Circularité et signaux aléatoires à temps discret *

Pierre COMON

I3S–CNRS, Sophia-Antipolis, 06560 Valbonne
comon@alto.unice.fr
THOMSON-SINTRA, B.P. 157, 06903 Sophia-Antipolis Cedex

Résumé

Les variables aléatoires complexes rencontrées en traitement du signal proviennent souvent de la transformée de Fourier de signaux réels. De ce fait, elles ne sont pas des variables complexes quelconques, mais jouissent de la propriété dite de circularité. Après avoir résumé quelques définitions et introduit les variables aléatoires complexes, plusieurs définitons de circularité sont proposées. Il est ensuite souligné que la Transformée de Fourier de certains signaux aléatoires stationnaires conduit à des variables complexes circulaires.

Mots clés

Stationnarité, Cumulants, Statistiques d'ordre élevé, Multispectres, Variables aléatoires complexes, Circularité.

Abstract

Complex random variables encountered in signal processing are often the result of a Fourier transform of real signals. As a consequence, they are particular complex variables, and enjoy so-called circularity properties. After a summary of basic definitions including introduction of complex variables, several definitions of circularity are proposed. It is then emphasized that the Fourier transform of some stationary random signals leads to circular complex variables.

Key words

Stationarity, Cumulants, High-order statistics, Multispectra, Complex random variables, Circularity.

*Soumis à la revue *Traitement du Signal* le 28 juillet 1993. Révisé le 10 janvier 1994, et le 30 août 1994.

1 Introduction

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. On notera $F_x(u)$ sa fonction de répartition. Lorsque X admet une densité de probabilité, $p_x(u)$, nous aurons $dF_x(u) = p_x(u)\,du$. Par exemple, si $F_x(u)$ est une fonction en escalier, elle n'admet pas de densité (la densité n'existe qu'au sens des distributions). Les moments généralisés de X sont définis pour toute application g par:

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, dF_x(u). \tag{1}$$

Dans la pratique, on utilise surtout des fonctions polynômiales $g(u)$, conduisant aux moments "classiques" d'ordre n, tels que la moyenne ou la variance de X, mais également des fonctions exponentielles. Ainsi, la *première fonction caractéristique* de X est:

$$\Phi_x(v) = E\{\, e^{\jmath v X}\,\}, \tag{2}$$

où $\jmath$ désigne la racine de -1. La fonction caractéristique $\Phi(v)$ est toujours continue et vaut 1 à l'origine. Elle est donc non nulle dans un voisinage de l'origine, sur lequel on pourra définir sa *seconde fonction caractéristique*:

$$\Psi_x(v) = \log(\,\Phi_x(v)\,). \tag{3}$$

Tandis que Φ_x génère les moments de X, Ψ_x génère ses cumulants [7]. Dans la suite, les moments seront notés par la lettre μ, et les cumulants par la lettre $\mathcal{C}$.

Une variable aléatoire complexe (scalaire), comme l'a très justement souligné Fortet [4], n'est rien d'autre qu'une variable aléatoire réelle de dimension 2. Ainsi, une variable aléatoire complexe Z admet une densité si et seulement si ses parties réelle et imaginaire admettent une densité conjointe. On pourra convenir de noter cette densité de façon compacte par $p_Z(u)$, où $u \in \mathbb{C}$.

On peut définir dans le même esprit la fonction caractéristique d'une variable complexe Z quelconque à valeurs dans $\mathbb{C}^N$. Si $Z = X + \jmath Y$, $X \in \mathbb{R}^N$, $Y \in \mathbb{R}^N$, alors

$$\Phi_Z(u) \stackrel{\text{def}}{=} E\{e^{\jmath[X^T v + Y^T w]}\} = E\{e^{\jmath\, Re[Z^\dagger u]}\}, \tag{4}$$

si $u = v + \jmath w$. Une propriété immédiate de cette notation compacte est que

$$\Phi_{aZ}(u) = \Phi_Z(a^* u), \tag{5}$$

pour tout scalaire complexe a. Nous avons par conséquent à notre disposition les mêmes outils que dans le cas de variables réelles. Cependant, les variables aléatoires complexes sont la plupart du temps obtenues par Transformée de Fourier (TF) de données réelles, ce qui leur confère une structure très particulière. Les variables aléatoires complexes obtenues de cette façon ne sont donc pas de simples variables aléatoires à 2 composantes réelles, mais des contraintes lient ces 2 composantes. C'est pourquoi il est pertinent d'introduire les variables aléatoires dites *circulaires*.

