XVIIème Colloque GRETSI, 13-17 Septembre 1999, Vannes, vol.4, pp.1093-1096

Egalisation en présence de sources discrètes

Olivier Grellier, Pierre Comon

Laboratoire I3S UNSA/CNRS
2000 Route des Lucioles, BP 121, 06903 Sophia-Antipolis Cedex, France
grellier@i3s.unice.fr, comon@i3s.unice.fr

Résumé – Ces dernières années, l'égalisation aveugle de canaux de communication a suscité un grand intérêt, entre autres parce qu'elle permet d'accroître le débit. De nombreux algorithmes itératifs ont été proposés mais bon nombre d'entre eux souffrent de minima locaux. L'approche semi-aveugle, où une partie du signal émis est connue, semble très prometteuse et les problemes de convergence sont moins aigus. Dans cette article, nous proposons une méthode analytique de calcul de l'égaliseur dans les contextes aveugles et semi-aveugles, basée sur le caractère discret de la distribution des sources. Les performances de cette méthode se comparent favorablement à celles des égaliseurs par Forçage à Zéro et au sens des Moindres Carrés.

Abstract – During the last decade, blind equalization of communication channels has received a great attention, partly because of its ability to allow increased throughputs. Numerous iterative algorithms have been proposed, but most of them suffer from spurious minima. The semi-blind approach, where part of the signal is known, seems more promising and convergence problems are less crucial. In this paper, we propose an analytical method for calculating the equalizer in both blind or semi-blind contexts, based on the discrete character of the source distribution. The performances of this method compare favorably with those of the Zero-Forcing and Least Squares Equalizers.

1 Introduction

L'égalisation autodidacte (ou aveugle) d'un canal de communication est un problème crucial pour l'augmentation des débits en technologie mobile. Ces dernières années, il a suscité un intérèt croissant et de nombreux algorithmes itératifs ont été proposés. Malheureusement, les critères utilisés possèdent généralement de nombreux minima locaux qui induisent souvent des problèmes de convergence. Il devient donc nécessaire d'éliminer ces minima ou de trouver des initialisations correctes.

L'approche dite semi-autodidacte, où une partie du signal à reconstituer est connue, semble être une voie prometteuse. En effet, la séquence connue, placée le plus souvent en début de trame et généralement désignée par séquence d'apprentissage, simplifie la synchronisation, supprime les indéterminations inhérentes au contexte autodidacte et doit permettre un gain de performance par rapport aux algorithmes aveugles.

Ces derniers utilisent classiquement les propriétés de module constant des sources [3] [14], la maximisation du kurtosis [2] [11] ou encore la cyclostationnarité induite des sources numériques [1][8] [12].

L'approche présentée dans cet article utilise le caractère discret du support des signaux utilisés en communication numérique. Cette propriété a déjà fait l'objet de nombreuses études et plusieurs algorithmes récursifs ont été mis en œuvre [7][13][10][9][5]. Cependant, notre intérêt s'est porté sur la recherche de solutions **analytiques** pour les signaux de type PSK dans les contextes autodidacte et semi-autodidacte.

L'article est organisé de la manière suivante. Tout d'abord nous présentons une approximation polynômiale du critère d'erreur quadratique moyenne minimale (EQMM). Ensuite nous montrons comment utiliser ce critère pour obtenir analytiquement l'égaliseur linéaire. Des résultats sur le comportement asymptotique sont ensuite rapidement donnés. Le cas semi-aveugle est alors étudié et une solution analytique sous-optimale déduite du cas aveugle est proposée. Enfin, les performances des différents algorithmes sont présentées au travers de simulations. Ces performances sont comparées aux résultats des égaliseus de Wiener et de forçage à zéro.

2 Egalisation Aveugle

2.1 Présentation du problème

Supposons que l'on observe la sortie $y(n)$ d'un canal $h(\ell)$ attaqué par une source discrète $x(n)$ en présence de bruit additif gaussien $w(n)$. En supposant que le canal est linéaire et stationnaire, le modèle du système de communication s'écrit :

$$y(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h(p)\, x(n-p) + w(n) \tag{1}$$

où $x(n)$ et $w(n)$ sont supposés statistiquement indépendants.

