq \omega_0 T_e \leq 1; z = 0.7$$

$$0.4 \leq \omega_0 T_e \leq 1.75; z = 1$$

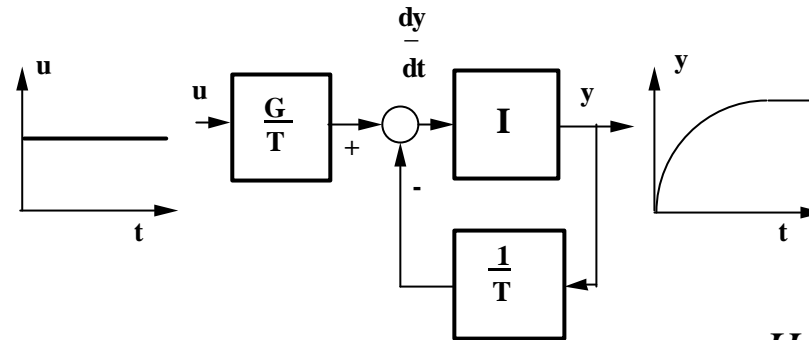
$$0.25 \leq \omega_0 T_e \leq 1.5; 0.7 \leq z \leq 1$$

## Choix de la période d'échantillonnage pour la régulation numérique (valeurs indicatives)

Type de variable (ou procédé)	Période d'échantillonnage(s)
Débit	1 - 3
Niveau	5 - 10
Pression	1 - 5
Température	10 - 180
Distillation	10 - 180
Asservissements	0.001- 0.05
Réacteurs catalytiques	10 - 45
Cimenteries	20 - 45
Séchage	20 - 45

# Les modèles échantillonnés

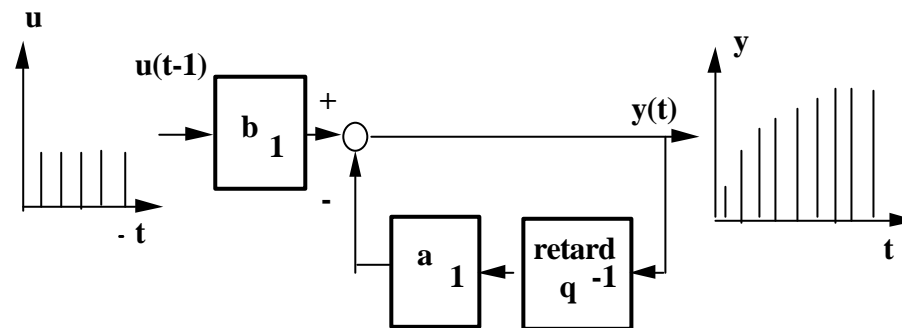
## Rappel : Modèle Continu



$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}y(t) + \frac{G}{T}u(t)$$

$$H(s) = \frac{G}{1 + sT}$$

## Modèle Echantillonné



$t$  = temps discret normalisé ( $t/T_e$ )

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + b_1 u(t-1)$$

$$H(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

# Modèle échantillonné : *Domaine temporel*

$t =$  temps discret normalisé ( $t/T_e$ )

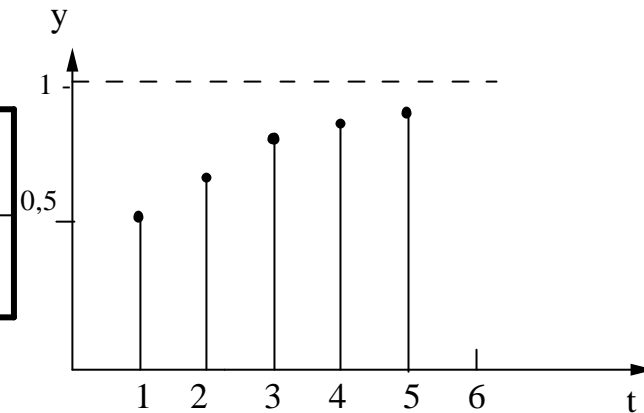
$t = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + b_1 u(t-1)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad y(0) = 0$$

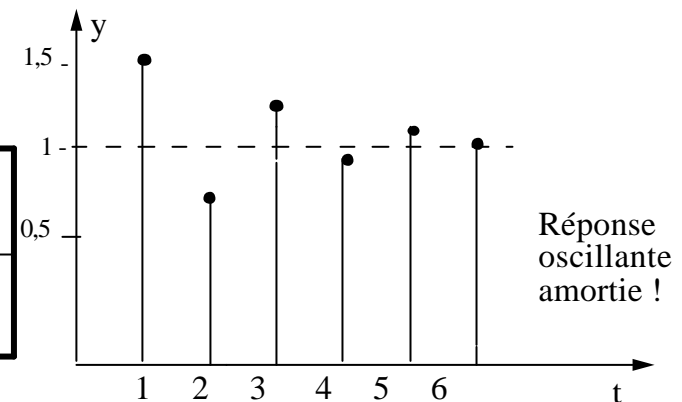
**Cas 1 :  $a_1 = -0.5$     $b_1 = 0.5$**

$t$	0	1	2	3	4	5
$y(t)$	0	0.5	0.75	0.875	0.937	0.969



**Cas 2 :  $a_1 = 0.5$     $b_1 = 1.5$**

$t$	0	1	2	3	4	5
$y(t)$	0	1.5	0.75	1.125	0.937	1.062



## Opérateur retard ( $q^{-1}$ )

$$q^{-1}y(t) = y(t-1); \quad q^{-d}y(t) = y(t-d)$$

$$y(t) = -a_1y(t-1) + b_1u(t-1) \quad \longrightarrow \quad (1 + a_1q^{-1})y(t) = b_1q^{-1}u(t)$$

## Opérateur de transfert

$$(1 + a_1q^{-1})y(t) = b_1q^{-1}u(t)$$



Division formelle par:  $(1 + a_1q^{-1})$

$$y(t) = \frac{b_1q^{-1}}{1 + a_1q^{-1}}u(t) = H(q^{-1})u(t)$$

$H(q^{-1})$  : opérateur de transfert

## Discrétisation d'équations continues

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}y(t) + \frac{G}{T}u(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(t+T_e) - y(t)}{T_e} \longrightarrow \frac{y(t+T_e) - y(t)}{T_e} + \frac{1}{T}y(t) = \frac{G}{T}u(t)$$

$t = t/T_e$  (temps normalisé)

$$y(t+1) + \underbrace{\left(\frac{T_e}{T} - 1\right)}_{a_1 < 0} y(t) = \underbrace{\frac{G}{T}T_e}_{b_1} u(t) \longrightarrow (1 + a_1 q^{-1})y(t+1) = b_1 u(t)$$

(pour discrétisation stable:  $T_e < T$ )

# Intégrateur numérique

## Dérivation

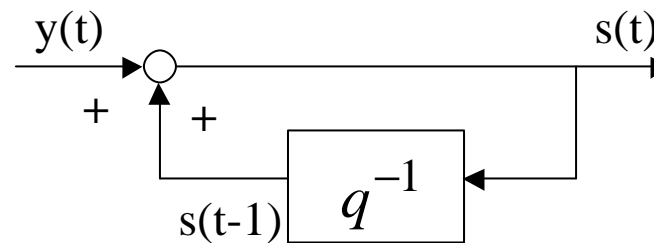
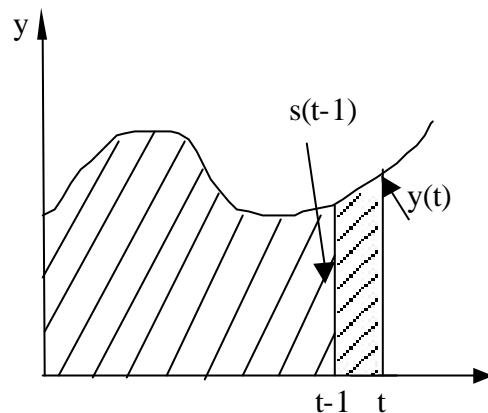
$$\frac{d}{dt} y = py \approx y(t) - y(t-1) = \underbrace{(1 - q^{-1})}_{\text{Équivalent de « } p \text{ » en continu}} y(t)$$

