

弾性ロータ・磁気軸受系の  $\mu$  シンセシス\*伊藤 貴之\*<sup>1</sup>, 野波 健蔵\*<sup>2</sup> $\mu$  Synthesis of Flexible Rotor-Magnetic Bearing System

Takayuki ITO and Kenzo NONAMI

The  $H^\infty$  control theory, which is the most powerful method for robust control theory to date, is applied to the flexible rotor-magnetic bearing system. However, the  $H^\infty$  control system has some disadvantages in that it is a conservative system and can not be used to treat with robust performances. This is due to its maximum singular value. Doyle proposed a structured singular value instead of maximum singular value. This is called the  $\mu$  synthesis theory which treats robust performances using D-K iteration. This paper concerned with the  $\mu$  control of a flexible rotor-magnetic bearing system (FR-MBS). Plant dynamics, consisting of actuator dynamics and flexible rotor dynamics, are described. The  $\mu$  controller for the reduced-order model is designed by D-K iteration, and its robust performances are evaluated with several experiments. The relationships between  $\mu$  control,  $H^\infty$  control and their robust performances are discussed for the flexible rotor-magnetic bearing system.

**Key Words:** Magnetic Bearing System,  $\mu$  Control, Robust Performance, Flexible Rotor, D-K Iteration, Structured Singular Value, Experiment

## 1. 緒 論

磁気軸受とは、ロータを電磁力によって完全非接触で支持するものである。このため、(1)摩擦磨耗の心配がない、(2)振動騒音が小さい、(3)特殊雰囲気中での使用、(4)超高速回転、などの優れた長所がいろいろ明らかにされ、技術的な壁を一気に打破することが期待されている「夢の軸受」である<sup>(1)</sup>。近年、磁気軸受の研究が極めて活発となっている中、ロバスト制御の必要性が高まっている。磁気軸受系は、本来不安定な系であることから、フィードバック制御による安定化が不可欠である。ところが適切なフィードバック制御系を設計するためには実在する磁気軸受に対して、その数学モデルを導き出す必要がある。ところが、これらの数学モデルを導出する際には、必ずなんらかの不確かさが存在してしまう。ロバスト制御とは、このような不確かさに対し、系統的に制御系設計を行うというものである。

現在、ロバスト制御として最も有力な手法である  $H^\infty$  制御の適用が試みられている。 $H^\infty$  制御は周波数領

域における最適制御理論であり、ループ整形理論としては現存する制御理論の中で最も強力かつ体系的である。もちろん古典制御とは比べようもないほど数学的に厳密でありかつ系統的な設計理論として確立されている。ところが  $H^\infty$  制御理論は、実システムに適用すると制御性能が保守的となったり、パラメータ変動があると途端に制御性能が下がるといった問題が指摘されている。これは不確かさを構造化しないで最大特異値で取扱うことにより、誤差を過剰に見積もってしまうためと考えられている。これに対し Doyle らは不確かさをブロック構造化して捉え、最大特異値と同時に新たに構造化特異値  $\mu$  というものを導入して、上記の  $H^\infty$  制御理論の弱点を、ロバスト安定、ノミナル性能以外にロバスト性能を評価することによって回避できることを示した<sup>(2)</sup>。これらは、 $\mu$  シンセシス理論と呼ばれ、最も包括的なロバスト制御理論と考えられているが、理論的にはまだ発展途上で、一般的な解法および設計法が確立されていない。このため、D-K iteration に基づく  $\mu$  解析設計法が有効であることが知られている。

本論文では、弾性ロータ・磁気軸受系に対して、 $\mu$  シンセシス理論を適用して実験を行い、 $\mu$  シンセシス理論の有効性を検証することにある。具体的に実験にお

