Chapitre IV

Méthodes de calcul des régulateurs numériques en présence de perturbations aléatoires

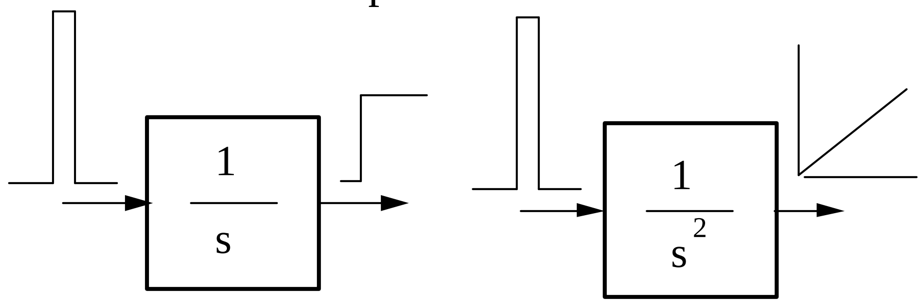
Chapitre 4. Méthodes de calcul des régulateurs numériques en présence de perturbations aléatoires

Description des perturbations

Perturbations déterministes

impulsion Dirac — échelon — rampe

Peuvent être décrites comme une impulsion passée par un filtre



Modèle de perturbation — Modèle de perturbation

Perturbations aléatoires

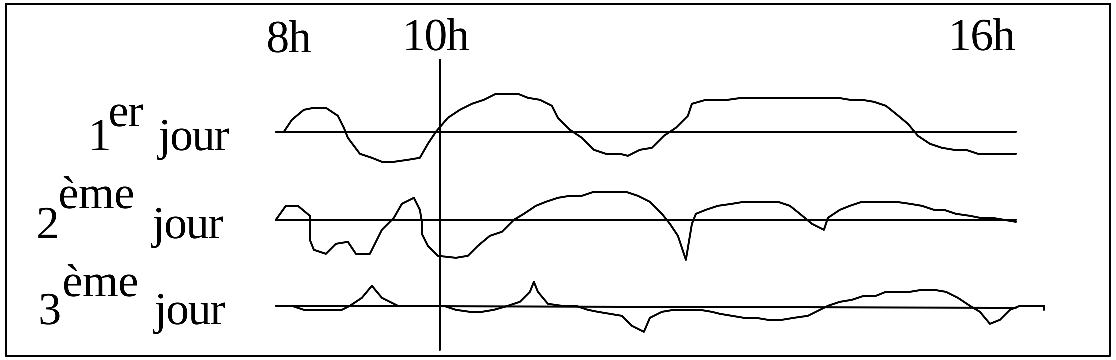
Ne peuvent pas être décrites d’une façon déterministe car elles ne sont pas réproductibles.

La plupart des perturbations aléatoires peuvent être décrites comme *un bruit blanc passé par un filtre*.

Le *bruit blanc* joue le rôle de *l’impulsion de Dirac* en stochastique.

Processus stochastique (aléatoire)

Exemple: enregistrement de la sortie réglée en régime de régulation sur un horizon significatif (1 journée)

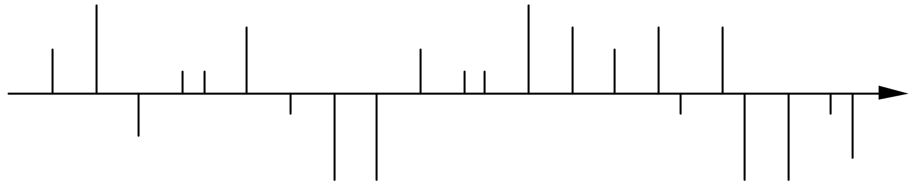


- chaque évolution peut être décrite par une fonction *f(t)* différente (réalisation du processus stochastique)
- si on fixe le temps (ex.: 10h) on mesurera sur chaque *essai* (journée) une autre valeur (*variable aléatoire*)
- on peut définir une *statistique* (valeur moyenne, variance) et des *probabilités* d'apparition des différentes valeurs
- si le *processus stochastique* est *ergodique* les statistiques sur un *essai* sont significatives
- si le *processus stochastique* est *gaussien* la connaissance de la v.m. et de la var. permet de donner la probabilité d'apparition d'une valeur (cloche de Gauss – A.1)

Bruit blanc discret gaussien

Il constitue le *signal générateur*

{*e(t)*}: Séquence de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, de valeur moyenne nulle et variance $s^2\ (0, s)$ écart type



$$V.M. = E\{e(t)\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} e(t) = 0$$

$$var = E\{e^2(t)\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} e^2(t) = s^2$$

Indépendance : La connaissance de *e(i)* ne permet pas de prédire une approximation de *e(i+1)*, *e(i+2)*….