Équivalent de «  $p$  » en continu

## Intégration

$$s(t) = \int y dt = \frac{1}{p} y \approx \frac{1}{1 - q^{-1}} y(t)$$

$$s(t)(1 - q^{-1}) = y(t) \quad \longrightarrow \quad s(t) = s(t-1) + 1 \cdot y(t)$$



**Opérateur de transfert de l'intégrateur :** 
$$H_I(q^{-1}) = \frac{1}{1 - q^{-1}}$$

## Modèle échantillonné : *Domaine fréquentiel*

Exponentielle complexe continue

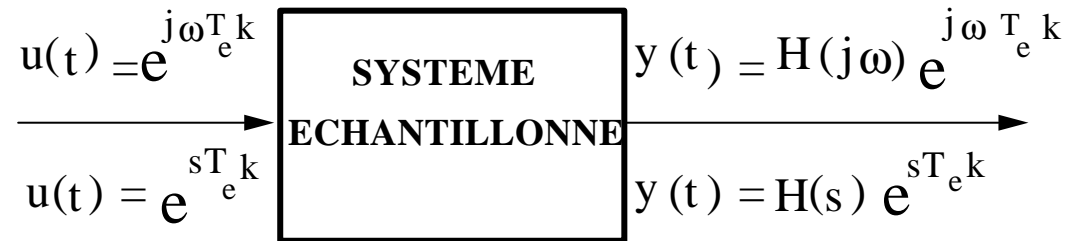
$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \\ e^{st} \quad (s = \sigma + j\omega) \end{cases}$$

Exponentielle complexe échantillonnée ( $T_e$ : période d'échantillonnage)

$$t = kT_e$$

$$e^{j\omega T_e k} ; e^{sT_e k}$$

$$k = 1, 2, 3, ..$$



$$y(t) = H(s)e^{sT_e k}$$

$$y(t - T_e) = H(s)e^{sT_e(k-1)} = e^{-sT_e} H(s)e^{sT_e k} = e^{-sT_e} y(t)$$



## Modèle échantillonné : *Domaine fréquentiel*

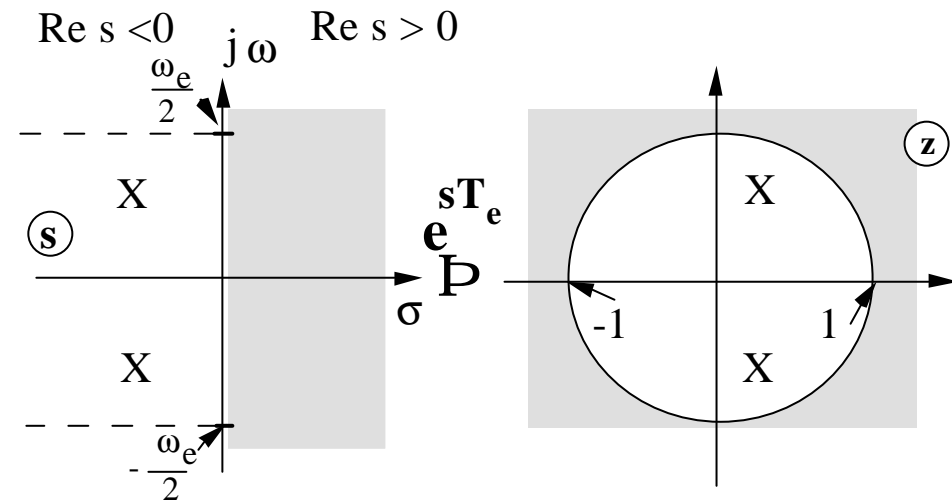
Example:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + b_1 u(t-1) \quad u(t) = e^{sT_e k}$$

$$(1 + a_1 e^{-sT_e}) H(s) e^{sT_e k} = b_1 e^{-sT_e} e^{sT_e k} \quad \rightarrow \quad H(s) = \frac{b_1 e^{-sT_e}}{1 + a_1 e^{-sT_e}}$$

Changement de variable:  
(pour plus de détails:  
pg. 78-79)

$$z = e^{sT_e}$$



F.T.  
échantillonnée

$$H(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

## Modèles échantillonnés – *Forme générale*

$$(*) \quad y(t) = - \sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t-d-i)$$

**d –retard (nombre entier de périodes d'échantillonnage)**

$$1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i q^{-i} = A(q^{-1}) = 1 + q^{-1} A^*(q^{-1}) ; \quad A^*(q^{-1}) = a_1 + a_2 q^{-1} + \dots + a_{n_A} q^{-n_A+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n_B} b_i q^{-i} = B(q^{-1}) = q^{-1} B^*(q^{-1}) \quad ; \quad B^*(q^{-1}) = b_1 + b_2 q^{-1} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B+1}$$

$$(*) \quad A(q^{-1}) y(t) = q^{-d} B(q^{-1}) u(t)$$

$$(*) \quad A(q^{-1}) y(t+d) = B(q^{-1}) u(t) \quad (\text{Forme prédictive})$$

$$(*) \quad y(t) = H(q^{-1}) u(t); \quad H(q^{-1}) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad \text{- opérateur de transfert}$$

$$q^{-1} \rightarrow z^{-1} \quad H(z^{-1}) = \frac{q^{-z} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad \text{- fonction de transfert}$$

## Stabilité des systèmes échantillonnés

Domaine temporel

$$y(t) = -a_1 y(t-1); \quad y(0) = y_0$$

$$y(1) = -a_1 y_0; \quad y(2) = (-a_1)^2 y_0; \quad y(t) = (-a_1)^t y_0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad |a_1| < 1$$

Opérateur/fonction de transfert

$$(1 + a_1 q^{-1}) y(t) = 0 \quad \begin{array}{l} 1 + a_1 q^{-1} \text{ est le dénominateur de l'opérateur de transfert} \\ 1 + a_1 z^{-1} \text{ est le dénominateur de la fonction de transfert} \end{array}$$

$$\text{Pour la stabilité : } 1 + a_1 q^{-1} (\text{ou } z^{-1}) = 0 \Rightarrow |q (\text{ou } z)| < 1$$

**Condition de stabilité - Cas général:**

$$1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n} = 0 \Rightarrow |z_i| < 1 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n$$

