

Christian JUTTEN

Systemes asservis non lineaires

Université Joseph Fourier - Polytech' Grenoble

Cours de troisième année du département 3i
Options *Automatique*

Août 2006

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Limitations des méthodes linéaires	3
1.2	Systèmes non linéaires	4
1.3	Non-linéarités dans les systèmes asservis	4
1.4	Systèmes asservis possédant un seul élément non linéaire	6
1.5	Exemples de réduction	6
1.5.1	Exemple	6
1.5.2	Exercice	8
1.6	Méthodes d'études des systèmes asservis non linéaires	9
1.7	Notations	9
1.8	Références	10
1.9	Plan du document	10
2	Méthode du premier harmonique	11
2.1	Principe	11
2.2	Condition de validité	12
2.3	Fonction de transfert généralisée	13
2.3.1	Représentation graphique	13
2.3.2	Élément NL statique ou sans inertie	13
2.4	Calculs de gains complexes équivalents	13
2.4.1	Principe de calcul	14
2.4.2	Gain complexe équivalent de la saturation	15
2.4.3	Gain complexe équivalent d'un relais avec hystérésis	18
2.4.4	Gain complexe équivalent d'un système NL quelconque	23
2.4.5	Tableau récapitulatif de gains complexes équivalents	24
2.5	Stabilité des systèmes asservis non linéaires	26
2.5.1	Conditions nécessaires d'auto-oscillations	26
2.5.2	Stabilité des auto-oscillations	27
2.5.3	Auto-oscillations dans un asservissement à relais	29

2.5.4	Exemple : détermination mathématique des auto-oscillations	32
2.6	Auto-oscillation dissymétrique	36
2.6.1	Généralités	36
2.6.2	Exemple : cas d'un relais symétrique avec une entrée $x_0 + x_1 \sin \omega t$	37
2.6.3	Exemple : cas d'un relais à hystérésis dissymétrique	40
2.6.4	Principe de détermination des auto-oscillations	43
2.6.5	Exemple d'un asservissement à relais avec perturbation lente	44
2.7	Asservissement à plusieurs non linéarités	48
2.7.1	Système étudié	48
2.7.2	Non linéarité équivalente	49
2.7.3	Calcul du gain complexe équivalent	50
2.7.4	Détermination des auto-oscillations	52
2.8	Conclusions sur la méthode du premier harmonique	53
3	Méthode du plan de phase	55
3.1	Introduction	55
3.2	Fondements mathématiques	55
3.2.1	Principe général	55
3.2.2	Points singuliers	56
3.2.3	Cas d'une équation différentielle d'ordre 2	57
3.2.4	Stabilité en un point singulier	57
3.2.5	Rappel sur la résolution d'un système différentiel linéaire	58
3.2.6	Nature des points singuliers	59
3.2.7	Segments singuliers	66
3.2.8	Cycles limites	70
3.3	Etude d'asservissements à relais	70
3.3.1	Solutions dans le plan de phase	72
3.3.2	Etude de la trajectoire	73
3.3.3	Représentation des trajectoires	74
3.3.4	Trajectoire pour $\lambda = 0$	75
3.3.5	Calcul du temps le long d'une trajectoire	75
3.3.6	Etude pour un relais idéal	77
3.3.7	Etude pour un relais avec hystérésis	79
3.3.8	Relais avec seuil et retard de commutation	82
3.3.9	Système avec correction tachymétrique	84
3.4	Conclusions	86

Chapitre 1

Introduction

1.1 Limitations des méthodes linéaires

Commençons par rappeler la définition d'un système linéaire. Au sens des mathématiques, un système est linéaire si on peut y appliquer le principe de superposition. D'un point de vue physique, la définition, plus restrictive, est la suivante.