Test d'indépendance

Fonction d'autocorrélation (covariance):

$$R(i) = E\{e(t)e(t-i)\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} e(t)e(t-i)$$

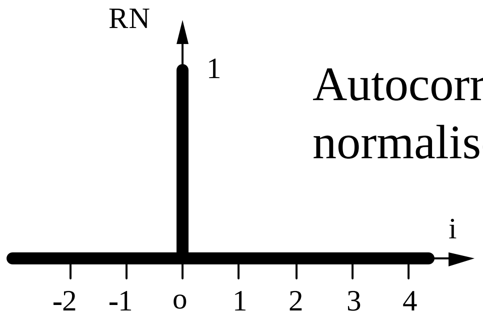
Rem.: R(0) = var = s^2

Fonction d'autocorrélation (covariance) normalisée:

$$RN(i) = \frac{R(i)}{R(0)} \qquad (RN(0) = 1)$$

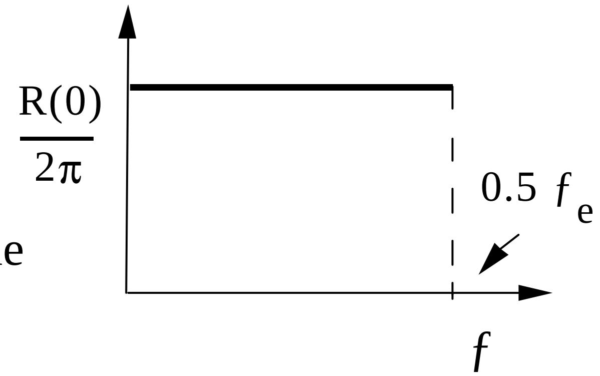
Test de blancheur (indépendance): *R(i)=RN(i) = 0 i= 1, 2, 3..-1, -2…*

Bruit blanc

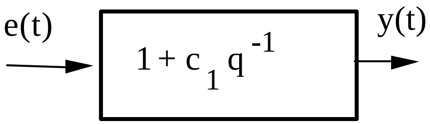


Autocorrélations normalisées

Densité spectrale



Processus *moyenne mobile* (*ajustée*) – M.A.



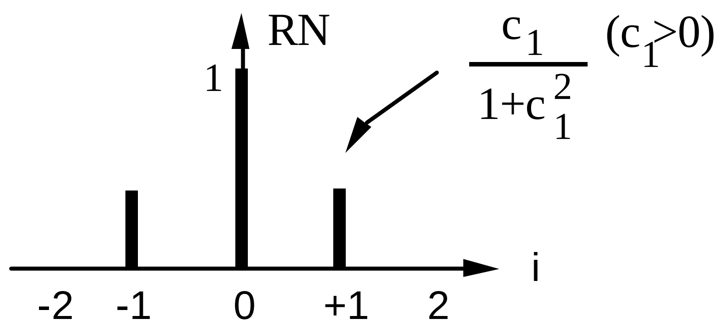
$$y(t) = e(t) + c_1 e(t-1) = (1 + c_1 q^{-1}) e(t)$$

$$V.M. = E\{y(t)\} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} e(t) + c_1 \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} e(t-1) = 0$$

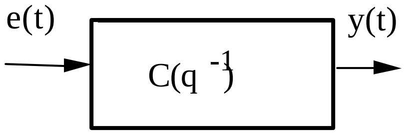
$$R_y(0) = E\{y^2(t)\} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y^2(t) = (1 + c_1^2) s^2$$

$$R_y(1) = E\{y(t)y(t-1)\} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)y(t-1) = \frac{1}{N} c_1 \sum_{t=1}^{N} e^2(t) = c_1^2 s^2$$

$$R_y(2) = R_y(3) = .. = 0$$



Processus *moyenne mobile* (*ajustée*) – M.A.



$$y(t) = e(t) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i e(t-i) = C(q^{-1})e(t)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_c} c_i q^{-i} = 1 + q^{-1} C^*(q^{-1})$$

$$R(i) = 0 \quad i \geq n_C + 1 \quad i \geq -(n_C + 1)$$

Densité spectrale:

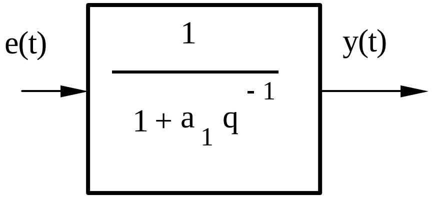
f_e

$$f_y(w) = C(e^{jw})C(e^{-jw})\frac{s^2}{2p} = \left|C(e^{jw})\right|^2 \frac{s^2}{2p}$$

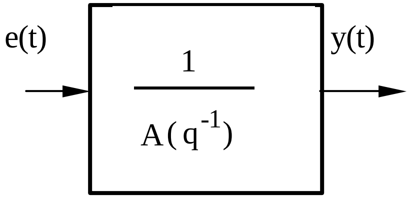
Relation spectre/fonction de transfert:

$$f_y(z) = C(z)C(z^{-1})f_e(z)\,;\; z = e^{jw}$$

Processus *auto-régressif* – A.R.