# Stabilité des systèmes échantillonnés

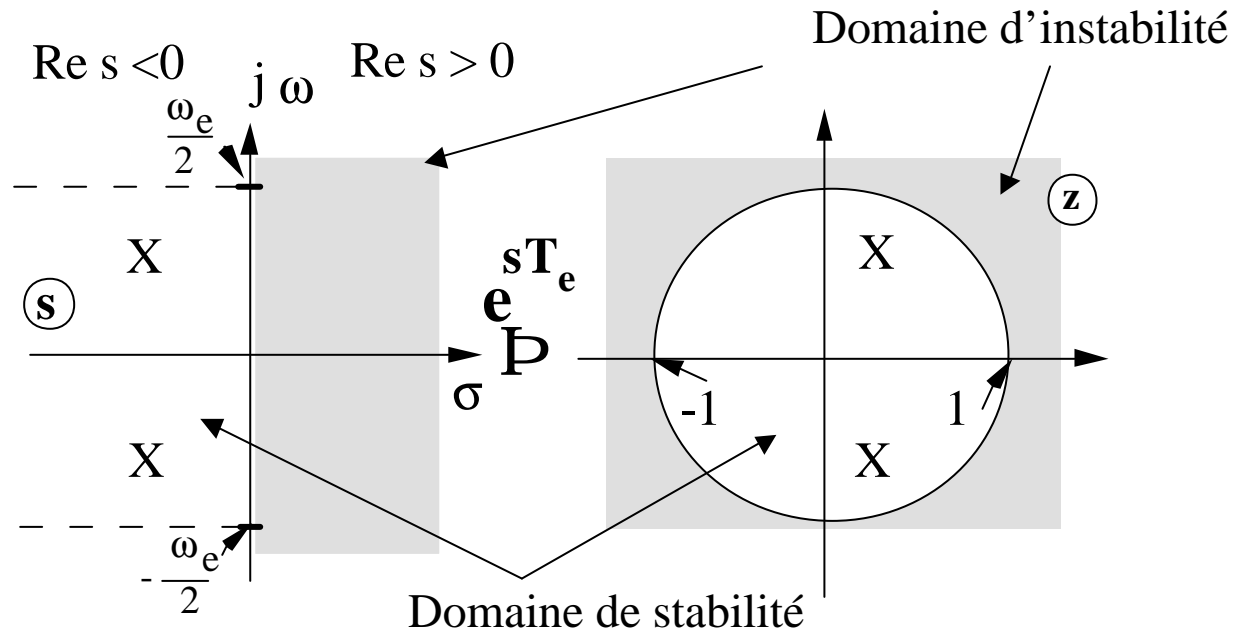
Solution des équations récurrentes

$$y(t) = Ke^{sT_e t} = Kz^t \quad t = 1, 2, \dots$$

$$z = e^{sT_e} ; s = \mathbf{s} + j\mathbf{w} ; z = e^{sT_e} \cdot e^{j\mathbf{w}T_e}$$

Stabilité  $\quad \text{Re } s < 0 \Rightarrow e^{sT_e} < 1 \Rightarrow |z| < 1$

Instabilité  $\quad \text{Re } s > 0 \Rightarrow e^{sT_e} > 1 \Rightarrow |z| > 1$



## Régime stationnaire (gain statique)

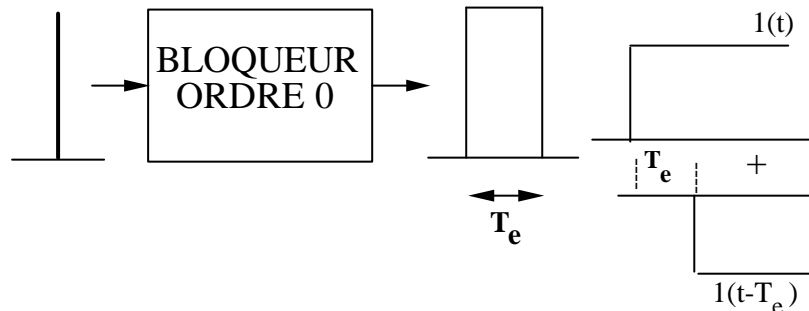
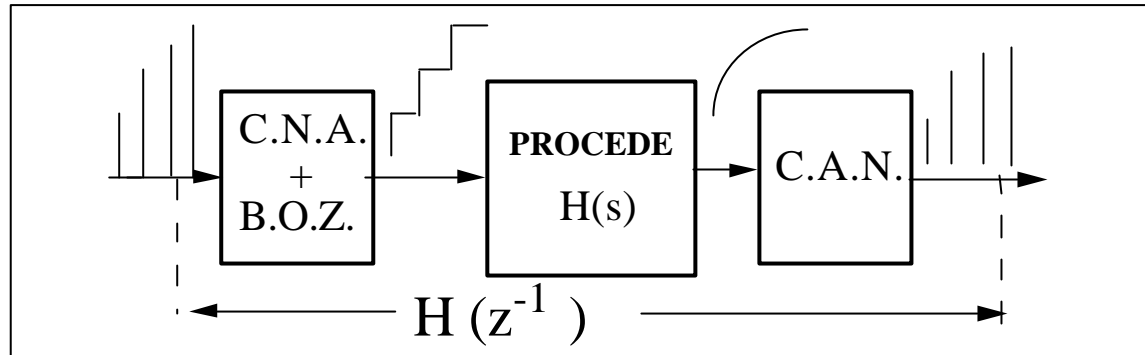
*Continu* :  $s = 0 \Rightarrow$  *Discret* :  $z = e^{sT_e} = 1$

$$G(0) = \left. \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \right|_{z=1} = \frac{b_1}{1 + a_1}$$

Cas général:

$$G(0) = H(1) = \left. H(z^{-1}) \right|_{z=1} = \left. \frac{z^{-d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \right|_{z=1} = \frac{\sum_{i=1}^{n_B} b_i}{1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i}$$

## Modèles échantillonnés des procédés avec bloqueur



$$H_{BOZ}(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s}$$

**Le B.O.Z. introduit une atténuation et un déphasage ( $p/2$  à  $0.5f_e$ ).** (voir pg.85-86)

Fonction de transfert continue globale:

$$H'(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s} H(s)$$

La F.T. échantillonnée s'obtient à partir de  $H'(s)$  en utilisant des tables (pg.87) ou les fonctions *cont2disc.sci(.m)*

## Système du 1<sup>er</sup> ordre avec retard

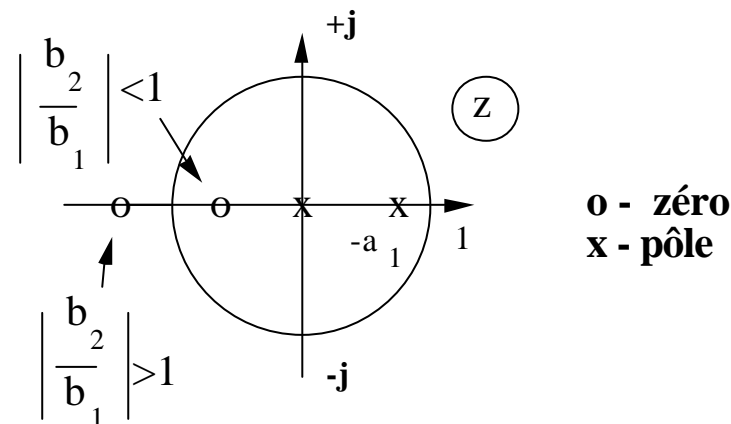
**Retard fractionnaire**

Modèle continu:  $H(s) = \frac{G e^{-st}}{1 + T_s s}$       $t = d.T_e + L$ ;  $0 < L < T_e$

Modèle échantillonné:  $H(z^{-1}) = \frac{z^{-d} (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{z^{-d-1} (b_1 + b_2 z^{-1})}{1 + a_1 z^{-1}}$

$$a_1 = -e^{-\frac{T_e}{T}} \qquad b_1 = G(1 - e^{-\frac{L-T_e}{T}}) \qquad b_2 = G e^{-\frac{T_e}{T}} (e^{\frac{L}{T}} - 1)$$

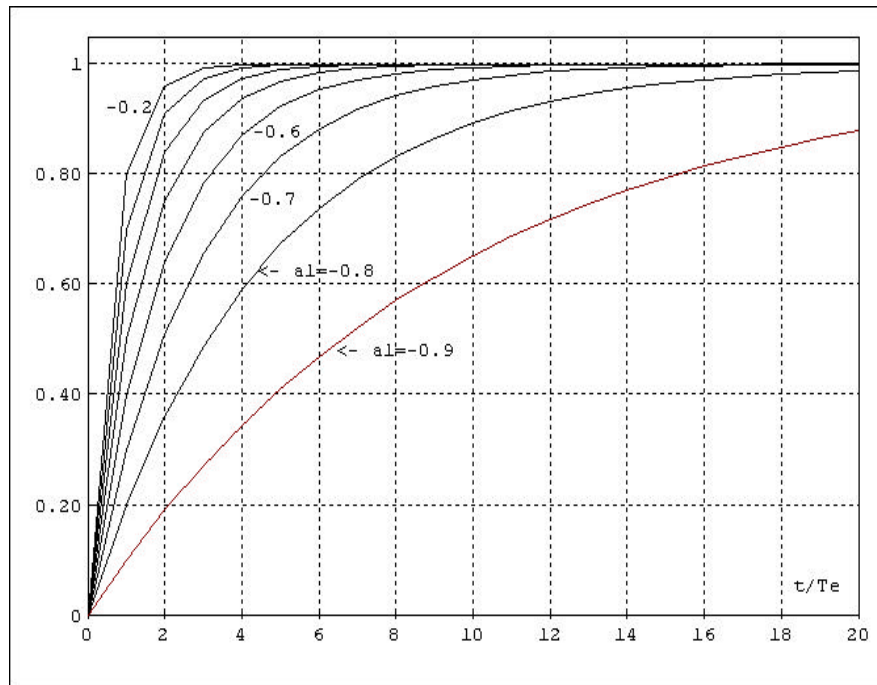
**Important:** Pour  $L > 0.5T_e \Rightarrow b_2 > b_1 \Rightarrow$  zéro instable  $\left( \left| -\frac{b_2}{b_1} \right| > 1 \right)$