2 Définitions de la circularité

Définition 2.1 *Nous dirons qu'un vecteur aléatoire complexe de dimension N, Z, est circulaire (ou circulaire au sens fort), si et seulement si*

$$\Phi_Z(au) = \Phi_Z(u), \forall a \in \mathbb{C}, |a| = 1. \tag{6}$$

En particulier, si Z admet une densité, Z est circulaire si $Z\,e^{\jmath\theta}$ a même densité de probabilité que Z.

Cette définition est compatible avec les définitions proposées dans le passé. En effet, elle entraine la proposition suivante:

Proposition 2.2 *Soit Z un vecteur aléatoire complexe, dont les moments existent à tous les ordres. Alors Z est circulaire si et seulement si tous ses moments de la forme:*

$$\mu_{pq} = E\{ \prod_{\Sigma a_i = p} Z_i^{a_i} \prod_{\Sigma b_j = q} Z_j^{*b_j} \}$$

sont nuls dès que $p \neq q$.

Démonstration. Si Z est circulaire, alors les moments de Z et de $Z\,e^{\jmath\alpha}$ sont égaux, puisque toutes deux ont même loi. En particulier, l'égalité $\mu_{pq}\{Z\} = \mu_{pq}\{Z\,e^{\jmath\alpha}\}$ entraine que

$$\mu_{pq}\{Z\} = \mu_{pq}\{Z\}\, e^{\jmath\alpha(p-q)},$$

ce qui prouve la proposition. □

La proposition 2.2 montre par exemple qu'une variable aléatoire scalaire complexe circulaire vérifie $E\{Z\} = 0$, $E\{Z^2\} = 0$, $E\{Z^2\,Z^*\} = 0$...

En outre, d'après la proposition 2.2, les fonctions caractéristiques (et la densité de probabilité quand elle existe) d'un vecteur aléatoire complexe circulaire sont fonction uniquement de la variable matricielle $u\,u^\dagger$:

$$\exists f \,/\, \Phi_Z(u) = f(uu^\dagger). \tag{7}$$

Cette propriété peut être comparée à la définition des variables dites *sphériquement invariantes*. D'après [8], de telles variables sont telles que:

$$\exists f \,/\, \Phi_Z(u) = f(u^\dagger C u)$$

où C est une matrice hermitienne définie positive. Autrement dit, avec ces définitions, toute variable sphériquement invariante est circulaire, mais la réciproque n'est pas vraie.

Dans la suite, nous aurons besoin de la définition restrictive suivante:

Définition 2.3 *On dira qu'un vecteur aléatoire complexe Z est circulaire à l'ordre r s'il verifie*

$$E\{ \prod_{\Sigma a_i = p} Z_i^{a_i} \prod_{\Sigma b_j = q} Z_j^{*b_j} \} = 0 \tag{8}$$

pour tout couple (p, q) d'entiers positifs tel que $p + q \leq r$ et $p \neq q$.

Notons que cette définition ne suppose pas nécessairement que les moments sont finis pour $p = q$.

Dans le cas gaussien, la circularité à l'ordre 2 entraine la circularité à tous les ordres, et est caractérisée par deux propriétés liant les parties réelle et imaginaire. En effet, posons $Z = A + \jmath B$. Si Z est circulaire, alors $E\{ZZ^T\} = 0$ implique que $E\{AA^T - BB^T\} = 0$ et que $E\{AB^T + BA^T\} = 0$. Autrement dit, A et B ont même matrice de covariance, et leur covariance croisée est antisymétrique. C'est ainsi qu'ont été définies les variables gaussiennes complexes circulaires [11] [5].

3 Signaux aléatoires stationnaires

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats classiques de théorie du signal. Nous renvoyons aux ouvrages [1, ch. IX] [2, ch. VIII] [10, ch. I] [9, ch. 6] [3, ch. E.II.2] [7] pour les démonstrations.

Un processus réel à temps discret de dimension N, $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, est dit usuellement *stationnaire* (ou *fortement stationnaire*, ou *stationnaire au sens strict*) si et seulement si l'ensemble des propriétés statistiques conjointes des vecteurs $[X_{a_1}(t_1 + t), ..X_{a_k}(t_k + t)]$ ne dépend pas de la date t, et ce pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout k-uplet $(a_1, ..a_k)$, $1 \leq a_j \leq N$, et tout k-uplet $(t_1, .., t_k)$, $t_j \in \mathbb{Z}$. Cette définition est très forte et n'est pas toujours requise. Une définition bien connue est celle de la stationnarité jusqu'au second ordre (ou stationnarité au sens large, dite faible), qui requiert que la moyenne $\mu_X = E\{X(t)\}$ et la fonction de corrélation $\mathcal{C}_{X,ij}(\tau) = cum\{X_i(t), X_j(t+\tau)\}$ soient finies et qu'elles ne dépendent pas de la date t.