$$y(t) = -a_1 y(t-1) + e(t) = \frac{e(t)}{1 + a_1 q^{-1}} \qquad |a_1| < 1$$



$$y(t) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t-1) + e(t) \quad \longrightarrow \quad A(q^{-1}) y(t) = e(t)$$

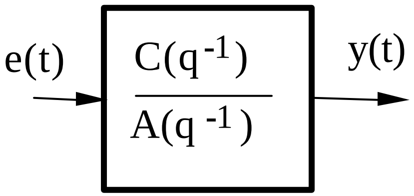
$$A(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i q^{-i} = 1 + q^{-1} A^*(q^{-1})$$

Asymptotiquement stable

Densité spectrale

$$f_y(z) = \frac{1}{A(z)} \frac{1}{A(z^{-1})} f_e(z) \qquad f_y(w) = f_y(z)\Big|_{z=e^{jw}}$$

Processus A.R.M.A.(*auto-régressif à moyenne ajustée*)



$$y(t) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i e(t-i) + e(t)$$

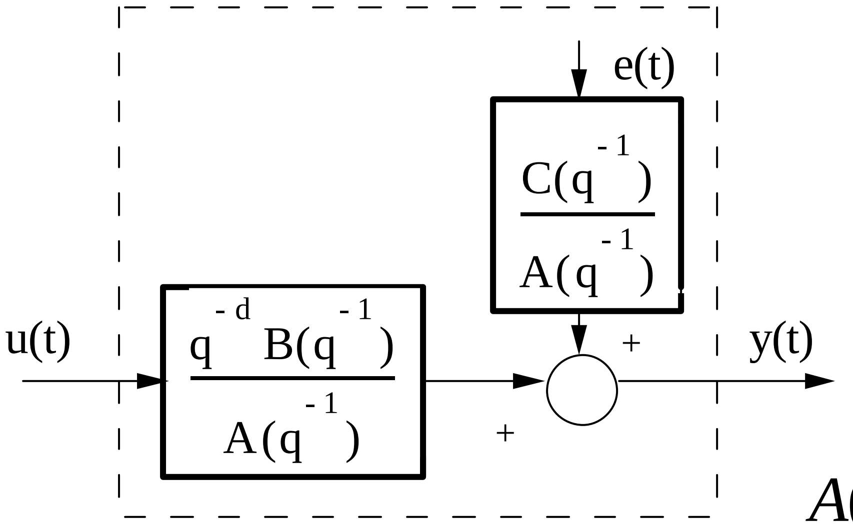
$$A(q^{-1})y(t) = C(q^{-1})e(t)$$

Asymptotiquement stable

Densité spectrale

$$f_y(z) = \left(\frac{C(z)}{A(z)}\right)\left(\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}\right) f_e(z)$$

Processus A.R.M.A.X. (*A.R.M.A. avec entrée exogène*)



$$y(t)=\frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t)+\boxed{\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(t)}$$

Perturbation

$$A(q^{-1})y(t)=q^{-d}B(q^{-1})u(t)+C(q^{-1})e(t)$$

$$y(t+1)=-\sum_{i=1}^{n_A}a_i y(t+1-i)+\sum_{i=1}^{n_B}b_i u(t+1-d-i)+\sum_{i=1}^{n_C}c_i e(t+1-i)+e(t+1)$$

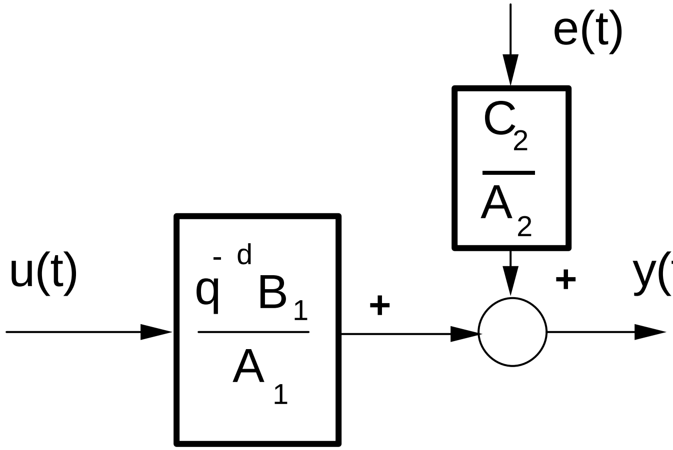
$$y(t+1)=-A^*(q^{-1})y(t)+B^*(q^{-1})u(t-d)+C(q^{-1})e(t+1)$$