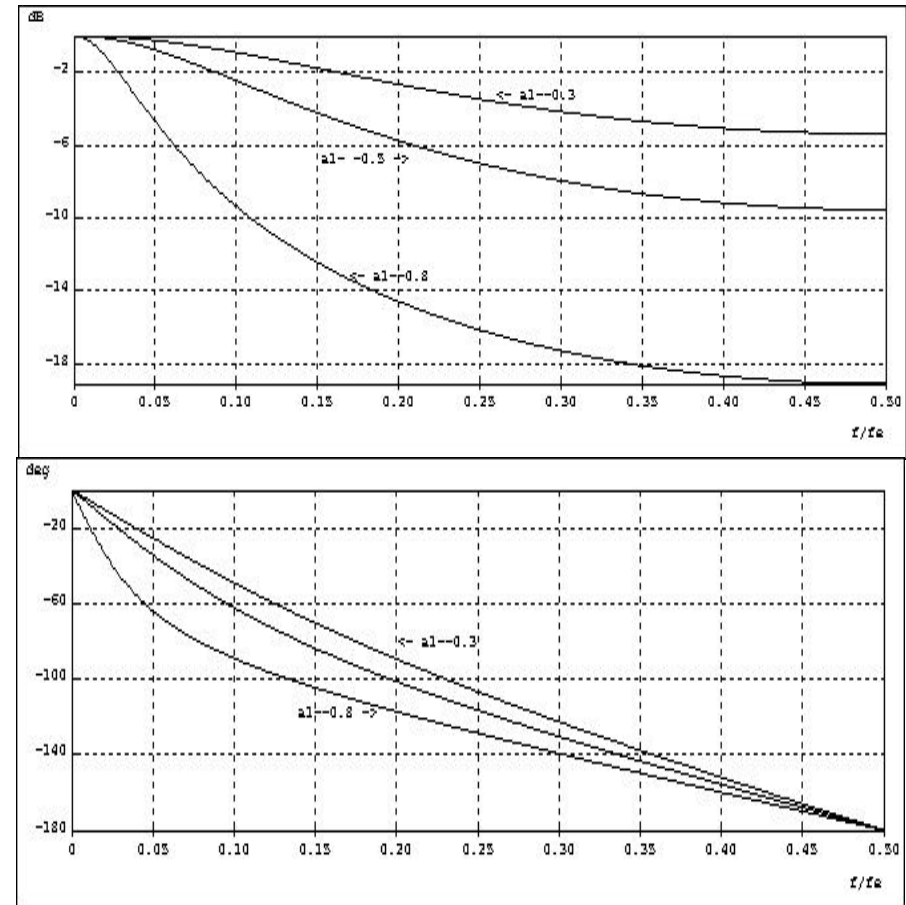
# Systeme echantillonne du 1<sup>er</sup> ordre

$$H(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

Reponses temporelles



Reponses frequentielles



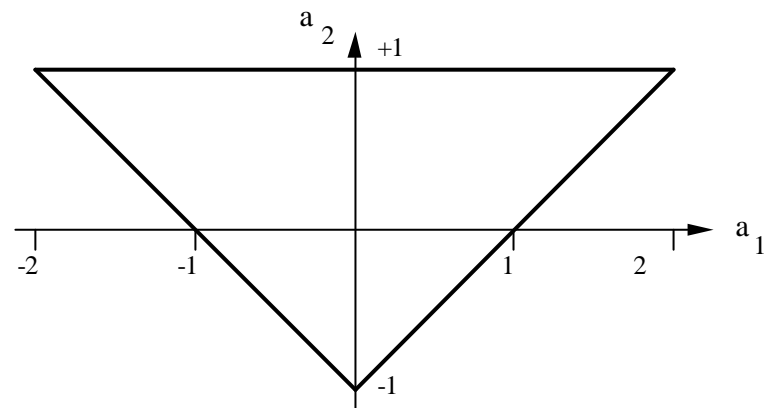
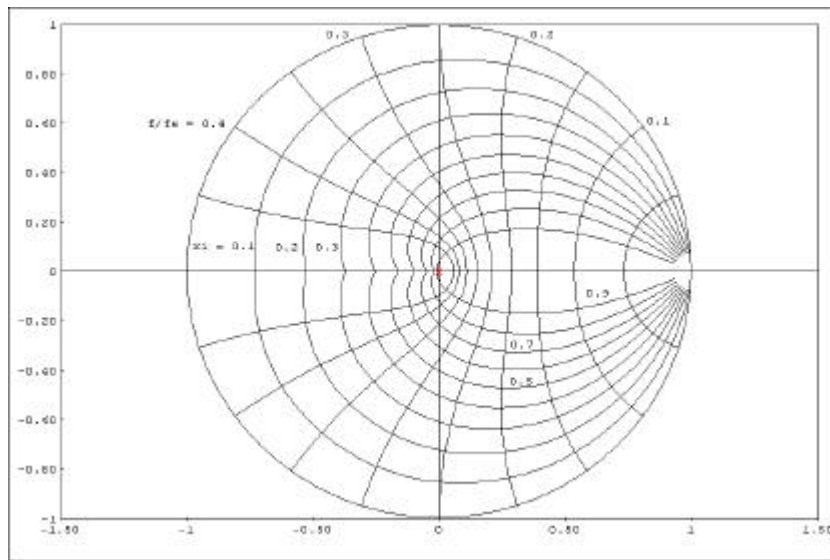


## Système échantillonné du 2<sup>e</sup> ordre

Discrétisation avec bloqueur d'un syst. cont. du 2<sup>e</sup> ordre + retard

$$H(z^{-1}) = \frac{z^{-d} (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

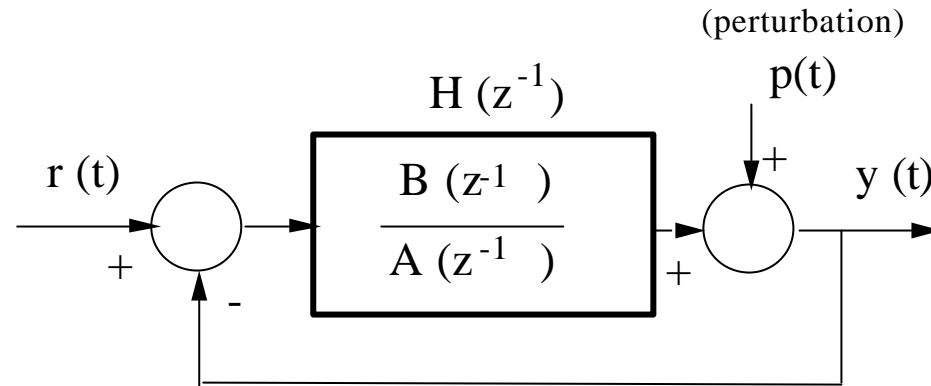
Pôles:  $z_{1,2} = e^{-z w_0 T_e \pm j w_0 \sqrt{1-z^2} T_e}$  (pôles continus transformés par :  $e^{sT_e}$ )