Mais pour notre propos, nous avons besoin de la stationnarité à l'ordre r:

Définition 3.1 *Un processus réel à temps discret de dimension N, $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, est dit stationnaire à l'ordre r si et seulement si ses multicorrélations (corrélations cumulantes) $\mathcal{C}_{X,i_1 i_2 .. i_r}(\tau_2, .., \tau_r) = cum\{X_{i_1}(t), X_{i_2}(t + \tau_2), ..., X_{i_r}(t + \tau_r)\}$ sont finies et ne dépendent pas de la date t.*

Il est clair qu'un processus stationnaire (au sens strict) est stationnaire à tous les ordres jusqu'à r si ses moments sont finis jusqu'à l'ordre r.

Il est connu (Herghotz, Cramér) que si $X(t)$ est un processus à temps discret de dimension N faiblement stationnaire, alors il existe une fonction matricielle unique $G(\lambda)$ à accroissements non négatifs telle que:

$$G(-1/2) = 0, \text{ et } \mathcal{C}(\tau) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi\jmath\tau\lambda}\, dG(\lambda). \tag{9}$$

On convient d'appeler cette fonction $G(\lambda)$ la *répartition spectrale* de puissance de $X(t)$, et $dG(\lambda)$ la *mesure spectrale* associée (d'après le théorème de Bochner, ce résultat s'applique d'ailleurs aussi aux processus à temps continu s'ils sont continus en moyenne quadratique).

De même, si $X(t)$ est stationnaire jusqu'à l'ordre r, alors il existe une fonction tensorielle $G(\lambda_2, .., \lambda_r)$ telle que [1]:

$$G(-1/2, .., -1/2) = 0, \tag{10}$$

$$\mathcal{C}(\tau_2, .., \tau_r) = \int_{-1/2}^{1/2} .. \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi\jmath \sum_{k=2}^{r} \tau_k \lambda_k} \, dG(\lambda_2, .., \lambda_r). \tag{11}$$

La quantité $dG(\lambda_2, .., \lambda_r)$ est la mesure multispectrale de $X(t)$.

Le signal $X(t)$ n'admet pas toujours de *densité* multispectrale d'ordre r. Une condition suffisante pour qu'il en admette une est qu'il soit *sommable à l'ordre* r, c'est à dire que $X(t)$ soit stationnaire d'ordre r et que ses multicorrélations d'ordre r soient absolument sommables:

$$\sum_{(u_2, .., u_r) \in \mathbb{Z}^{r-1}} |\mathcal{C}_{a_1 .. a_r}(u_2, .., u_r)| < \infty. \tag{12}$$

Cette propriété assure que les multicorrélations d'ordre r tendent suffisamment vite vers zéro pour justifier l'existence de leur transformée de Fourier, les densités multispectrales $f_{a_1 .. a_r}(\lambda_2, .., \lambda_r)$, qui sont alors continues. Ces dernières sont alors les différentielles d'ordre r de la fonction de répartition spectrale. Le processus $X(t)$ est alors mélangeant à l'ordre r: plus les échantillons sont éloignés les uns des autres, plus ils sont décorrélés à l'ordre r.

Les signaux aléatoires (faiblement stationnaires) eux-mêmes admettent une représentation spectrale (représentation dite de Cramér) qui sera notée:

$$X(t) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi\jmath t\lambda} \, dZ(\lambda), \tag{13}$$

où le processus $Z(\lambda)$ est un processus à accroissements orthogonaux, défini par les relations:

$$Z(\lambda) = \lim_{T \to \infty} Z(T; \lambda), \ \lambda \in [-1/2, 1/2] \tag{14}$$

$$Z(T; \lambda) = \int_{-1/2}^{\lambda} \sum_{t=-T}^{T} X(t) e^{-2\pi\jmath t y} dy \tag{15}$$

L'ensemble des définitions et propriétés essentielles que nous avons précisées jusqu'à présent vont maintenant servir à l'établissement de la circularité des variables spectrales.