Remarque: en général $n_C = n_A$

Exemple: $n_A=1;\, n_B=1;\, n_C=1;\, d=0$

$$y(t+1)=-a_1 y(t)+b_1 u(t)+c_1 e(t)+e(t+1)$$

Généralité du modèle A.R.M.A.X.



$$y(t) = \frac{q^{-d} B_1(q^{-1})}{A_1(q^{-1})} u(t) + \frac{C_2(q^{-1})}{A_2(q^{-1})} e(t)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = \frac{q^{-d} B_1 A_2}{A_1 A_2} u(t) + \frac{C_2 A_1}{A_1 A_2} e(t) = \frac{q^{-d} B}{A} u(t) + \frac{C}{A} e(t)$$

$$A = A_1 A_2 \; ; B = B_1 A_2 \; ; C = C_2 A_1$$

Prédiction optimale

$\hat{y}(t+1/t) =$ Prédiction de *y(t+1)* basée sur les mesures de *u* et *y* disponibles jusqu'à *t*

Erreur de prédiction: $\quad e(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1)$

Objectif: $\quad \hat{y}(t+1/t) = \hat{y}(t+1) = f(y(t), y(t-1), \ldots, u(t), u(t-1), \ldots)$

tel que : $\quad E\left\{[y(t+1) - \hat{y}(t+1)]^2\right\} = \min$

Exemple : $\quad y(t+1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) + e(t+1)$

$$e(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) = [-a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) - \hat{y}(t+1)] + e(t+1)$$

$$E\left\{[y(t+1) - \hat{y}(t+1)]^2\right\} = E\left\{[-a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) - \hat{y}(t+1)]^2\right\} + E\left\{e^2(t+1)\right\}$$
$$+ 2E\{\underbrace{e(t+1)[-}_{=\,0}a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t)]\}$$

Condition d'optimalité: $\quad E\left\{[-a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) - \hat{y}(t+1)]^2\right\} = 0$

$$\hat{y}(t+1)\Big|_{opt} = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) \longrightarrow e(t+1)\Big|_{opt} = y(t+1) - \hat{y}(t+1)\Big|_{opt} = e(t+1)$$

$$e(t) = e(t) \longrightarrow \hat{y}(t+1)\Big|_{opt} = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t)$$

Prédiction optimale

A.R.M.A.X.:

$$y(t+1) = -A^*(q^{-1})y(t) + B^*(q^{-1})u(t-d) + C(q^{-1})e(t+1)$$

Prédicteur optimal(théorique):

$$\hat{y}(t+1) = -A^*(q^{-1})y(t) + B^*(q^{-1})u(t-d) + C^*(q^{-1})e(t)$$

Erreur de prédiction:

$$e(t+1)\big|_{opt} = y(t+1) - \hat{y}(t+1) = e(t+1)$$

Prédicteur optimal (mis en œuvre):

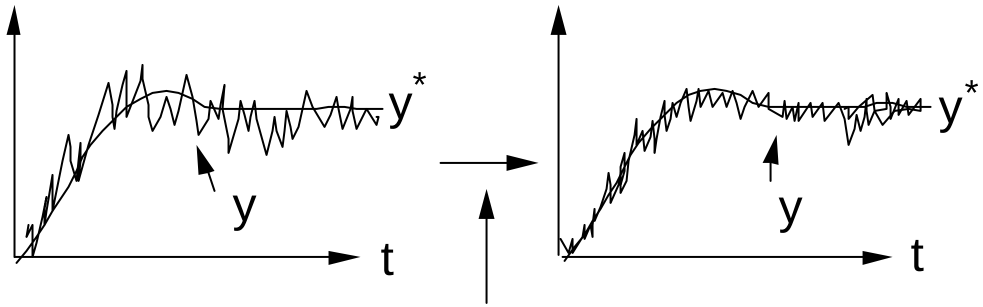
$$\hat{y}(t+1) = -A^*(q^{-1})y(t) + B^*(q^{-1})u(t-d) + C^*(q^{-1})\boldsymbol{e}(t)$$

Poursuite et régulation à variance minimale

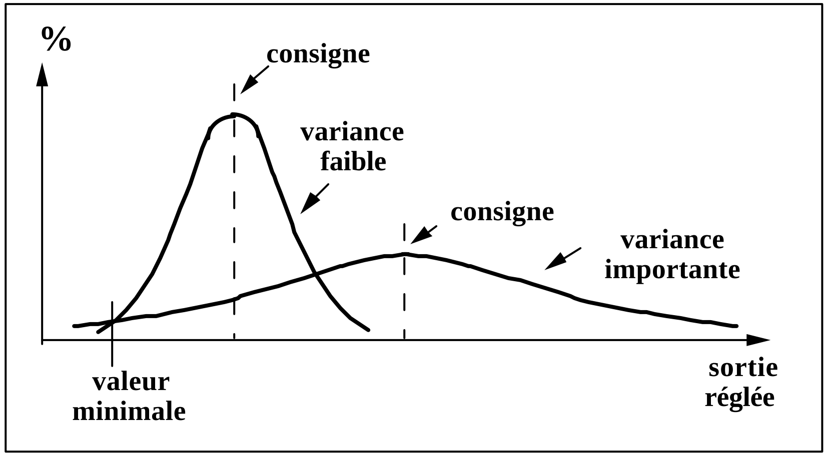
- perturbations aléatoires
- le modèle échantillonné du procédé a des zéros stables