Domaine de stabilité pour les paramètres  $a_1$  et  $a_2$

Courbes  $z = \text{const.}$  et courbes  $\frac{w_0 T_e}{2p} = \frac{f_0}{f_e} = \text{const}$

## Systèmes échantillonnés en boucle fermée



$$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n_B} z^{-n_B}$$

( $b_1, b_2 \dots b_d$  peuvent être nuls s'il y a un retard )

F.T. de la boucle fermée:

$$H_{BF}(z^{-1}) = \frac{H(z^{-1})}{1 + H(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1}) + B(z^{-1})}$$

## Erreur statique en boucle fermée

$$(r(t) = \text{const.}; z = 1)$$


$$y = H_{BF}(1)r = \frac{\sum_{i=1}^{n_B} b_i}{A(1) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i} r$$

Erreur statique nulle ( $y = r$ ):  $H_{BF}(1) = 1$

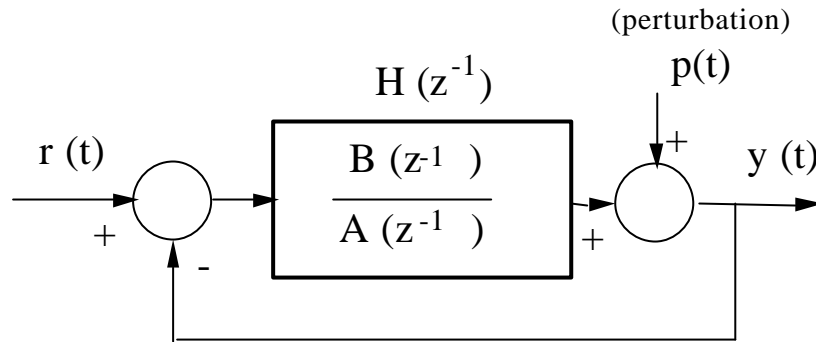
$$H_{BF}(1) = 1 \quad \text{et} \quad \sum b_i \neq 0 \Rightarrow A(1) = 0$$

Pour obtenir  $A(1) = 0$  il faut  $A(z^{-1}) = (1 - z^{-1})A'(z^{-1})$   
 $A'(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_{A'}} z^{-n_{A'}}$

$$H(z^{-1}) = \boxed{\frac{1}{1 - z^{-1}}} \cdot \frac{B(z^{-1})}{A'(z^{-1})}$$


 Intégrateur numérique

## Rejet de perturbations



$$\text{F.T. } p \longrightarrow y : S_{yp}$$

$S_{yp}$ : *Fonction de sensibilité  
perturbation - sortie*

$$S_{yp}(z^{-1}) = \frac{1}{1 + H(z^{-1})} = \frac{A(z^{-1})}{A(z^{-1}) + B(z^{-1})}$$

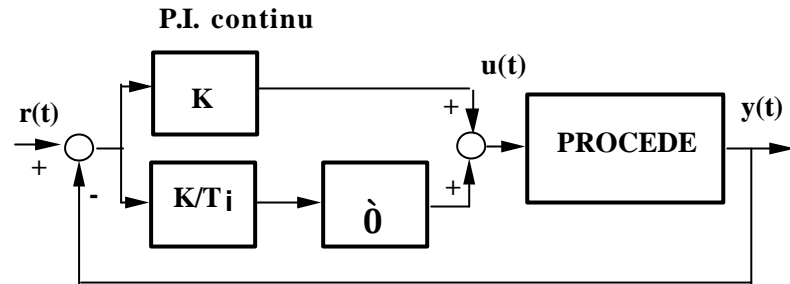
Régime stationnaire ( $z = 1$ ):  $y = S_{yp}(1) p = \frac{A(1)}{A(1) + B(1)} p$

Réjection parfaite de perturbations constantes :  $A(1) = 0$

*Il faut un intégrateur dans la voie directe (voir tr. 26)*



# Régulateur PI numérique



$$u(t) = K \left[ 1 + \frac{1}{pT_i} \right] [r(t) - y(t)]$$

Discrétisation:  $\frac{dx}{dt} = px \approx \frac{x(t) - x(t-1)}{T_e} = \frac{1 - q^{-1}}{T_e} x(t)$ ;  $\int x dt = \frac{1}{p} x \approx \left[ \frac{T_e}{1 - q^{-1}} \right] x(t)$

On remplace  $p$  dans l'équation du régulateur continu par  $(1 - q^{-1})/T_e$

PI numérique: 
$$u(t) = \frac{K(1 - q^{-1}) + \frac{KT_e}{T_i}}{1 - q^{-1}} [r(t) - y(t)]$$

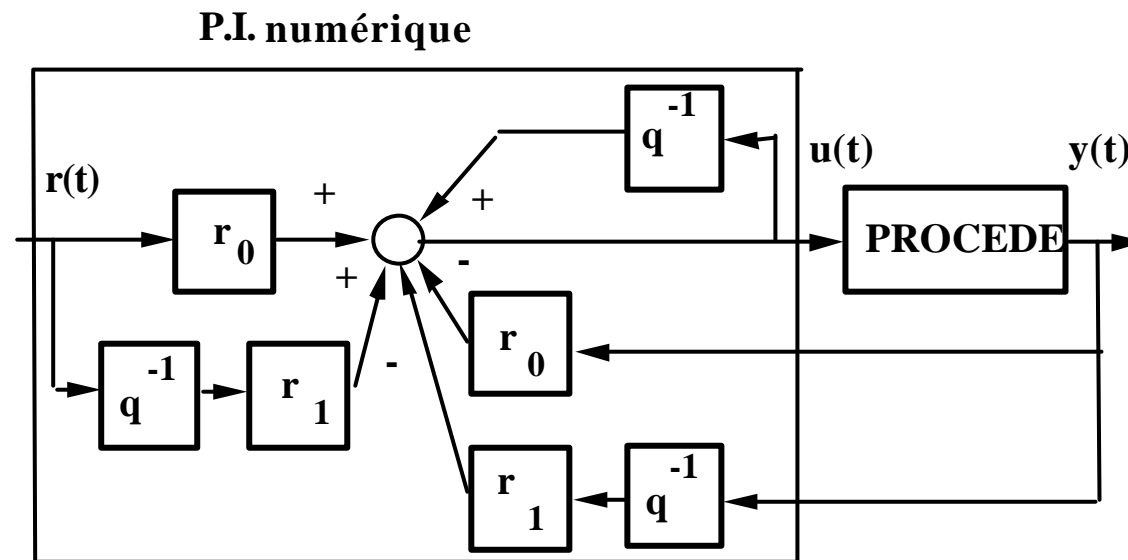
Après multiplication par  $(1 - q^{-1})$ :  $S(q^{-1})u(t) = T(q^{-1})r(t) - R(q^{-1})y(t)$

$$S(q^{-1}) = 1 - q^{-1} = 1 + s_1 q^{-1}; \quad (s_1 = -1) \quad T(q^{-1}) = K \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) - Kq^{-1} = r_0 + r_1 q^{-1}$$

## Régulateur PI numérique (suite)

$$S(q^{-1})u(t) = T(q^{-1})r(t) - R(q^{-1})y(t)$$

$$S(q^{-1}) = 1 - q^{-1} = 1 + s_1 q^{-1}; \quad (s_1 = -1) \quad T(q^{-1}) = K(1 + T_e/T_i) - Kq^{-1} = r_0 + r_1 q^{-1}$$