L'objectif de l'égalisation linéaire aveugle est de calculer un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF), $f(\ell)$, qui, appliqué à l'observation $y(n)$, donne une séquence $\hat{x}(n)$ ressemblant dans un certain sens au signal d'entrée $x(n)$:

$$\hat{x}(n) = \sum_{p=0}^{L-1} f(p)\, y(n-p) \tag{2}$$

où la longueur L de l'égaliseur doit être estimée.

2.2 Notations

Les vecteurs colonne sont représentés par des lettres minuscules en gras et les tenseurs par des lettres majuscules. Les éléments d'un filre RIF $f(.)$ de longueur L seront contenus dans un vecteur colonne de taille L, $\mathbf{f}^T = [f(0) \cdots f(L-1)]$. Une partie finie de taille L d'une série temporelle $y(.)$ sera représentée par un vecteur colonne de taille L et notée :

$$\mathbf{y}(n;L)^T = [y(n)\, y(n-1)\, \cdots\, y(n-L+1)]$$

Grâce à ces notations, le modèle (2) peut être écrit de manière compacte : $\hat{x} = \mathbf{f}^T \mathbf{y}(n;L)$.

De plus, étant donné un vecteur complexe $\mathbf{g}$ de taille L, définissons $\mathbf{g}^{\oslash D}$ le vecteur colonne contenant tous les monômes d'ordre D construits sur les éléments de $\mathbf{g}$ et ordonnés d'une manière fixée à l'avance. Les monômes sont alors pondérés afin que le tenseur de rang 1, $G = \mathbf{g} \circ \cdots \circ \mathbf{g}$ (D fois) et $\mathbf{g}^{\oslash D}$ aient la même norme de Frobenius. Par exemple, si $L = 3$ et $D = 2$ alors $\mathbf{g}^{\oslash 2} = \left[g_1^2, \sqrt{2}g_1g_2, \sqrt{2}g_1g_3, g_2^2, \sqrt{2}g_2g_3, g_3^2\right]^T$. Enfin, définissons les opérateurs $\mathbf{vecs_D}\{.\}$ et $\mathbf{unvecs_D}\{.\}$ par :

$$\begin{aligned} \mathbf{vecs_d}\{\mathbf{g} \circ \cdots \circ \mathbf{g}\} &= \mathbf{g}^{\oslash d} \\ \mathbf{unvecs_d}\{\mathbf{g}^{\oslash d}\} &= \mathbf{g} \circ \cdots \circ \mathbf{g} \end{aligned}$$

2.3 Approximation du critère EQMM

Le critère EQMM semble assez intuitif pour des signaux à support discret puisqu'il cherche alors à minimiser, en moyenne, la distance entre la sortie de l'égaliseur et la constellation du signal à reconstituer. Autrement dit, l'égaliseur $\mathbf{f}$ est alors donné par :

$$\mathbf{f} = \text{Arg} \min_{x,\mathbf{u}} E \left| x(n) - \mathbf{u}^T \mathbf{y}(n;L) \right|^2 \tag{3}$$

Ce critère est non-linéaire; il est donc difficile à utiliser sans une bonne initialisation. Néanmoins, dans un contexte bruit faible et en utilisant les résultats de [5], on peut montrer que pour des signaux PSK, si on observe N échantillons consécutifs de la séquence $y(.)$, (3) peut être approximée par :

$$\mathbf{f} = \text{Arg} \min_{\mathbf{u}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| \left(\mathbf{u}^T \mathbf{y}(n;L)\right)^D - 1 \right|^2 \tag{4}$$

où D est le nombre d'états de la modulation PSK utilisée.

Ainsi, pour des signaux QPSK, le critère devient

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| \left(\mathbf{u}^T \mathbf{y}(n;L)\right)^4 - 1 \right|^2$$

et pour des sources MSK on obtient [4]

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| \left(\mathbf{u}^T \mathbf{y}(n;L)\right)^2 - (-1)^n \right|^2$$

2.4 Utilisation du critère polynômial

L'equation (4) montre que $\mathbf{f}$ est la solution, au sens des moindres carrés, du système polynômial suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \left(\mathbf{f}^T \mathbf{y}(L;L)\right)^D &=& 1 \\ & \vdots & \\ \left(\mathbf{f}^T \mathbf{y}(N;L)\right)^D &=& 1 \end{array} \right.$$

Si on applique l'opérateur $\mathbf{vecs_D}\{.\}$ à ce système, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(L;L)^{\oslash d T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}(N;L)^{\oslash d T} \end{bmatrix} \mathbf{f}^{\oslash D} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Nous sommes ainsi parvenu à séparer les termes de $y(.)$ et ceux de $\mathbf{f}$. Le système n'est qu'en apparence linéarisé puisque la solution $\mathbf{f}^{\oslash D}$ doit posséder une structure particulière.