\* 原稿受付 平成6年5月23日。

<sup>1</sup> 千葉大学大学院。<sup>2</sup> 正員、千葉大学工学部 (〒263 千葉市稲毛区弥生町1-33)。

いては浮上時の制御特性およびパラメータ変動に対するロバスト性能などについて検討する。

2. 弾性ロータ・磁気軸受系のモデリング

2章では、弾性ロータ・磁気軸受系のモデリングを記述する<sup>(3)</sup>。ここでは簡単のためx方向のみを扱う。

2.1 弾性ロータの力学モデル 図8に示す実験装置に対してフリーロータとしてモデリングを行う。ロータの形状は大変複雑であるが、図1のように、軸の直径を一様とし全スパン長を六分割して各質点に集中質量を付加していると考え、このときの諸元を表1に示す。これに有限要素法を適用し、次式を得る。

$$M_0 \ddot{q} + K_0 q = 0 \dots\dots\dots(1)$$

ここで

$$q = [x_1 \ \theta_1 \ x_2 \ \theta_2 \ x_3 \ \theta_3 \ x_4 \ \theta_4 \ x_5 \ \theta_5 \ x_6 \ \theta_6 \ x_7 \ \theta_7]^T$$

$x_i, \theta_i (i=1, \dots, 7)$ は、それぞれのロータの質量の変位と角度を表す。特に  $x_3$  と  $x_5$  は図1で示すように電磁石の設置場所を示す。

2.2 磁気軸受の力学モデル 制御吸引力の式は次式で与えられる。

$$P = p_0 - k_1 x + k_2 i = p_0 + p \dots\dots\dots(2)$$

ここで、

$$k_1 = \frac{2SN^2 i_0^2}{\mu_0^2 \left(\frac{1}{\mu} + \frac{x_0}{\mu_0}\right)^3} = \frac{2p_0}{\mu_0 \left(\frac{1}{\mu} + \frac{x_0}{\mu_0}\right)}$$

$$k_2 = \frac{2SN^2 i_0^2}{\mu_0 \left(\frac{1}{\mu} + \frac{x_0}{\mu_0}\right)^2} = \frac{2p_0}{i_0}$$

$$p_0 = \frac{SN^2 i_0^2}{\mu_0 \left(\frac{1}{\mu} + \frac{x_0}{\mu_0}\right)^2}$$

なお  $P$  : 吸引力,  $\mu_0$  : 透磁率,  $S$  : 磁極の対向面積,  $B$  : 磁束密度,  $N$  : コイル巻き数,  $i_0$  : 定常電流,  $x_0$  : 定常ギャップ長,  $i$  : 制御電流,  $\mu$  : 磁石自体の透磁率,  $p_0$  はバイアス吸引力である。したがって、総合吸引力  $P'$  は次式となる。

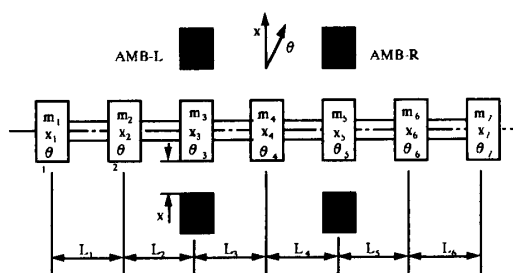


図1 弾性ロータのモデル

$$P' = P_1 - P_2 = -2k_1 x + 2k_2 i \dots\dots\dots(3)$$

ここで  $P_1$  と  $P_2$  は、それぞれ左右の吸引力である。式(3)よりアクチュエータ吸引力が、変位と電流に対して線形化されていることがわかる。

2.3 状態空間モデル 弾性ロータは、電磁石の吸引力によって拘束されているので力学モデル式(1)と吸引力式(3)より次式を得る。

$$M_0 \ddot{q} + K_0 q = Fp' + D \dots\dots\dots(4)$$

ここで、

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$P' = \begin{bmatrix} P'_i \\ P'_r \end{bmatrix}^T$$

$$P'_i = 2k_1 x_3 - 2k_2 i_i : \text{AMB-L の吸引力}$$

$$P'_r = 2k_1 x_5 - 2k_2 i_r : \text{AMB-R の吸引力}$$

$D$  は外乱を表す。

式(4)のバイアス吸引力と制御吸引力を分けて整理すると次のようになる。

$$M_0 \ddot{q} + Kq = F_i i + D \dots\dots\dots(5)$$

ここで、

$$i = [i_i \ i_r]^T, \quad K = K_0 + K_i$$

$$K_i = \text{diag}(0, 0, 0, 0, -2k, 0, 0, 0, -2k, 0, 0, 0, 0)$$

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

モード行列  $\Psi$  を用いて、次式を定義する。

$$q = \Psi \xi$$

式(5)をモード座標式により次式のように変形する。

$$\ddot{\xi} + \Lambda \dot{\xi} + \Omega^2 \xi = f i + d \dots\dots\dots(6)$$

ここで

$$I = \Psi^T M \Psi, \quad \Omega^2 = \Psi^T K \Psi, \quad \Lambda = 2\zeta \Omega$$