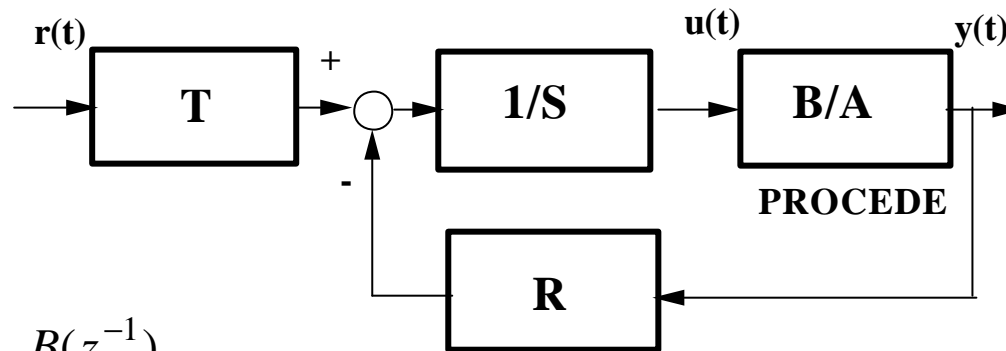


$$u(t) = u(t-1) - R(q^{-1})y(t) + T(q^{-1})r(t)$$

## Structure canonique des régulateurs numériques (R-S-T)

$$S(q^{-1})u(t) = T(q^{-1})r(t) - R(q^{-1})y(t) \quad (T \text{ différent de } R \text{ en général})$$

$$u(t) = -\frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})}y(t) + \frac{T(q^{-1})}{S(q^{-1})}r(t)$$



$$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

$$H_{BO}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})}$$

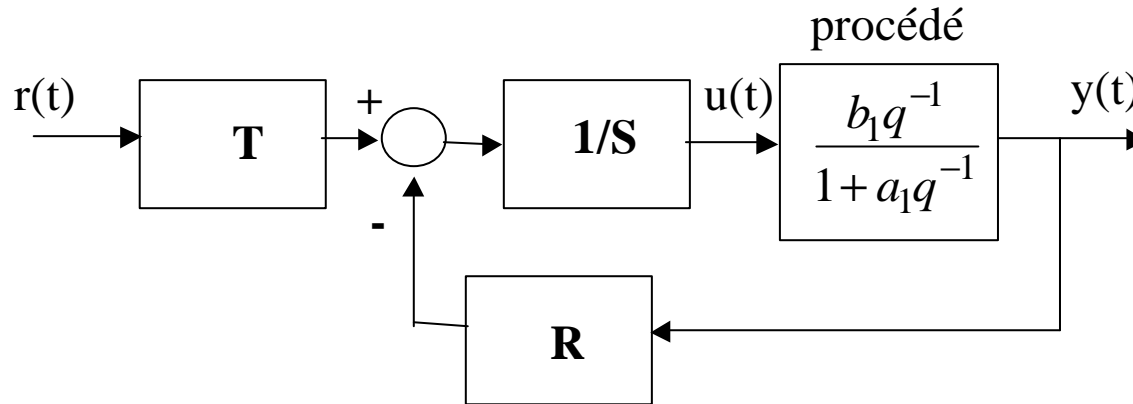
$$H_{BF}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{P(z^{-1})}$$

Les pôles de la B.F. sont définis par :

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1}) = 1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots$$



## Boucle de régulation avec PI numérique



$$R(q^{-1}) = T(q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} \quad ; \quad S(q^{-1}) = 1 - q^{-1} \quad ; \quad \boxed{r_0, r_1 = ?}$$

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})T(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1})} = \frac{B(q^{-1})T(q^{-1})}{P(q^{-1})}$$

Pôles désirés ( discrétisation 2<sup>e</sup> ordre- $\omega_0, \zeta$ )

$$(1 + a_1 q^{-1})(1 - q^{-1}) + b_1 q^{-1}(r_0 + r_1 q^{-1}) = 1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2}$$

$$1 + (a_1 - 1 + r_0 b_1)q^{-1} + (b_1 r_1 - a_1)q^{-2} = 1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2}$$

## Boucle de régulation avec PI numérique

(suite)

$$\begin{cases} a_1 - 1 + r_0 b_1 = p_1 \\ b_1 r_1 - a_1 = p_2 \end{cases}$$

**Paramètres du régulateur PI numérique :**

$$r_1 = \frac{p_2 + a_1}{b_1}$$

$$r_0 = \frac{p_1 - a_1 + 1}{b_1}$$

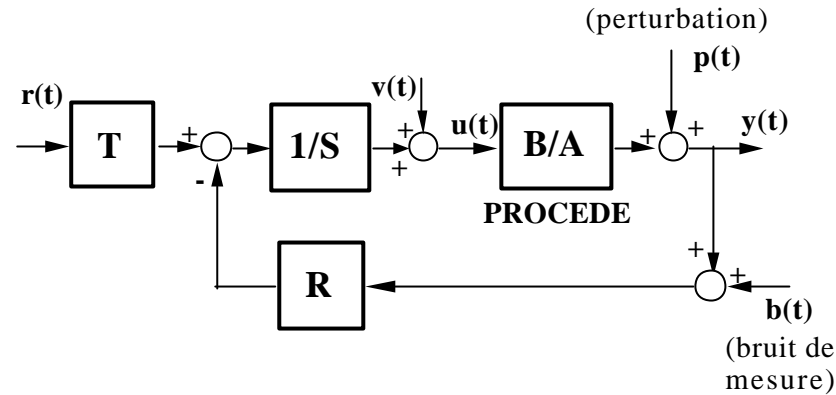
*Ils dépendent des paramètres du procédé ( $a_1, b_1$ ) et des performances imposées ( $p_1, p_2$ )*

Dans ce cas particulier on peut remonter aux paramètres du régulateur PI continu

$$T(q^{-1}) = K \left(1 + \frac{T_e}{T_i} q^{-1}\right) - K q^{-1} = r_0 + r_1 q^{-1} \quad (\text{voir transp. 30})$$

$$K = -r_1 \qquad T_i = -\frac{T_e r_1}{r_1 + r_0}$$

# Régulation numérique en présence de perturbations et bruit



Fonction de sensibilité perturbation - sortie  
( $p \rightarrow y$ )

$$S_{yp}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})S(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}$$

Fonction de sensibilité perturbation - entrée  
( $p \rightarrow u$ )

$$S_{up}(z^{-1}) = \frac{-A(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}$$

Fonction de sensibilité bruit - sortie  
( $b \rightarrow y$ )

$$S_{yb}(z^{-1}) = \frac{-B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}$$

Fonction de sensibilité perturbation  
entrée - sortie ( $v \rightarrow y$ )

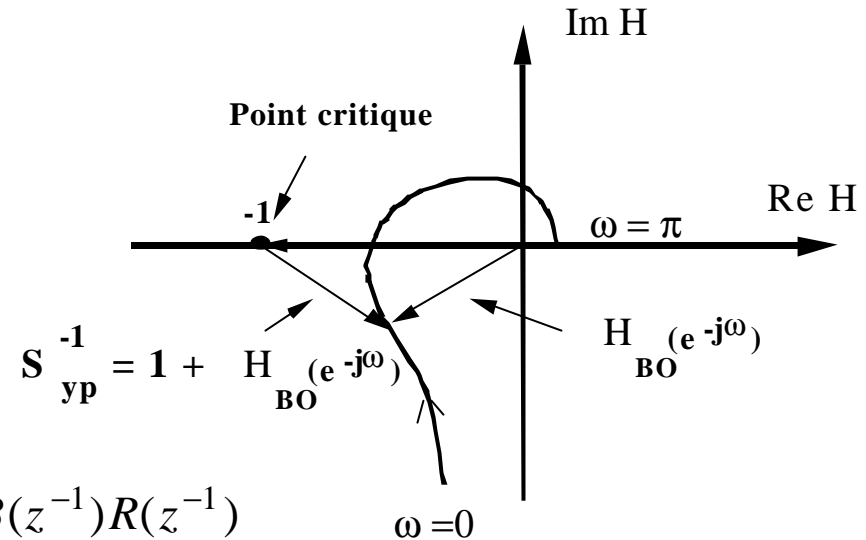
$$S_{yv}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})S(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}$$