Objectif: *minimiser la variance (écart type) de la sortie*

$$J(u(t)) = E\left\{\left[y(t) - y^*(t)\right]^2\right\} \approx \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[y(t) - y^*(t)\right]^2 = \min$$



commande à variance minimale



- Il faut introduire un modèle pour les perturbations
- Procédé + perturbation: Modèle ARMAX

Poursuite et régulation à variance minimale

Procédé + perturbation: $y(t+1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + c_1 e(t) + e(t+1)$

Trajectoire de référence: $y^*(t+1)$

Calcul critère:

$$E\{[y(t+1) - y^*(t+1)]^2\} = E\{[-a_1 y(t) + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + c_1 e(t) - y^*(t+1)]^2\}$$
$$+E\{e^2(t+1)\} + 2\underbrace{E\{e(t+1)[-a_1 y(t) + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + c_1 e(t) - y^*(t+1)]\}}_{=0}$$

Condition d'optimalité: $E\{[-a_1 y(t) + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + c_1 e(t) - y^*(t+1)]^2\} = 0$

Loi de commande (théorique):

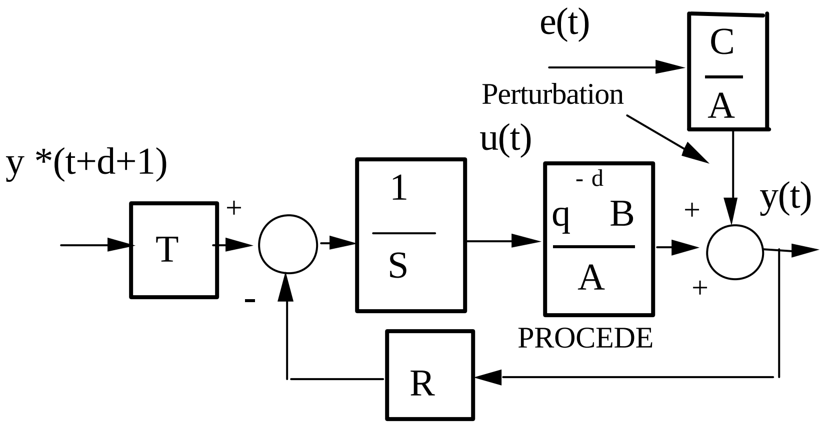
$$u(t) = \frac{y^*(t+1) - c_1 e(t) + a_1 y(t)}{b_1 + b_2 q^{-1}} \Rightarrow y(t+1) - y^*(t+1) = e(t+1) \longrightarrow y(t) - y^*(t) = e(t)$$

Loi de commande (mise en oeuvre):

$$u(t) = \frac{(1 + c_1 q^{-1}) y^*(t+1) - (c_1 - a_1) y(t)}{b_1 + b_2 q^{-1}} = \frac{T(q^{-1}) y^*(t+1) - R(q^{-1}) y(t)}{S(q^{-1})}$$

Même loi de commande que pour « Poursuite et régulation à objectifs indépendants en choisissant $P(q^{-1}) = C(q^{-1})$

Pôles de la boucle fermée



$$u(t) = \frac{T(q^{-1})y^*(t+1) - R(q^{-1})y(t)}{S(q^{-1})}$$

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{T(q^{-1})q^{-(d+1)}B^*(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-1}B^*(q^{-1})R(q^{-1})}$$

$A(q\text{-}1) = 1 + a_1\, q^{-1}$; $B(q^{-1}) = q^{-1}\, B^*(q^{-1})$; $B^*(q^{-1}) = b_1 + b_2\, q^{-1}$; $d = 0$

