XVIème Colloque GRETSI, 15-19 Septembre 1997, Grenoble, vol.1, pp.79–82

Autocalibration analytique d'antenne

Olivier GRELLIER[1] **et Pierre COMON**[1,2]

[1]Laboratoire I3S CNRS/UNSA,
250 av Einstein Sophia-Antipolis, F-06560 Valbonne
[2] Institut Eurecom, BP193, F-06904 Sophia-Antipolis cedex
grellier@thym.unice.fr comon@eurecom.fr

RÉSUMÉ

On présente une nouvelle méthode d'autocalibration (i.e. sans source coopérante) basée sur le fait que les vecteurs directionnels sont de module unité. Un premier algorithme est proposé, et permet d'identifier les vecteurs directionnels de manière analytique lorsque le bruit est spatialement blanc. Lorsque le bruit est coloré, on propose un autre algorithme exploitant en outre le fait que les enveloppes complexes des signaux prennent des valeurs discrètes. Ce deuxième algorithme permet, après une estimation analytique des signaux incidents et une étape d'agglomération (clustering), de remonter aux vecteurs directionnels par une résolution explicite au sens des moindres carrés. Ces algorithmes d'autocalibration sont illustrés à l'aide de la méthode de localisation MUSIC.

ABSTRACT

A new self-calibration method (i.e. without cooperating source) is presented. It is based on the fact that steering vectors have unit modulus. A first algorithm is proposed, that allows to identify steering vectors analytically, when the noise is spatially white. When the noise is colored, another algorithm is proposed, that also exploits the fact that source complex envelopes take discrete values. This second algorithm allows, after an analytical estimation of the impinging signals and a clustering step, to eventually identify the steering vectors by an explicit Least-Squares solution. These self-calibrating algorithms are illustrated with the help of the MUSIC localization method.

1 Introduction

La localisation de sources est un problème important surtout dans un contexte où les rapports signal sur bruit et signal sur interférences sont faibles et où les signaux incidents peuvent éventuellement être corrélés. La localisation est d'autant plus difficile que la forme exacte de l'antenne n'est pas connue et que les performances de la plupart des algorithmes, notamment ceux de type MUSIC, se dégradent rapidement avec la décalibration (grande sensibilité). La compensation de cet effet sans source coopérante, appelée autocalibration, est donc fondamentale dans ce type d'application [4].

L'algorithme proposé dans cet article est basée sur une nouvelle approche de l'identification des vecteurs directionnels (steering vectors) qui permet, sous certaines conditions d'identifiablité exposées dans [2], d'estimer la décalibration de l'antenne.

2 Modèle et hypothèses

2.1 Modèle

Dans un contexte bande étroite multi-sources multi-capteurs, l'équation matricielle qui régit le système peut s'écrire sous la forme :

$$X = AS + B. \tag{1}$$

où $X_{(K\times N)}$, $A_{(K\times D)}$, $S_{(D\times N)}$, $B_{(K\times N)}$ sont respectivement la matrice de sortie des capteurs, la matrice de transfert du milieu $A_{k,d} = g_{k,d}e^{j\Phi_{k,d}}$, la matrice des signaux incidents, et la matrice des bruits sur les capteurs et N, K et D sont respectivement les nombres d'échantillons, de capteurs et de signaux incidents.

2.2 Hypothèses

Dans la suite nous supposerons que :

- les capteurs ne sont pas couplés (leurs gains pourront donc être estimés par les moyens décrits dans [2]),
- les éléments de la matrice A sont tous de module $|g_{k,d}|^2 = 1$ (ceci est en liaison avec l'hypothèse précédente) et les éléments de sa première ligne sont égaux à 1,
- les bruits des capteurs sont de moyenne nulle (des hypothèses plus fortes seront posées s'il y a lieu plus tard).