4 Circularité des variables spectrales

Nous allons voir maintenant que les variables aléatoires complexes obtenues par TF de signaux aléatoires à temps discret stationnaires sont circulaires. Cependant, les signaux stationnaires n'admettent pas de transformée de Fourier,

[1] Cette écriture est autorisée si dG est une distribution tempérée, ce qui doit être vérifé par ailleurs. Nous aborderons ce point dans une correspondence ultérieure.

même lorsqu'ils admettent une représentation spectrale [9, ch. 6.2]. Une façon classique de contourner le problème est de raisonner sur le processus intégral $Z(\lambda)$ introduit plus haut, ou sur ses accroissements $dZ(\lambda)$.

Proposition 4.1 *Soient $X(t)$ un processus réel stationnaire jusqu'à l'ordre r, $r \geq 2$, et $Z(\lambda)$ sa répartition spectrale. Alors pour tout k, $1 \leq k \leq r$, et pour tout k-uplet $(\lambda_1, .., \lambda_k)$ de fréquences, $\lambda_j \in [-1/2, 1/2]$, les cumulants des accroissements spectraux s'écrivent:*

$$cum\{dZ_{a_1}(\lambda_1), .., dZ_{a_k}(\lambda_k)\} = \delta_1(\sum \lambda_j)\, dG_{a_1..a_k}(\lambda_2, .., \lambda_k), \tag{16}$$

où δ_1 désigne la distribution "peigne de Dirac" de période 1, et dG la mesure multispectrale de $X(t)$.

Démonstration. Par définition de $Z(\lambda)$, il vient que:

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} cum\{Z_{a_1}(\lambda_1), .., Z_{a_r}(\lambda_r)\} \tag{17}$$

$$= \sum_{t_1} .. \sum_{t_r} \int_{-1/2}^{\lambda_1} .. \int_{-1/2}^{\lambda_r} \mathcal{C}_{12..r}(t_2 - t_1, .., t_r - t_1)$$

$$e^{-2\pi\jmath \sum_{k=1}^{r} y_k t_k}\, dy_1..dy_r. \tag{18}$$

Puisque $X(t)$ est stationnaire à l'ordre r, on peut d'après (11) exprimer ses multicorrélations en fonction de ses mesures multispectrales correspondantes. D'où, en posant $t_1 = t$:

$$\alpha = \sum_{t_2..t_r} \int_{-1/2}^{\lambda_1} .. \int_{-1/2}^{\lambda_r} \int .. \int \sum_{t} exp\{-2\pi\jmath\, t(y_1 + \Sigma\, u_k)\}$$

$$exp\{2\pi\jmath \sum_{k=2}^{r} (u_k - y_k)t_k\}\, dG(u_2, .., u_r) dy_1..dy_r. \tag{19}$$

Or, la somme sur $t \in \mathbb{Z}$ de $e^{2\pi\jmath\, t\beta}$ est égale à la distribution tempérée *peigne de Dirac* de période 1, noté ici $\delta_1(\beta)$. Donc les $r-1$ premières sommes dans (19) valent $\delta_1(u_k - y_k)$. Par conséquent, $u_k = y_k$ et le cumulant calculé devient:

$$\alpha = \int_{-1/2}^{\lambda_1} .. \int_{-1/2}^{\lambda_r} dG(y_2, .., y_r)\, \delta_1(\sum_{k=1}^{r} y_k). \tag{20}$$

La proposition s'obtient alors par différentiation, grâce à la multilinéarité des cumulants [7]. □

En corollaire, on peut établir la propriété de circularité suivante:

Proposition 4.2 *Si en outre $X(t)$ est sommable à tous les ordres jusqu'à r, alors pour toute fréquence λ telle que $|\lambda| < \frac{1}{r}$, les vecteurs $dZ(\lambda)$ sont circulaires à l'ordre $(p+q) = r$. Autrement dit:*

$$E\{dZ_{n1}(\lambda)..dZ_{n_p}(\lambda)\, dZ^*_{m_1}(\lambda)..dZ^*_{m_q}(\lambda)\} = 0$$

dès que $p \neq q$, $1 \leq p, q \leq r$.

Notons que pour les processus à temps continu, la circularité décrite ci-dessus serait toujours assurée, pourvu que les écritures (9) et (11) soient autorisées (par exemple, lorsque les mesures multispectrales dG sont absolument sommables). On peut le vérifier en constatant que si la fréquence d'échantillonage tend vers l'infini, alors la condition sur la fréquence réduite $|\lambda| < \frac{1}{r}$ tend à être toujours vraie pour toute valeur λ finie.