Cependant, nous allons maintenant voir si l'inversion du système (5) donne une solution qui convient. Nous désignerons cette solution par $\mathbf{f}^{\oslash D}_{LS}$.

2.5 Etude de l'inversion du système

L'inversion du système (5) a déjà été étudié par les auteurs dans [6]. Nous allons donc simplement rappeler les principaux résultats.

Tout d'abord, le système (5) est toujours inversible en présence de bruit ou si le canal est MA ou ARMA. Il n'est plus inversible si le canal est AR et non bruité et si l'égaliseur est plus long que l'ordre du filtre AR. Néanmoins, dans ce dernier cas, les L premiers coefficients de $\mathbf{f}^{\oslash D}_{LS}$ restent correctement estimés et l'égaliseur peut être calculé par cette méthode.

Ensuite, la structure de la solution $\mathbf{f}^{\oslash D}_{LS}$ n'est en générale pas correcte. Et nous avons dû trouver des moyens de forcer la structure la solution.

2.6 Comment forcer la structure?

Supposons que la solution $\mathbf{f}^{\oslash D}_{LS}$ soit la vectorisation symétrique d'un tenseur, $F = \mathbf{unvecs_D}\{\mathbf{f}^{\oslash D}_{LS}\}$. Si la solution possède la bonne structure, F est alors un tenseur de rang unité. Notre première approche a donc été de calculer l'égaliseur $\mathbf{f}$ en cherchant la meilleure approximation de rang 1 du tenseur F. Malheureusement, cette méthode n'est pas satisfaisante et conduit en général à des performances médiocres car la structure de $\mathbf{f}^{\oslash D}_{LS}$ peut varier fortement avec le bruit et le canal.

La solution que nous avons retenu est donc d'utiliser les L premiers coefficients de $\mathbf{f}^{\oslash D}_{LS}$. Celle-ci est ensuite affinée grâce à l' algorithme récursif **AMiSRoF** [5] dédié aux critères polynômiaux.

3 Egalisation semi-aveugle

Dans le contexte semi-autodidacte, la séquence d'apprentissage apporte des contraintes linéaires sur l'égaliseur cherché :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(L;L) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(N_c+L-1;L) \end{bmatrix} \mathbf{f} = \mathbf{x}_c \qquad (6)$$

où $\mathbf{x}_c$ représente la séquence d'apprentissage et N_c sa longueur.

Il s'agit donc maintenant d'inclure ces nouvelles contraintes dans l'algorithme aveugle afin d'en améliorer les performances. Notre approche est de minimiser la somme pondérée du critère autodidacte et des contraintes linéaires. Le nouveau critère s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = \; & \min_{\mathbf{u}} \alpha \sum_{n=1}^{N_1} \left| d(n) - \mathbf{u}^T \mathbf{y}(n;L) \right|^2 \\ & + (1-\alpha) \sum_{n=N_1+1}^{N} \left| (\mathbf{u}^T \mathbf{y}(n;L))^D - 1 \right|^2 \end{aligned}$$

où la pondération $\alpha \in [0,1]$ reste à estimer.

Ce critère hybride doit ainsi être minimisé conjointement par rapport à $\mathbf{f}$ et α. En fait, il est équivalent à la résolution au sens des moindres carrés pondérés du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(L;L) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(N_c+L-1;L) \end{bmatrix} \mathbf{f} & = & \begin{bmatrix} x_c(1) \\ \vdots \\ x_c(N_c) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{y}(N_c+L;L)^{\oslash D^T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}(N;L)^{\oslash D^T} \end{bmatrix} \mathbf{f}^{\oslash D} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \qquad (7)$$

Cependant, cette tâche est assez délicate et nous allons présenter ici une méthode sous-optimale qui donne des résultats satisfaisants.