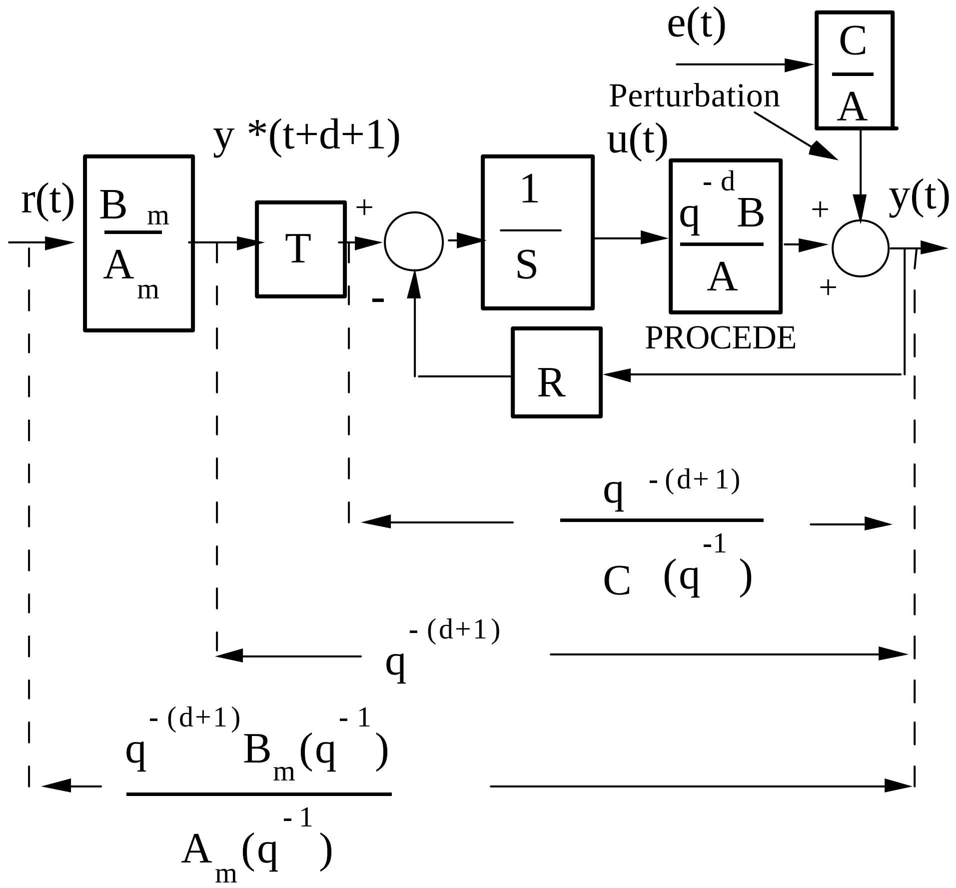
$T(q^{-1}) = C(q^{-1}) = 1 + c_1\, q^{-1}$; $S(q^{-1}) = B^*(q^{-1}) = b_1 + b_2\, q^{-1}$; $R(q^{-1}) = r_0 = c_1 - a_1$

$$H_{BF}(q^{-1}) = \frac{T(q^{-1})q^{-1}}{A(q^{-1}) + q^{-1}R(q^{-1})} = \frac{T(q^{-1})q^{-1}}{C(q^{-1})} = q^{-1}$$

Pôles B.F.

Le modèle de la perturbation ($C(q^{-1})$) définit les pôles de la boucle fermée et donc le comportement en régulation

Poursuite et régulation à variance minimale – cas général



Calcul identique à la *poursuite et régulation à objectifs indépendants* en prenant $P(q^{-1}) = C(q^{-1})$ (voir Chapitre 3)

Poursuite et régulation à variance minimale – cas général

$$u(t) = \frac{T(q^{-1})y^*(t+d+1) - R(q^{-1})y(t)}{S(q^{-1})}$$

$$T(q^{-1}) = C(q^{-1})\ ;\ S(q^{-1}) = B^*(q^{-1})S'(q^{-1})$$

$$A(q^{-1})S'(q^{-1}) + q^{-(d+1)}B^*(q^{-1})R(q^{-1}) = C(q^{-1})$$

Résolution avec WinREG (Adaptech) ou *predisol.sci(.m)*

Erreur de prédiction: $y(t+d+1) - y^*(t+d+1) = S'(q^{-1})e(t+d+1)$

M.A.. d'ordre *d*

Test d'optimalité:

$$R(i) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[y(t) - y^*(t)\right]\cdot\left[y(t-i) - y^*(t-i)\right] \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

$$\boxed{RN(i) \approx 0 \quad i \geq d+1}$$

théorique

$$\boxed{\left|RN(i)\right| \leq 02.17\sqrt{N} \quad i \geq d+1}$$

pratique

Poursuite et régulation à variance minimale.Exemple

Procédé : $d = 0$

$B(q\text{-}1) = 0.2\ q\text{-}1 + 0.1\ q\text{-}2$

$A(q\text{-}1) = 1 - 1.3\ q\text{-}1 + 0.42\ q\text{-}2$

-> $Bm = +0.0927 + 0.0687\ q\text{-}1$

Dynamique de poursuite ---

-> $Am = 1 - 1.2451\ q\text{-}1 + 0.4066\ q\text{-}2$

$Te = 1s,\ w0 = 0.5000\ rad/s,\ z = 0.900$

Polynôme bruit ----------------> $C(q\text{-}1) = 1 - 1.34\ q\text{-}1 + 0.49\ q\text{-}2$