$$f = \Psi^T F, \quad d = \Psi^T D$$

$\Lambda$  は減衰行列である。減衰比は実験的に決定する。以

表1 数値計算の諸元

Parameter	Value	Parameter	Value			
Mass	$m_1$	0.03 kg	Diameter	$d$	0.0275 m	
	$m_2$	0.15 kg		Gap	$x_0$	0.0003 m
	$m_3$	1.0 kg	Bias current		$i_0$	3.0 A
	$m_4$	0.5 kg		Bias attractive force	$p_0$	100.0 N
	$m_5$	1.0 kg	Damping ratio		$(i=1, \dots, 14) \zeta_i$	0.001
	$m_6$	0.0 kg				
	$m_7$	0.09 kg	Length	$L_1$	0.09 m	
Length	$L_2$	0.072 m		Permeability in magnetic body $\mu$	$2\pi \times 10^3$	
	$L_3$	0.09 m				
	$L_4$	0.09 m				
	$L_5$	0.091 m		Permeability in magnetic air $\mu_0$	$4\pi \times 10^7$	
	$L_6$	0.091 m				

上から、弾性ロータ・磁気軸受系の状態方程式は、次式で与えられる。

$$\dot{x}_f = A_f x_f + B_f u_f + D_f \dots\dots\dots (7)$$

ここで、

$$x_f = [\xi \quad \dot{\xi}]^T, \quad u = [i_l \quad i_r]^T$$

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & -\Lambda \end{bmatrix} \quad B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ f_i \end{bmatrix} \quad D_f = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$$

磁気軸受系のロータの変位のみを測定できるとすると、出力方程式は次式となる。

$$y = C_f x_f \dots\dots\dots (8)$$

ここで

$$C_f = [F_f^T \quad \Psi \quad 0]$$

**2.4 低次元化モデル**

本研究においては、弾性モードを切り捨て、剛性二次モードまでを考慮して、低次元化をした。低次元化モデルの状態方程式を次式に示す。このとき  $A_r$  の次数は四次である。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r u_r + D_r \\ y &= C_r x_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし、閉ループ系は、無視された高次モードによるスピルオーバー不安定を起こさず、ロバスト安定性を維持するものとする。

**3.  $\mu$  シンセシス理論**

$\mu$  シンセシス理論はブロック線図(図2)より不確かさを陽に含んだ枠組となっている。 $\mu$  シンセシス理論はこの不確かさをブロック構造化してとらえ、不確かさの非対角成分をいっさい考慮していないことが図よりわかる。このとき、 $v$  から  $e$  への伝達特性は

$$\Phi_1 = W_1 K P_0 (I + K P_0)^{-1} \dots\dots\dots (10)$$

となり

$$\|\Phi_1\|_\infty < 1$$

を満たせばロバスト安定条件となることがわかる。また  $w$  から  $z$  までの伝達特性は

$$\Phi_2 = W_2 (I + K P_0)^{-1} \dots\dots\dots (11)$$

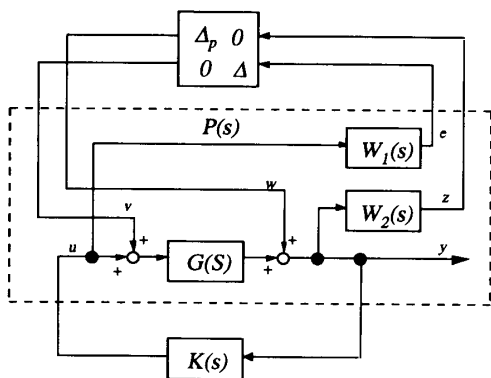


図2  $\mu$  シンセシス理論のブロック線図

となり、

$$\|\Phi_2\|_\infty < 1$$

を満たせばノミナル性能条件となっている。両者を同時に満たすように設計することはいわゆる  $H^\infty$  制御の混合感度問題である。さらに  $\mu$  シンセシス理論はこれらの二つの条件以外にロバスト性能条件として不確かさ  $\Delta$  と  $M \in C^{n \times n}$  に関して次式を満たすことを要求している。

$$\text{Sup}_{\sigma(\Delta) \leq 1} \|F_u(M, \Delta)\|_\infty \leq 1 \dots\dots\dots (12)$$