Définition 1.1.1 *Un système est linéaire s'il est décrit par des équations différentielles linéaires d'ordre fini à coefficients constants.*

Lorsque cette définition s'applique, on peut associer au système, à l'aide de la transformée de Laplace, une transmittance $H(p)$ qui est une fraction rationnelle en $p = j\omega$. En automatique, on complète fréquemment la définition de linéarité avec la transmittance associée au retard pur, c'est-à-dire un terme de la forme $\exp(-\tau p)$, où τ est une constante de temps.

Les méthodes d'étude des systèmes linéaires sont très puissantes en raison des outils disponibles (algèbre linéaire, équations différentielles et systèmes différentiels linéaires, etc.). Malgré tout, se cantonner aux systèmes linéaires présente plusieurs limitations :

- Aucun système physique n'est complètement linéaire. Les méthodes linéaires ne sont donc applicables que dans un domaine de fonctionnement restreint.
- Certains systèmes sont impossibles à modéliser, même localement, à des systèmes linéaires. Un exemple simple est le relais, que ce soit sous sa forme électro-magnétique ancienne ou sous sa forme électronique (transistor en commutation, thyristor, etc.).

- Certains phénomènes ne peuvent pas être décrits par des modèles et méthodes linéaires. Par exemple,
 1. la précision limitée due au seuil alors que la théorie classique prévoit une précision parfaite si le système comporte un intégrateur pur,
 2. le phénomène de pompage caractérisé par des oscillations périodiques, alors que la théorie linéaire ne prévoit que des états stables ou instables.

1.2 Systèmes non linéaires

Par définition, un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire (au sens physique) qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Cette définition, ou plutôt cette non-définition explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires.

On se limitera dans ce cours à l'étude des systèmes asservis non linéaires, c'est-à-dire d'asservissements qui contiendront un (voire plusieurs) éléments non linéaires. Ces éléments devront en outre appartenir à des types bien définis de non-linéarités.

1.3 Non-linéarités dans les systèmes asservis

La caractéristique entrée/sortie d'un système présente fréquemment des distortions dues aux non-linéarités du système. Par exemple, un amplificateur présente une saturation, un pont de redressement présente des seuils en raison des seuils des diodes qui le composent (Fig. 1.1)

Ces cinq non-linéarités de base peuvent se combiner pour former des non-linéarités plus complexes, comme le montre la Fig. 1.2.

Ces cinq non-linéarités et leurs combinaisons permettent de représenter à peu près tous les types de non-linéarités rencontrés dans les systèmes asservis. Remarquons cependant que ces caractéristiques sont statiques : elles

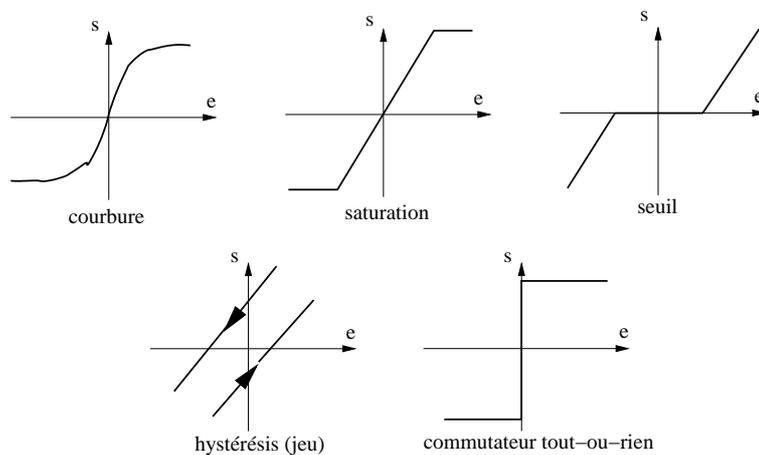


FIG. 1.1 – Exemple de non linéarités.