**Toutes les 4 fonctions de sensibilité doivent être stables (voir pg.102 - 103)**

## Stabilité des systèmes échantillonnés en boucle fermée

Le lieu de Nyquist s'utilise comme dans le cas continu  
(peut être tracé avec WinReg ou *Nyquist\_OL.sci(.m)*)

$$H_{BO}(e^{-j\omega}) = \frac{B(e^{-j\omega})R(e^{-j\omega})}{A(e^{-j\omega})S(e^{-j\omega})}$$



$$S_{yp}^{-1}(z^{-1}) = 1 + H_{BO}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})}$$

**Critère de Nyquist (cas échantillonné- syst. stable en B.O.):**

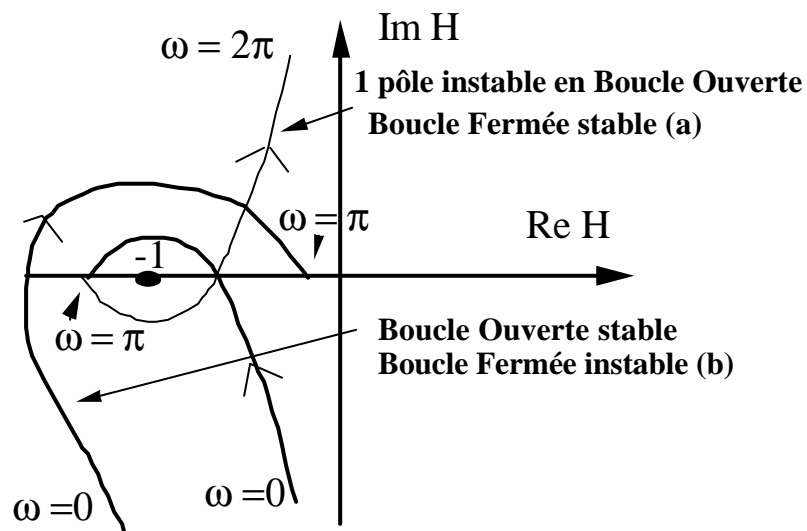
L'hodographe de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(e^{-j\omega})$  parcouru dans le sens des fréquences croissantes (entre 0 et  $0.5f_e$ ) doit laisser à gauche le point critique  $[-1, j0]$

**pour plus de détails voir pg.107-108**

## Stabilité des systèmes échantillonnés en boucle fermée

Critère de Nyquist (cas échantillonné- syst. instable en B.O.):

L'hodographe de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(e^{-j\omega})$  parcouru dans le sens des fréquences croissantes (entre 0 et  $f_e$ ) doit laisser à gauche le point critique  $[-1, j0]$  et le nombre d'encerclements du point critique en sens inverse des aiguilles d'une montre doit être égal au nombre de pôles instables en boucle ouverte



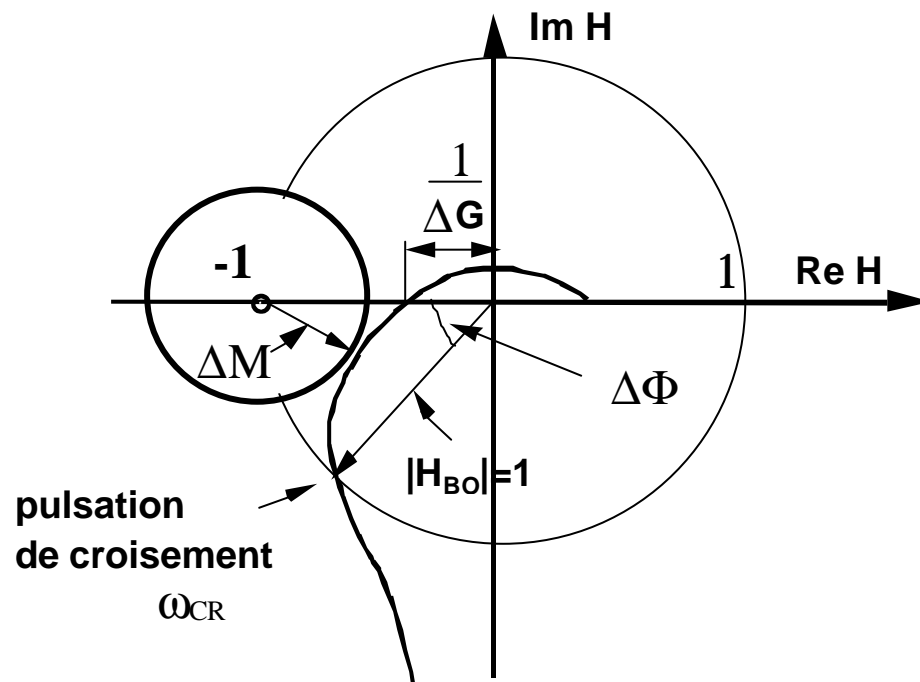
### Remarques:

*-Les pôles du régulateur peuvent devenir instables si on demande des performances élevées et on n'utilise pas une méthode de calcul appropriée*

*-Le lieu de Nyquist de  $0.5f_e$  à  $f_e$  est le symétrique par rapport à l'axe réel du lieu de Nyquist entre 0 et  $0.5f_e$*

## Marges de robustesse

La distance minimale par rapport au point critique caractérise la robustesse du système en B.F. vis-à-vis des variations des paramètres du systèmes (ou des incertitudes sur leur valeur)



- Marge de gain  $DG$
- Marge de phase  $Df$
- Marge de retard  $Dt$
- Marge de module  $DM$

**Rem.: Définitions identiques au cas continu ( voir chapitre I- transp 22)**

## Marges de robustesse – valeurs typiques

Marge de gain :  $DM \geq 2$  (6 dB) [*min* : 1,6 (4 dB)]

Marge de phase :  $30^\circ \leq \Delta\phi \leq 60^\circ$

Marge de retard : fraction du retard du système (10%) ou du temps de montée (10%)

Marge de module :  $DM \geq 0.5$  (-6 dB) [*min* : 0,4 (-8 dB)]

Une marge de module  $DM \geq 0.5$  implique  $DM \geq 2$  et  $\Delta\phi > 29^\circ$   
*Mais attention la réciproque n'est pas vraie !*

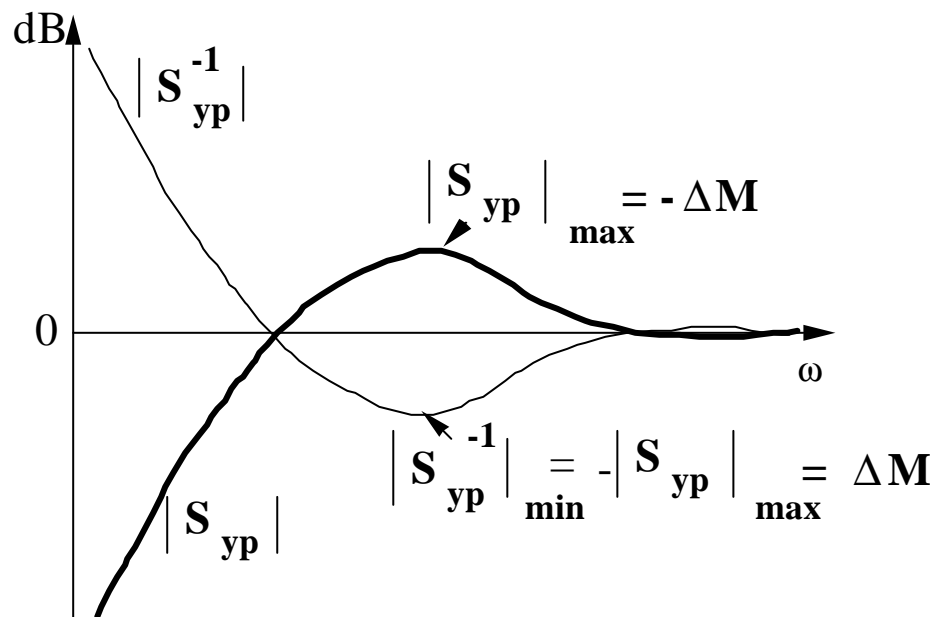
*La marge du module* définit aussi la tolérance vis-à-vis des non linéarités (voir livre pg.111-112)