3 Algorithmes

3.1 Utilisation de l'hypotèse sur A

3.1.1 Algorithme proposé

Dans le cas non bruité, la s.v.d économique de X s'écrit :

$$X = AS = U\Sigma V^* \tag{2}$$

où Σ est $_{(D\times D)}$ de rang plein.

On peut ainsi écrire A sous la forme :

$$A = UW^* \tag{3}$$

où W est une matrice $(D \times D)$.

La contrainte sur les éléments de A devient alors $u_i w_j^* w_j u_i^* = 1$ ou encore $w_j u_i^* u_i w_j^* = 1$ que l'on peut écrire sous la forme :

$$w_j P_i w_j^* = 1$$

où u_i et w_j sont respectivement la i^{ieme} ligne de U et la j^{ieme} ligne de W, $1 \leq i \leq K$, $1 \leq j \leq D$.

En appliquant l'opérateur vec à l'équation précédente et en utilisant la relation $vec(u_i^* u_i) = (u_i \otimes \overline{u_i})^t$, on peut montrer que le système d'équations précédent peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$P y_j = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} P & = & \begin{bmatrix} (u_1 \otimes \overline{u_1}) \\ \vdots \\ (u_K \otimes \overline{u_K}) \end{bmatrix} \\ \text{et } y_j & = & (w_j \otimes \overline{w_j})^t \end{array}$$

Soit H une matrice telle que :

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{1/2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En multipliant (4) par H, on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_H y_j & = & K^{1/2} \\ P_H y_j & = & 0 \end{array} \right. \text{ avec } HP \begin{pmatrix} p_H \\ P_H \end{pmatrix} \tag{5}$$

Ainsi, les y_j appartiennent au noyau de P_H. Il n'existe donc que D solutions indépendantes $y_1, \cdots, y_D$ à (5) qui forment une base du noyau de P_H. Soit $e_1, \cdots, e_D$ une base connue de $Ker(P_H)$. Si on exprime les e_i en fonction des y_j, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_1 & = & \lambda_{11} y_1 + \cdots + \lambda_{1D} y_D \\ & \vdots & \\ e_D & = & \lambda_{D1} y_1 + \cdots + \lambda_{DD} y_D \end{array} \right.$$

qui devient, en appliquant l'opérateur $unvec$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E_1 & = & \lambda_{11} w_1^* w_1 + \cdots + \lambda_{1D} w_D^* w_D \\ & \vdots & \\ E_D & = & \lambda_{D1} w_1^* w_1 + \cdots + \lambda_{DD} w_D^* w_D \end{array} \right.$$

où $E_i = unvec(e_i)$. Ce système d'équations peut être mis sous la forme matricielle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E_1 & = & W^* \Lambda_1 W \\ & \vdots & \\ E_D & = & W^* \Lambda_D W \end{array} \right.$$

qui montre que la solution W à (3) est la matrice qui diagonalise simultanément les D matrices $E_1, \cdots, E_D$. Dans le cas non bruité, cette diagonalisation est exacte et la matrice W s'obtient en diagonalisant simultanément deux des matrices E_i.

Cet algorithme s'inspire de l'algorithme CMA analytique [3] dans lequel l'auteur montre, dans un contexte tout autre que celui de la calibration, que le calcul de W se ramène à une décomposition de Schur généralisée des D matrices E_i.

3.1.2 Sensibilité de l'algorithme au bruit

Si les bruits sont parfaitement blancs, décorrélés et de même variance, alors la matrice U décrit parfaitement l'espace signal et la matrice A pourra être estimée sans erreurs.

Par contre, dans le cas où les bruits sont corrélés, la matrice U décrit l'espace signal à une rotation inconnue près. Cette rotation n'altère pas les performances de l'algorithme si le nombre de capteurs K est suffisamment grand (celui-ci permet d'augmenter artificiellement le rapport signal sur bruit). Malheureusement, dans la plupart des applications le nombre de capteurs reste faible, l'algorithme analytique sera donc très sensible aux propriétés des bruits.