ここで  $F_u$  は、線形分数変換と呼ばれるもので次式で定義される。

$$F_u(M, \Delta) = M_{22} + M_{21} \Delta (I - M_{11} \Delta)^{-1} M_{12} \dots (13)$$

しかし、実際には式(12)の条件を求めるのではなくこれと等価な次式よりロバスト性能条件を計算しようというものである。

$$\mu_d(M) < 1 \dots\dots\dots (14)$$

このとき

$$\mu_d(M) = \frac{1}{\min \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \mathcal{A}, \det(I - M\Delta) = 0 \}} \dots\dots\dots (15)$$

で定義され、 $\mu_d(M)$  は構造化特異値と呼ばれる。この式の名分母はシステムを不安定化する摂動  $\Delta$  の中で最も小さい摂動を意味する。構造化特異値  $\mu$  はこれの逆数であるから  $\mu$  が小さいほど不安定化する摂動は大きくとれることになり閉ループ系のロバスト性能は向上する。これにより、パラメータ変動などに対して閉ループ系がロバストとなるコントローラを設計できる。 $\mu_d(M)$  には以下の関係があることが明らかにされている<sup>(4)</sup>。

$$\max \rho(QM) \leq \mu_d(M) \leq \inf \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 $D$  はスケーリングマトリクスと呼ばれる。実際の計算においては式(16)の  $\inf \bar{\sigma}(DMD^{-1})$  を求めることになる。 $\bar{\sigma}$  は最大特異値を示し、右辺は  $D$  に

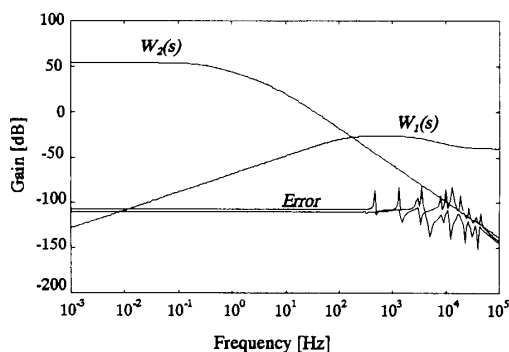


図3 周波数重み関数とモデル誤差

より得られるいくつかの最大特異値の中で最小値を求めることである。

#### 4. $\mu$ 制御系の設計

$\mu$  シンセシスの解法はまだ完全に明らかになっていない。ここでは  $\mu$  シンセシス理論の近似解法である D-K iteration の手法を用いて設計を行った。2・4 節で得られた四次の低次元化モデルを  $G(s)$  とし、図 3 に示す重み関数  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$  を用いて、図 2 のブロック線図に示すような 12 次的一般化プラント  $P_1(s)$  が得られる。このとき  $W_1(s)$  は低感度化のため低周波域で、 $W_2(s)$  はモデル誤差の大きい高周波域でゲインを高く設計した。この  $P_1(s)$  を用いて、まず  $H^\infty$  コントローラを設計をする<sup>(5)</sup>。そしてこの  $H^\infty$  コントローラに対し  $\mu$  解析を行う。この  $\mu$  plot を図 4 に示す。図 4 より  $\mu$  の最大値は約 4.6 なので、式(14)のロバスト制御性