Pré-spécifications : Intégrateur

*****LOI DE COMMANDE *****

$S(q\text{-}1)\ u(t) + R(q\text{-}1)\ y(t) = T(q\text{-}1)\ y^*(t+d+1)$

$y^*(t+d+1) = [(Bmq\text{-}1)/Am(q\text{-}1)]\ .\ ref(t)$

Régulateur : $R(q\text{-}1) = 0.96 - 1.23\ q\text{-}1 + 0.42\ q\text{-}2$

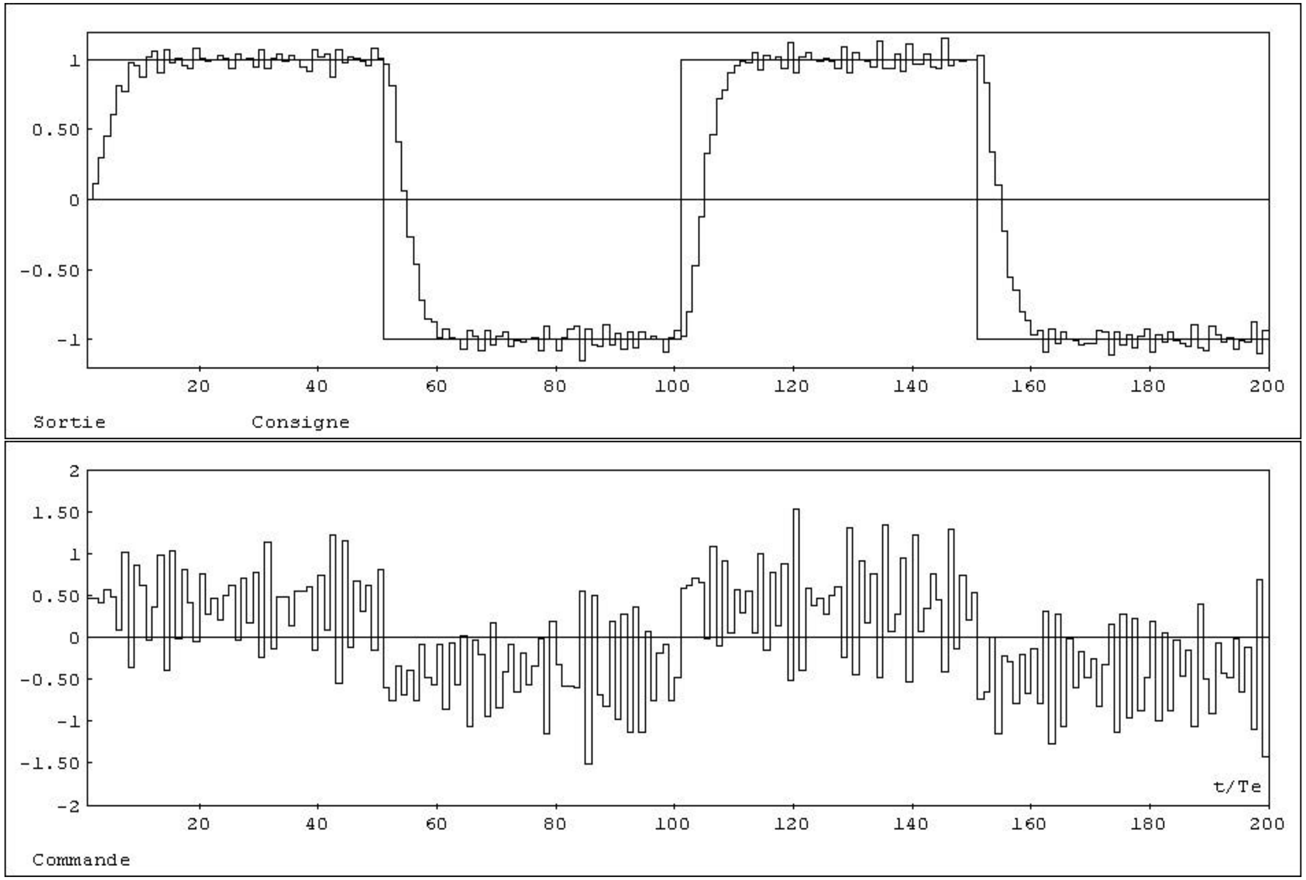
$S(q\text{-}1) = 0.2 - 0.1\ q\text{-}1 - 0.1\ q\text{-}2$

$T(q\text{-}1) = C(q\text{-}1)$

Marge de gain : 2.084 Marge de phase : 61.8 deg

Marge de module : 0.520 (- 5.68 dB) Marge de retard : 1.3 s

Poursuite et régulation à variance minimale.Exemple



Attention: Pour des raisons de robustesse et de sollicitation de l'actionneur on peut être amené a rajouter des pôles auxiliaires (voir livre pg.241)