4 Solution des moindres carrés en présence de bruits corrélés

Supposons maintenant que les signaux incidents sont des signaux de communication construits sur une même constellation $\mathcal{C}$ dont les P symboles sont de même module. On peut utiliser directement l'algorithme proposé dans [3] qui permet, sous l'hypothèse $|S_{ij}|^2 = 1$, d'estimer analytiquement S puis d'estimer A par pseudo-inversion de $\hat{S}$ (estimation de S).

Cependant, quand le rapport signal sur bruit est faible, cette solution peut être largement améliorée en effectuant un groupement automatique (clustering) sur chaque ligne de $\hat{S}$ avant la pseudo-inversion.

De plus, cette pseudo-inverse peut être calculée explicitement après un tri des colonnes de $\hat{S}$. En effet, chaque colonne de S est un D-uplet qui prend ses valeurs dans $\mathcal{C}^D$ où $\mathcal{C} = \{c_1, \cdots, c_P\}$, les c_i étant classés par ordre croissant de leurs angles. Appelons S_c la matrice qui contient les P^D D-uplets classés comme suit :

$$S_c = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{P^{D-1}} \otimes C \\ \mathbb{1}_{P^{D-2}} \otimes C \otimes \mathbb{1}_P \\ \vdots \\ \mathbb{1}_P \otimes C \otimes \mathbb{1}_{P^{D-2}} \\ C \otimes \mathbb{1}_{P^{D-1}} \end{pmatrix}$$

où $C = (c_1, \cdots, c_P)$ et $\mathbb{1}_n$ est une ligne de n éléments égaux à 1.

Pour chaque ligne de $\hat{S}$, l'étape de clustering permet de trouver P clusters dont on peut calculer le centre et que l'on peut classer par ordre croissant de leurs angles. On peut alors dire que le centre du cluster p est le symbole c_p à une rotation α près, la rotation α étant constante pour chaque ligne.

Après le clustering, le tri des colonnes de $\hat{S}$ nous donne la matrice $\tilde{S}$ que l'on peut écrire en fonction de S_c :

$$\tilde{S} = \alpha . S_c . \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{1,l_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbb{1}_{1,l_{P^D}} \end{pmatrix}$$

où α est la matrice diagonale qui regroupe les D rotations α_d, $\mathbb{1}_{n,m}$ est une matrice $n \times m$ remplie de 1 et l_i est la multiplicité du i^{eme} D-uplet dans $\hat{S}$.

Etant donnée la structure de S_c, on peut montrer que la matrice

$$S_c^- = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{P^{D-1}} \otimes E \\ \mathbb{1}_{P^{D-2}} \otimes E \otimes \mathbb{1}_P \\ \vdots \\ \mathbb{1}_P \otimes E \otimes \mathbb{1}_{P^{D-2}} \\ E \otimes \mathbb{1}_{P^{D-1}} \end{pmatrix}^*$$

avec $E = \left(\mathbb{1}_{1,P/2}, -\mathbb{1}_{1,P/2}\right)$, diagonalise S_c.

Ainsi l'inverse explicite de $\tilde{S}$, à une matrice diagonale près, est donnée par :

$$\tilde{S}^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{l_1}\mathbb{1}_{l_1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{l_{P^D}}\mathbb{1}_{l_{P^D},1} \end{pmatrix} S_c^{-*}$$

et on peut montrer que

$$\tilde{X} . \tilde{S}^- = P^{D-1} . CE^* . A . \alpha$$

où $\tilde{X}$ est la matrice X triée comme $\hat{S}$. Ainsi, la pseudo-inverse explicite de $\tilde{S}$ s'écrit :

$$\frac{1}{P^{D-1} . CE^*} . \tilde{S}^- . \alpha$$

On peut remarquer que l'utilisation de $\tilde{S}^-$ seule est possible puisque la contrainte sur la première ligne de A permet l'estimation du facteur multiplicatif $P^{D-1}.CE^*$ et de la matrice diagonale α. L'avantage est que cette matrice ne dépend pas de $\tilde{S}$.