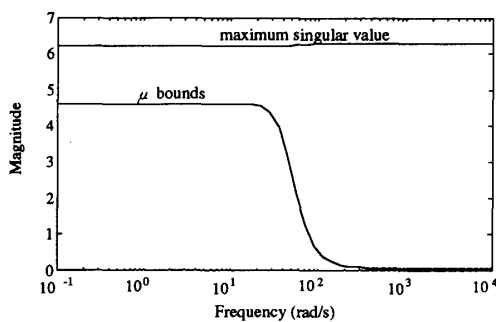


図 4  $H^\infty$  コントローラの  $\mu$  と  $\bar{\sigma}$

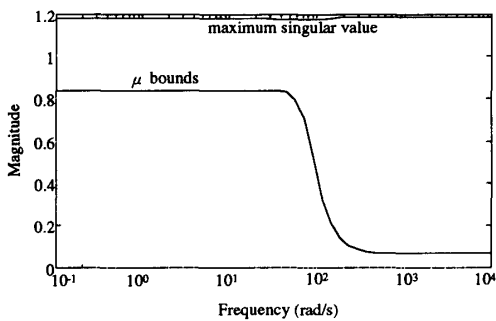


図 5  $\mu$  コントローラの  $\mu$  と  $\bar{\sigma}$

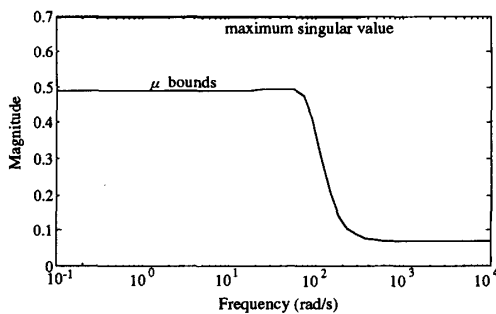


図 6  $\mu_2$  コントローラの  $\mu$  と  $\bar{\sigma}$

能の条件を満たしていない。このため、スケーリング行列  $D$  を安定な最小位相関数(零次の伝達関数)で近似し、この  $D$  行列を吸収した新たな一般化プラント  $P_2(s)$  を作成した<sup>(6)(7)</sup>。そしてこの  $P_2(s)$  を用いて、 $\mu_1$  コントローラを求める。この  $\mu$  plot を図 5 に示す。図 5 より  $\mu$  の値が約 0.82 なので式(14)を満たしている。したがってロバスト制御性能を達成している。再度 D-K iteration を行い、それを図 6 に示す。図 6 を見ると  $\mu$  の値が約 0.5 なのでこれも式(14)を満たしている。これは  $\mu_1$  コントローラの  $\mu$  の値よりもさらに小さい値であるためよりロバスト性能を達成していると考えられる。

#### 5. 実験装置および実験結果

**5・1 実験装置** 五軸制御形磁気軸受の実験装置の断面図を図 8 に示す<sup>(8)</sup>。本実験装置の詳細な諸元は、表 1 に示す。ロータは、両側のラジアル軸受と左端のスラスト軸受によって支持されている。ラジアル方向の磁気軸受は直角 2 方向で制御する構造となっていて、スラスト方向の磁気軸受は軸方向のみ制御する構造となっている。 $\mu$  制御を行う場合の制御システムのブロック線図を図 9 に示す。センサからの変位は AD

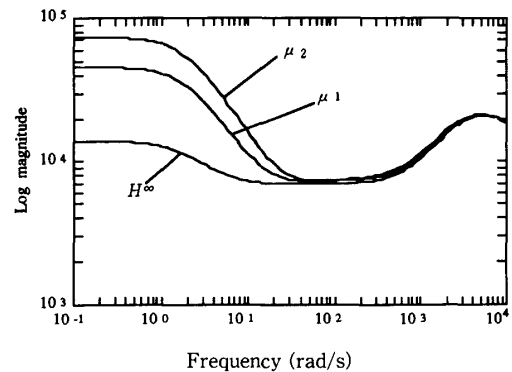


図 7  $H^\infty$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  コントローラの周波数応答