Démonstration. Soit s un entier quelconque, $s \in \{1, 2, .., r\}$, et p et q deux entiers positifs tels que $p + q = s$. Appliquons la proposition 4.1 avec $\lambda_1 = \lambda_2 = .. = \lambda_p = \lambda$ et $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = .. = \lambda_{p+q} = -\lambda$. La somme des fréquences vaut $\sum \lambda_i = (p - q)\lambda$. Si $p \neq q$, alors une condition suffisante pour que $(p-q)\lambda$ ne soit jamais entier est que $0 < (p+q)|\lambda| < 1$. Le terme $\delta_1(\sum \lambda_i)$ est donc toujours nul sous les hypothèses de la présente proposition. Comme $X(t)$ est sommable à tous les ordres jusqu'à $r = (p + q)$, il admet une densité multispectrale d'ordre s définie par:

$$dG_{a_1 a_2 .. a_s}(\lambda_2, .., \lambda_s) = f_{a_1 a_2 .. a_s}(\lambda_2, .., \lambda_s)\, d\lambda_2 .. d\lambda_s ,$$

où $f_{a_1 a_2 .. a_s}$ est finie. D'après la proposition 4.1, tous les cumulants de $dZ(\lambda)$ d'ordre s sont donc nuls, pour tous les ordres s inférieurs ou égaux à r. Comme les moments sont fonctions polynômiales des cumulants, ils sont par conséquent aussi tous nuls. □

Conclusion. Dans cette section, nous avons donc constaté que les accroissements spectraux $dZ_{n_k}(\lambda_k)$ ne sont pas seulement orthogonaux (i.e. décorrélés à l'ordre 2), mais aussi décorrélés à l'ordre r, si l'on se place sur la variété $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \in \mathbb{Z}$. Notons que la borne proposée sur la fréquence dans la proposition 4.2 est la même que celle du théorème d'échantillonnage aux ordres supérieurs [6].

Autrement dit, pour obtenir des variables spectrales circulaires, il suffirait donc de filtrer les signaux temporels à $\frac{1}{r}$ de la fréquence d'échantillonnage. Par ailleurs, il est possible d'obtenir des variables aléatoires non ciculaires en $\lambda = \frac{k}{r}$, $1 \leq k \leq r$. C'est le cas notamment des séquences i.i.d., possédant un cumulant d'ordre r non nul. Ce phénomène peut être observé en pratique lorsqu'on manie les multispectres de signaux à temps discret large bande.

Pour terminer, soulignons qu'un aspect restreint de la circularité a été abordé dans ce court article. En effet, nous n'avons abordé que la circularité des vecteurs aléatoires comportant des échantillons de la forme $X_i(\lambda_i)$ où les fréquences λ_i sont égales en module, ce que l'on pourrait qualifier de *circularité marginale*. L'étude de la *circularité conjointe*, où les fréquences λ_i sont libres, reste une question ouverte, à laquelle le Prof. Picinbono s'est attelé tout récemment.

Remerciements. L'auteur remercie les experts anonymes pour leur travail soigné, qui a permis notamment de corriger des erreurs dans le manuscrit original, mais aussi tout particulièrement J.L. Lacoume pour plusieurs suggestions avisées.

Références

[1] A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET, *Théorie des Fonctions Aléatoires*, Masson, 1953.

[2] A. BLANC-LAPIERRE et B. PICINBONO, *Fonctions aléatoires*, Masson, 1981.

[3] D. De BRUCQ, *Théorie du Signal*, Masson, 1988.

[4] R. FORTET, *Eléments de la théorie des probabilités*, CNRS, 1965.

[5] N. R. GOODMAN, "Statistical analysis based on certain multivariate complex normal distributions", *Annals Math. Stat.*, vol. 34, pp. 152–177, 1963.

[6] J. LEROUX, C. COROYER, and D. ROSSILLE, "Illustration of the effects of sampling on higher order spectra", *Signal Processing*, vol. 36, no. 3, pp. 375–390, 1994.

[7] P. McCULLAGH, *Tensor Methods in Statistics*, Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman and Hall, 1987.

[8] B. PICINBONO, "Spherically invariant and compound stochastic processes", *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 16, no. 1, pp. 77–79, Jan. 1970.

[9] B. PICINBONO, *Random Signals and Systems*, Prentice-Hall, 1993.

[10] M. ROSENBLATT, *Stationary Processes and Random Fields*, Birkhauser, 1985.

[11] R. A. WOODING, "The multivariate distribution of complex normal variables", *Biometrika*, vol. 43, pp. 212–215, 1956.

Manuscrit reçu le 28 juillet 1993; révisé le 10 janvier 1994, et le 30 août 1994. Publié dans la revue Traitement du Signal, vol.11, no.5, pp.417–420, dec 1994.