5 Estimation de la décalibration

Une fois A estimée, les directions d'arrivée sont estimées en minimisant la norme L^2 de $a_d - v_\theta$ où a_d est la d^{ieme} colonne de A et v_θ est un vecteur qui parcourt la variété de l'antenne idéale. La décalibration peut ensuite être estimée à partir des directions d'arrivée en résolvant un système linéaire dont les entrées sont les phases des éléments de A et les inconnues les déplacements des capteurs.

Cependant la résolution de ce système n'a de sens que si l'erreur d'estimation sur les éléments de A est faible par rapport à la décalibration. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée l'estimation de la décalibration ne permettra pas d'améliorer les performances des algorithmes de type MUSIC.

6 Résultats

Pour tester notre algorithme, nous avons simulé une antenne linéaire comprenant K capteurs espacés régulièrement de $\delta = \lambda/3$. La décalibration a été simulée par un bruit gaussien additif affectant la position des capteurs.

6.1 Bruits parfaitement décorrélés

Les tests ont été effectués avec trois signaux incidents d'angles respectifs $-5°$, $2°$ et $7°$, une décalibration de 1% et un rapport signal sur bruit de 10dB. Le tableau 1 donne les performances de l'algorithme analytique pour différentes valeurs de K (EQMA : Erreur Quadratique Moyenne sur les éléments de A et EQMD : Erreur Quadratique Moyenne sur la Décalibration, ces deux erreurs sont normalisées). Les figures 1 et 2 montrent les performances de MUSIC [1] respectivement avant et après calibration. Les simulations ont été effectuées avec $N = 4000$ échantillons.

K	7	9	10
E.Q.M.A	2.10^{-14}	5.10^{-18}	3.10^{-18}
E.Q.M.D	7.10^{-11}	3.10^{-14}	2.10^{-14}
Angles	$-5, 2, 7$	$-5, 2, 7$	$-5, 2, 7$

TAB. 1 – *Performances de l'algorithme analytique*

6.2 Bruits corrélés

Pour tester l'algorithme, nous avons utilisé trois signaux 4-PSK d'angles d'incidence respectifs: $-5°$, $2°$ et $7°$, une antenne de 10 capteurs, un bruit de décalibration d'un écart type de 2% et un RSB de 15dB. Le tableau 2 donne les résultats de la solution aux moindres carrés et de la solution explicite. La figure 3 donne un exemple de constellation formée par une ligne $\hat{S}$. Le nombre d'échantillons utilisé ici est $N = 3000$.

7 Conclusion

Dans le cas de bruits spatialement blancs, l'algorithme donne des résultats excellents et permet de calibrer l'antenne et d'améliorer considérablement les performances