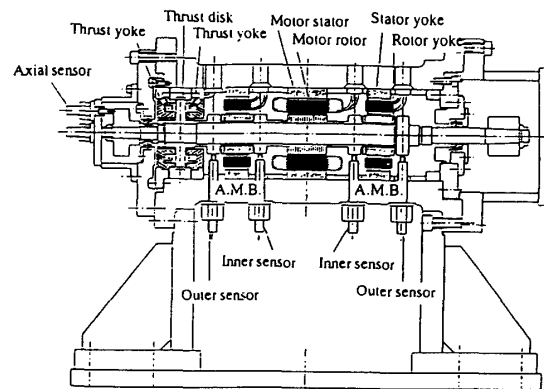


図 8 実験装置

変換器を通して、DSP(TMS 320 C 30)内部に取り込まれ、 $\mu$ 制御の演算を施しDA変換器、アンプを経て出力される。

**5・2 Y方向のみ $\mu$ 制御** 5・2節で示すすべての実験結果は図9のシステムでY方向は $\mu$ 制御、X方向はPID制御で実験を行った結果である。弾性ロータ

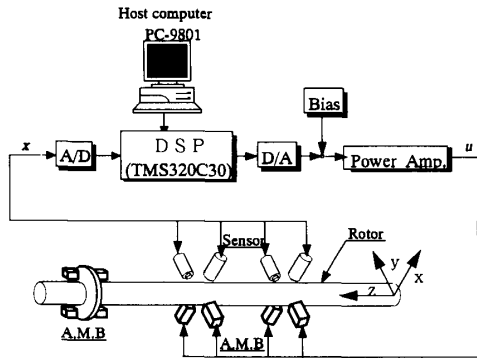
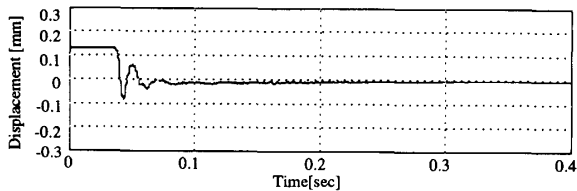
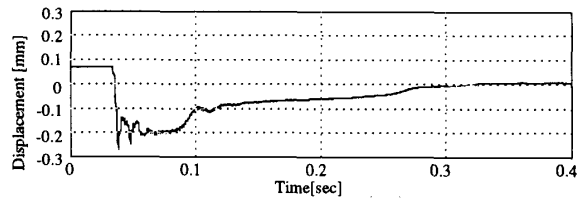


図9 制御システムのブロック線図

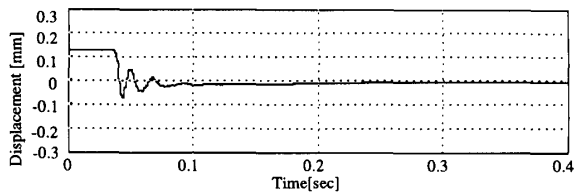
をタッチダウンベアリングから平衡位置まで浮上させたときの時刻歴応答を図10(a), 図11(a), 図12(a)に示す。三つのコントローラを比較すると、徐々に浮上時の定常偏差がなくなっていくのがわかる。これは図7に示すようにコントローラの積分特性が徐々に強くなっているからと考えられる。また $\mu_1$ と $\mu_2$ を比較すると反対側に当たっている時間が $\mu_2$ のほうが短くなっている。これもまた同じ理由によると思われる。 $\mu$ コントローラはともに一度反対側にあたっているが、すべてのコントローラが平衡位置に安定に浮上した。図10(b), 図11(b), 図12(b)は軸の重さ(公称値約5.5 kg)の約15%( $H^\infty$ ), 約40%( $\mu_1$ ), 約50%( $\mu_2$ )増加させたときの浮上時の時刻歴応答を示す。この変動率が安定浮上可能な上限であった。このことから、 $\mu$ コントローラのほうが強いロバスト性能を有していることがわかる。また $\mu_1$ と $\mu_2$ より、構造化特異値 $\mu$ をできるだけ小さく設計することにより



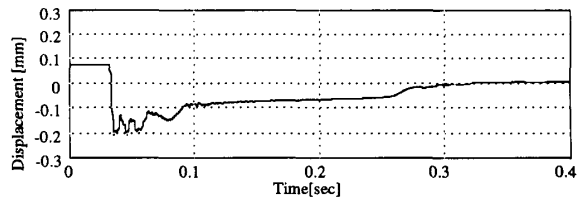
(a) 負荷しないとき(0%)



(a) 負荷しないとき(0%)