## Marge de module et fonction de sensibilité

$$\Delta M = \left| 1 + H_{BO}(z^{-1}) \right|_{\min} = \left| S_{yp}^{-1}(z^{-1}) \right|_{\min} = \left( \left| S_{yp}(z^{-1}) \right|_{\max} \right)^{-1} =$$

$$\left( \left| \frac{A(z^{-1})S(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} \right|_{\max} \right)^{-1} \quad \text{pour } z^{-1} = e^{-j2pf}$$

$$\left| S_{yp}(e^{-j\omega}) \right|_{\max} \text{ dB} = \Delta M^{-1} \text{ dB} = -\Delta M \text{ dB}$$





## Stabilité robuste

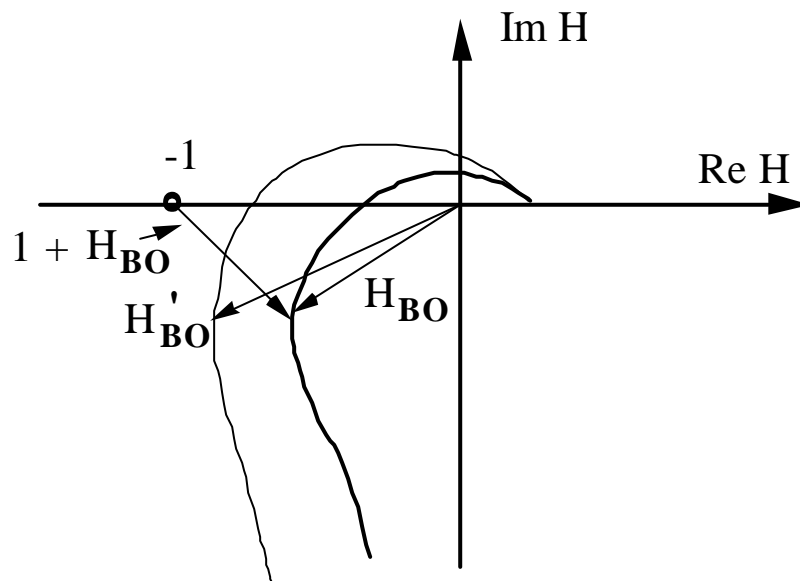
*Assurer la stabilité en présence d'incertitudes (ou variations) sur les paramètres du procédé*

$H_{BO}$  - F.T. nominale;  $H'_{BO}$  - F.T. différente de  $H_{BO}$

*Condition de stabilité robuste:*

$$\left| H'_{BO}(z^{-1}) - H_{BO}(z^{-1}) \right| < \left| 1 + H_{BO}(z^{-1}) \right| = \left| S_{yp}^{-1}(z^{-1}) \right| =$$

$$\left| \frac{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})} \right| = \left| \frac{P(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})} \right| ; \quad z^{-1} = e^{-j\omega}$$

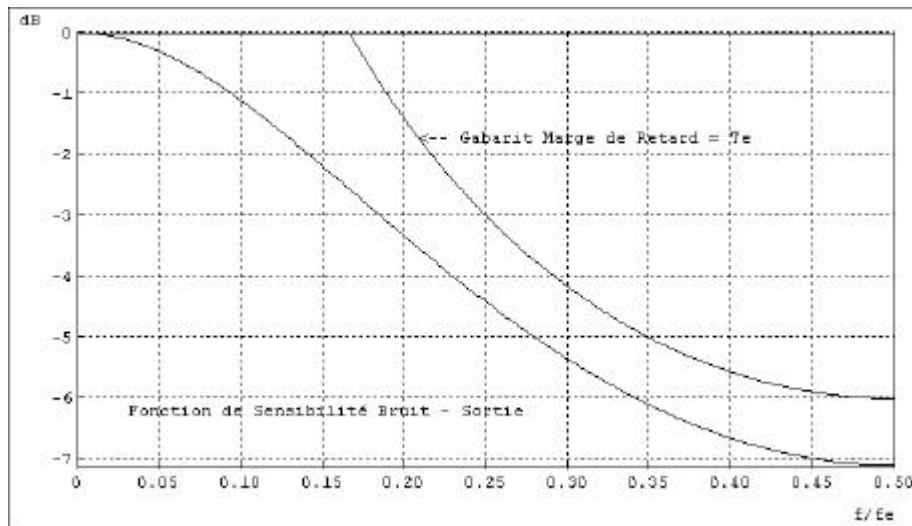


Pour d'autres conditions de stabilité robuste utilisant  $S_{up}$  et  $S_{yb}$  voir livre pg.112-117

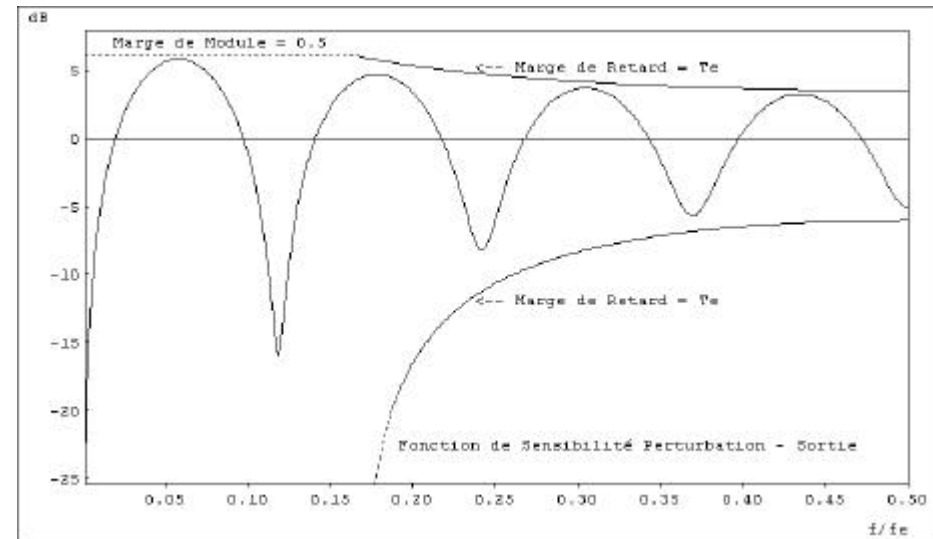
## Gabarits fréquentiels sur les fonctions de sensibilité

A partir des conditions de stabilité robuste on peut définir des gabarits fréquentiels sur les fonctions de sensibilité garantissant la marge de retard et la marge de module (livre pg.117-120).

*Les gabarits sont essentiels pour le calcul d'un bon régulateur*



Gabarit fréquentiel sur la fonction de sensibilité bruit-sortie  $S_{yb}$  pour  $\Delta\tau = T_e$



Gabarit fréquentiel sur la fonction de sensibilité perturbation-sortie  $S_{yp}$  pour  $\Delta\tau = T_e$  et  $\Delta M = 0.5$

## Quelques remarques récapitulatives

-Les modèles dynamiques discrets sont décrits par des equations récursives:

$$y(t) = - \sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t-d-i)$$

$u(t)$  = entrée ;  $y(t)$  = sortie ;  $d$  = retard en nb. entier de périodes d'échantillonnage

-L'opérateur de retard  $q^{-1}$  et un outil commode de codage des equations récursives.

-Le comportement entré-sortie peut être décrit par l'opérateur de transfert:

$$H(q^{-1}) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad A(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i q^{-i} \quad B(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_B} b_i q^{-i}$$

-Les régulateurs numériques ont une forme canonique (R-S-T). C'est des régulateurs à deux degrés de liberté

$$S(q^{-1})u(t) = -R(q^{-1})y(t) + T(q^{-1})r(t) \quad r(t) = \text{consigne}$$

-Le lieu de Nyquist (domaine fréquentiel) et les fonctions de sensibilité jouent un rôle essentiel pour l'étude de la stabilité du système en boucle fermée et de sa robustesse vis-à-vis des variations des paramètres du procédé.