Poursuite et régulation à variance minimale
Cas des zéros instables

La poursuite/régulation à variance minimale ne peut pas être appliquée

Solutions:

- Utilisation du placement de pôles avec un choix particulier des pôles
- Poursuite/régulation à variance minimale généralisée (critère modifié)

Utilisation du placement de pôles

$$B^*(q^{-1}) = B^+(q^{-1})B^-(q^{-1})$$

Partie instable

$B^-{}'(q^{-1})$ polynôme réciproque (stable) de $B^-(q^{-1})$

(s'obtient par l'inversion de l'ordre des coefficients)

Pôles de la boucle fermée

$$P(q^{-1}) = B^+(q^{-1})B^-{}'(q^{-1})C(q^{-1})$$
$$= A(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-(d+1)}B^*(q^{-1})R(q^{-1})$$

Pour détails et exemples, voir livre pg.242-246

Poursuite et régulation à variance minimale généralisée

Critère:

$$E\left\{\left[y(t+d+1)-y^*(t+d+1)+\frac{Q(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(t)\right]^2\right\}=\min$$

$$Q(q^{-1})=\frac{l\,(1-q^{-1})}{1+aq^{-1}}$$

Cas particulier : $\alpha = 0$

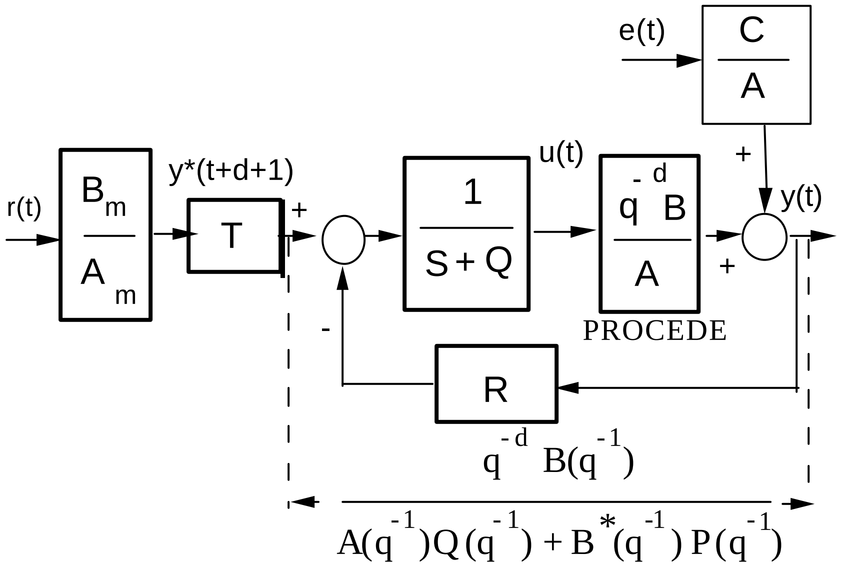
Pondération des variations de la commande

$$E\left\{\left[y(t+d+1)+\frac{l}{C(q^{-1})}[u(t)-u(t-1)]-y^*(t+d+1)\right]^2\right\}=\min$$

Régulateur: $$u(t)=\frac{C(q^{-1})y^*(t+d+1)-R(q^{-1})y(t)}{S(q^{-1})+Q(q^{-1})}$$

Permet de stabiliser le régulateur et le système
(mais pas toujours!)

Poursuite et régulation à variance minimale généralisée



Calcul:

- on calcule un régulateur type poursuite/régulation à variance minimale en faisant abstraction du caractère instable de *B*. *($Q(q^{-1})=0$)*
- on introduit *$Q(q^{-1})$* et on cherche $\lambda > 0$ qui stabilise le régulateur et la boucle fermée.

Il n'y a pas toujours une solution surtout s'il y a plusieurs zéros instables

Pour les détails de calcul et exemples, voir livre pg.246-249

Quelques remarques récapitulatives

-Pour une bonne régulation dans un environnement stochastique il faut disposer d’un modèle stochastique des perturbations.

-Nombreuses perturbations stochastiques peuvent être modélisées comme un bruit blanc discret gaussien passé par un filtre.

-La connaissance du filtre (*modèle de perturbation*) est suffisante.

-Le modèle ARMAX est souvent utilisé (procédé + perturbation).

-La poursuite/régulation à variance minimale ne peut s’utiliser que pour des modèles discrétisés de procédé à zéros stables.

-Cette technique est duale de la poursuite/régulation à objectifs indépendants utilisée dans le cas déterministe (identique pour $P = C$).

-Apporte un éclairage utile pour le choix des pôles de la B.F.

-Pour les modèles de procédé à zéros instable il faut utiliser des approximations de la poursuite/régulation à variance minimale.

-Ne jamais mettre en œuvre sans une analyse de robustesse (examen des fonctions de sensibilité).