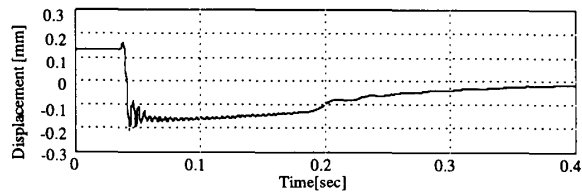
(b) 0.8 kg 負荷したとき(15%)



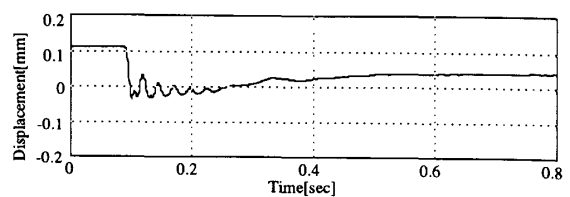
(b) 2.5 kg 負荷したとき(45%)

図10 パラメータ変動に対する浮上時の時刻歴応答 ( $H^\infty$  コントローラ)

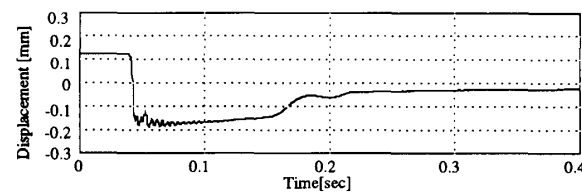
図12 パラメータ変動に対する浮上時の時刻歴応答 ( $\mu_2$  コントローラ)



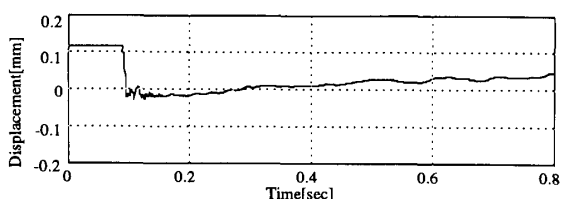
(a) 負荷しないとき(0%)



(a) 負荷しないとき(0%)



(b) 2.2 kg 負荷したとき(40%)



(b) 1.58 kg 負荷したとき(29%)

図11 パラメータ変動に対する浮上時の時刻歴応答 ( $\mu_1$  コントローラ)

図13 パラメータ変動に対する浮上時の時刻歴応答 ( $H^\infty$  コントローラ)

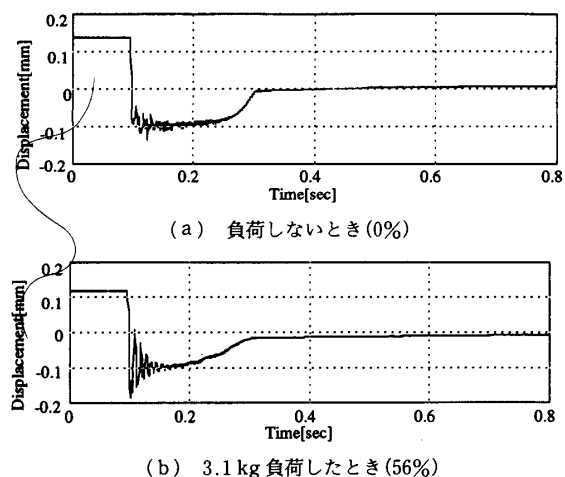


図 14 パラメータ変動に対する浮上時の時刻歴応答 ( $\mu_1$  コントローラ)

さらに優れたロバスト性能を有するコントローラが設計できることがわかる。

**5.3 X, Y 方向の $\mu$ 制御の実験結果** 5.3節の実験結果は図9のようなシステムで X, Y 方向を2台の DSP を使用して互いに独立に $\mu$ 制御を行った。図13(a), 図14(a), 図15(a)に浮上時の時刻歴応答を示す。浮上時のノミナル性能に関しては5.2節の時とほぼ同様の結果が得られた。浮上時の整定時間についてはどのコントローラも5.2節に比べ約2倍になっている。このことから本設計で得られた $\mu$ 制御系のノミナル特性はまだ PID 制御に劣るとも考えられる。パラメータ変動を与えたときの図を, 図13(b), 図14(b), 図15(b)に示す。このときの安定浮上の上限は,  $H^\infty$  に比べ,  $\mu_1$  コントローラは2倍,  $\mu_2$  コントローラは3倍になっている。さらに1方向のみデジタル制御のときと比較して2方向デジタル制御のほうが安定浮上の上限があがっている。これは5.2節の場合は, X 方向の PID 制御のほうが先にロバスト性能の限界に達して浮上ができなくなったからと考えられる。したがって,  $\mu$ 制御は非常に優れたロバスト性能を有していると考えられる。要約すれば本 $\mu$ 制御系はノミナル性能に関して PID 制御と比べるとまだ改善の余地があるが, ロバスト性能に関しては PID 制御を越える特性を有しているということになる。