En effet, les deux sous-systèmes, contraintes linéaires et critère aveugle, peuvent être résolus indépendamment mais les deux inconnues $\mathbf{f}$ et $\mathbf{f}^{\oslash D}$ sont liées. Notre idée est donc de résoudre indépendamment le critère aveugle et les contraintes linéaires puis de combiner les solutions de manière à minimiser le critère EQMM. En effet, l'algorithme aveugle et les contraintes linéaires nous fournissent deux estimations de $\mathbf{f}$ que nous noterons respectivement $\mathbf{f}_A$ et $\mathbf{f}_C$. Si maintenant nous cherchons un égaliseur de la forme :

$$\mathbf{f} = \alpha \mathbf{f}_C + (1-\alpha) \mathbf{f}_A$$

Il devient aisé de minimiser un critère du type :

$$E \left| \mathbf{d} \left[\mathbf{f}^T \mathbf{y}(n;L) \right] - \mathbf{f}^T \mathbf{y}(n;L) \right|^2$$

où $\mathbf{d}[z]$ représente l'élément de la constellation le plus proche de z. Cette minimisation s'effectue alors sur l'unique variable α.

4 Performances des algorithmes proposés

Afin d'étudier le comportement de nos algorithmes et de pouvoir les comparer aux solutions Moindres Carrés (MC) et Forçage à Zéro (FZ), nous avons utilisé un canal AR4 dont les pôles sont : $z1 = 0.5 * exp(i\pi/4)$, $z2 = 0.4 * exp(-i\pi/2)$, $z3 = -0.7 * exp(i\pi/3)$ et $z4 = -0.9 * exp(-i\pi/7)$. L'égaliseur au sens des moindres carrés est simplement calculé à partir de l'observation y de l'entrée x que l'on suppose connue. Il représente donc ce que l'on peut faire de mieux pour l'estimation de l'égaliseur.

Les performances ont été calculées en moyennant les résultats de 1250 expériences utilisant des trames de 200 symbôles de signaux MSK tirés au hasard.

La figure 1 montre les performances, en terme de Taux Erreur Bit (TEB), en fonction du Rapport Signal sur Bruit (RSB) des algorithmes MC, FZ, autodidacte et semi-autodidacte. La figure 2, quant à elle, présente les performances de l'égaliseur semi-aveugleà RSB fixé (12dB) en fonction de la longueur de la séquence d'apprentissage.

Sur chaque figure, les algorithmes FZ et MC sont représentés en trait plein. L'algorithme autodidcate est en ligne semi-interrompue et le semi-autodidacte en ligne de tirets. La courbe correspondant à l'algorithme MC est la plus basse.

Les performances des algorithmes proposés semblent satisfaisantes. Elles sont meilleures que celles de l'approche FZ, qui est la simple inversion du canal, mais restent éloignées des performances MC. Néanmoins, notre approche semi-autodidacte, bien que sous-optimale, donne déjà des résultats très encourageants.