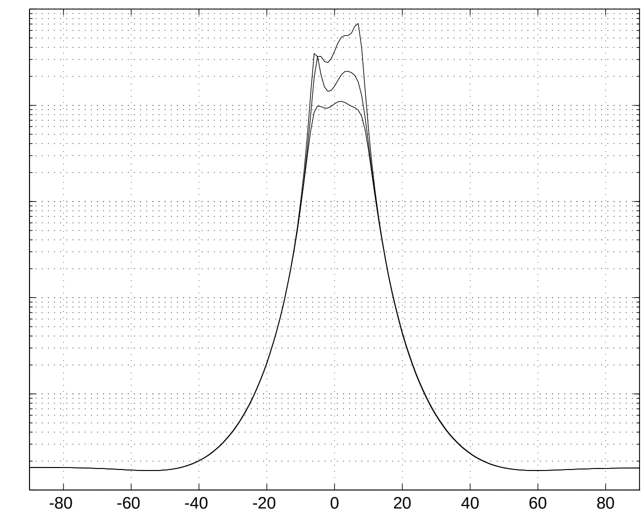

FIG. 1 – *MUSIC à l'ordre 2 sans calibration*

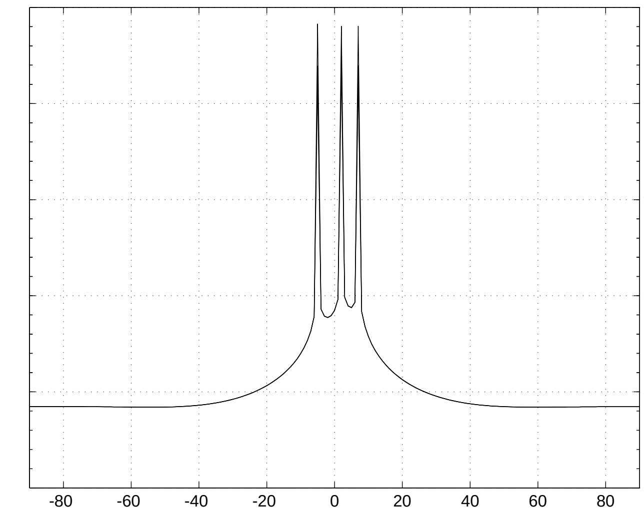

FIG. 2 – *MUSIC à l'ordre 2 après calibration*

d'un algorithme de type MUSIC. Dans le cas de bruits spatialement corrélés, l'algorithme analytique n'est plus utilisable. Une solution aux moindres carrés est cependant disponible quand les signaux incidents prennent des valeurs discrètes de module constant. Celle-ci permet de déterminer les directions d'arrivée et la décalibration de l'antenne. Ces résultats pourront être utilisés pour estimer la matrice de covariance du bruit et améliorer les performances d'un algorithme de type MUSIC.

Références

[1] G. BIENVENU, L. KOPP, "Optimality of high-resolution array processing using the eigensystem approach", *IEEE Trans. ASSP*, vol. 31, no. 5, pp. 1235–1248, Oct. 1983.

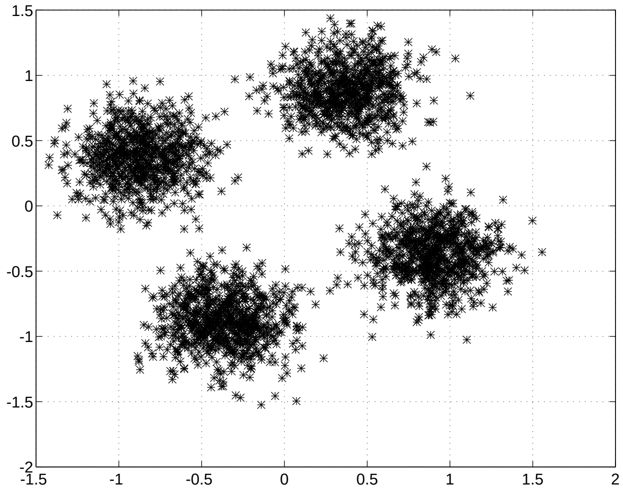

FIG. 3 – *Constellation type d'une ligne de* $\hat{S}$

	Solution LS	$\tilde{S}^{-}$
E.Q.M.A	1.10^{-4}	2.10^{-4}
E.Q.M.D	10^{-4}	10^{-4}
Angles	$-5, 2, 7$	$-5, 2, 7$

TAB. 2 – *Performances de l'algorithme moindres carrés*

[2] P. COMON, L. DERUAZ, "Array self calibration: Identifiability issues", in *EUSIPCO 96*, Trieste, Italy, September 10-13 1996, pp. 547–550.

[3] A. J. van der VEEN, A. PAULRAJ, "An analytical constant modulus algorithm", *IEEE Trans. SP*, vol. 44, no. 5, pp. 1136–1155, May 1996.

[4] G. VEZZOSI, "Estimation of phase angles from the cross-spectral matrix", *IEEE Trans. ASSP*, vol. 34, no. 3, pp. 405–422, June 1986.