## 6. 結 論

本研究は,  $\mu$ シンセシス理論を, 弾性ロータ・磁気軸受系に適用して $\mu$ コントローラを設計した。さらに $H^\infty$ 制御との比較を行い,  $\mu$ シンセシスによる制御のシミュレーションと実験によりその有効性を明らかにした。結論を要約すると以下のとおりである。

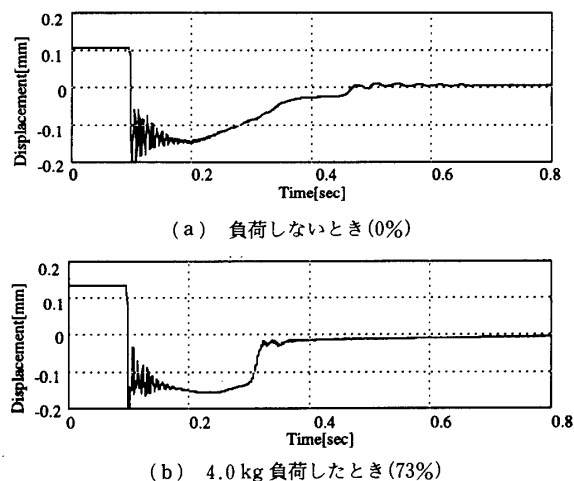


図 15 パラメータ変動に対する浮上時の時刻歴応答 ( $\mu_2$  コントローラ)

(1)  $\mu$ 制御を実際の弾性ロータ・磁気軸受系に適用して安定な浮上を実現した。

(2)  $H^\infty$ 制御と $\mu$ 制御の比較から,  $\mu$ 制御がパラメータ変動に対して優れたロバスト性能を有していることを実験により明らかにした。

(3) 構造化特異値 $\mu$ の値が異なる二つの $\mu$ コントローラに対してロバスト性能の検証実験を行った。これから $\mu$ の値がより小さい場合, パラメータ変動に対するロバスト性能がより向上することが確認された。

(4) 以上からモデル誤差が明確でない制御対象に対して,  $\mu$ 制御は $H^\infty$ 制御に比べてロバスト性能に関して極めて優れた性能を有しており, 磁気軸受系のロバスト制御として非常に有効であるといえる。

## 文 献

- (1) 松村編, 磁気浮上と磁気軸受, (1993), 219-233, コロナ社.
- (2) 野波・範,  $\mu$ シンセシス理論を用いたアクティブ振動制御系の設計と制御性能, 機論, 60-572, C(1994), 77-83.
- (3) 田・野波・久保田, 弾性ロータ・磁気軸受系の VSS オブザーバを有する離散時間スライディングモード制御, 機論, 60-569, C(1994), 94-101.
- (4) サイバネットシステム(株)編,  $\mu$ 解析・シスセシスツールボックス, ユーザーズガイド, (1992), 61-84.
- (5) 野波,  $H^\infty$ 制御理論と運動制御, 精密工学会誌, 59-9(1993), 1420.
- (6) 藤田・滑川, ロボットマニピュレータのロバスト $\mu$ 制御, 日本機械学会 [制御系設計ソフトウェア(CACSD)を用いた基礎から最先端の制御(I)] No. 940-7(1994), 115-122.
- (7) 藤田, ロバスト制御性能と $\mu$ シンセシス, システム/制御/情報, 37-2(1993), 93-101.
- (8) 金光・大沢・渡辺, 5軸制御系磁気軸受による回転軸の制振, エバラ時報, 143(1989), 1-7.