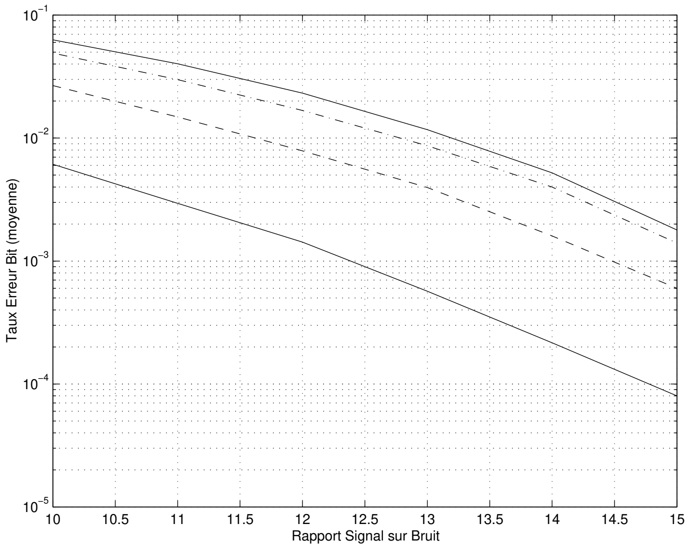

FIG. 1: *Taux d'erreur Bit en fonction du RSB*

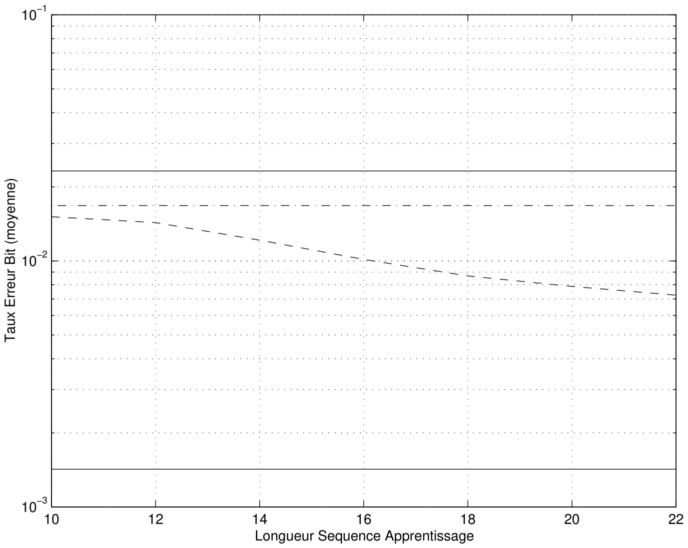

FIG. 2: *Taux d'erreur Bit en fonction de la longueur de la séquence d'apprentissage*

5 Conclusions

Dans cet article, des solutions analytiques dédiées à l'égalisation aveugle et semi-aveugle de source PSK ont été proposées. L'étude asymptotique semble dévoiler quelques faiblesses pour l'algorithme autodidacte mais nous a permis de trouver un moyen robuste d'estimer l'égaliseur.

Les performances de nos algorithmes se comparent favorablement à celles des égaliseurs ZF et MC. Et notre approche semi-autodidacte donne déjà des résultats satisfaisants. Nous travaillons actuellement sur une méthode directe d'estimation conjointe de l'égaliseur et de la pondération α.

Références

[1] A. CHEVREUIL, E. SERPEDIN, P. LOUBATON, G. GIANNAKIS, "Performance analysis of blind channel estimators based on non-redundant periodic modulation precoders", in *ICASSP*, Seattle, May 12-15 1998, vol. 6, pp. 3397–3400.

[2] D. DONOHO, "On minimum entropy deconvolution", in *Applied time-series analysis II*, pp. 565–609. Academic Press, 1981.

[3] I. FIJALKOW, A. TOUZNI, J. R. TREICHLER, "Fractionally spaced equalization using CMA: Robustness to channel noise and lack of disparity", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 45, no. 1, pp. 56–66, Jan. 1997.

[4] O. GRELLIER, P. COMON, "Blind separation and equalization of a channel with MSK inputs", in *SPIE Conference*, San Diego, July 19-24 1998, pp. 26–34, Invited session.

[5] O. GRELLIER, P. COMON, "Blind separation of discrete sources", *Signal Processing Letters*, vol. 5, no. 8, pp. 212–214, Aug. 1998.

[6] O. GRELLIER, P. COMON, "Closed-form equalization", in *SPAWC*, Annapolis, Maryland, May 9-12 1999, pp. 219–222.

[7] TA-HSIN LI, "Blind deconvolution of linear systems with multilevel nonstationnary inputs", *Annals of Stat.*, vol. 23, no. 2, pp. 690–704, 1995.

[8] B. C. NG, D. GESBERT, A. PAULRAJ, "A semi-blind approach to structured channel equalization", in *Proc. ICASSP*, Seattle, May 12-15 1998.

[9] A. SCAGLIONE, S. BARBAROSSA, "Blind equalization using cost function matched to the signal constellation", in *Asilomar*, 1997.

[10] A. PAULRAJ, S. TALWAR, M. VIBERG, "Blind separation of synchronous co-channel digital signals using an antenna array-part i: algorithms", *Trans. on Sig. Proc.*, vol. 44, no. 5, pp. 1184–1197, May 1996.

[11] O. SHALVI, E. WEINSTEIN, "New criteria for blind deconvolution of nonminimum phase systems", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 36, no. 2, pp. 312–321, Mar. 1990.

[12] D. T. M. SLOCK, "Blind fractionally-spaced equalization, perfect-reconstruction filter banks and multichannel linear prediction", in *Proc. ICASSP 94 Conf.*, Adelaide, Australia, April 1994.

[13] K. MBAREK, TA-HSIN LI, "A blind equalizer for nonstationnary discrete valued signals", *Trans. on Sig. Proc.*, vol. 45, no. 1, pp. 247–254, Jan 1997.

[14] A. J. van der VEEN, "Analytical method for blind binary signal separation", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 45, no. 4, pp. 1078–1082, Apr. 1997.

Ce travail a été en partie financé par le projet No.TL97104 dans le cadre du programme Télécom du CNRS.