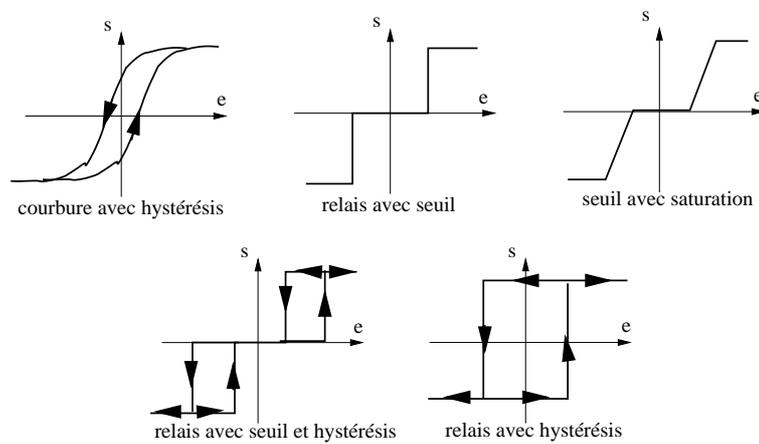


FIG. 1.2 – Combinaisons de non linéarités.

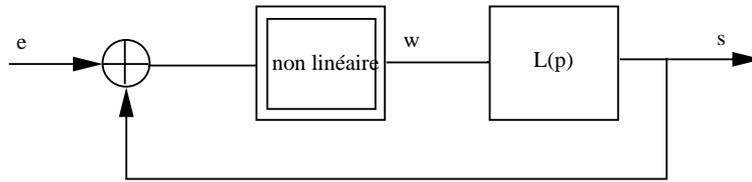


FIG. 1.3 – Système asservi non linéaire canonique.

ne modélisent pas les phénomènes dynamiques comme des temps de commutation (relais ou transistor) ou des différences de comportement selon les fréquences.

On peut classer les non-linéarités en plusieurs catégories selon leurs propriétés :

- des non-linéarités continues (courbures) ou discontinues (relais),
- des non-linéarités avec ou sans mémoire (toutes celles avec hystérésis),
- des non-linéarités accidentelles, c'est-à-dire dues aux imperfections des composants (saturation d'un amplificateur, jeu), ou essentielles, c'est-à-dire liées à la nature même du composant (relais).

1.4 Systèmes asservis possédant un seul élément non linéaire

Dans de nombreux cas, un seul élément non linéaire, et l'on peut généralement le séparer (hypothèse de séparabilité) des autres éléments linéaires du système. On peut montrer que l'étude de tels systèmes à un élément non linéaire séparable peut toujours se ramener à l'étude d'un système non linéaire *canonique*, constitué dans la chaîne directe d'un élément non linéaire isolé (bloc avec la double bordure) suivi d'un système linéaire noté $L(p)$ (qui regroupe l'ensemble des termes linéaires), et d'un retour unitaire (Fig. 1.3).

1.5 Exemples de réduction

1.5.1 Exemple

Ainsi, il est facile de montrer que le système de la figure 1.4 se réduit à la forme de la figure 1.5. Pour cela, on procède par déplacement des blocs linéaires en prenant garde de conserver le gain devant l'élément non linéaire. Par exemple, lorsque l'on déplace le bloc $H(p)$, on le met à la fois avant le

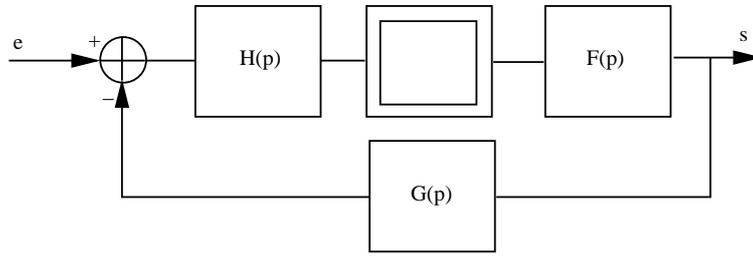


FIG. 1.4 – Système asservi non réduit.

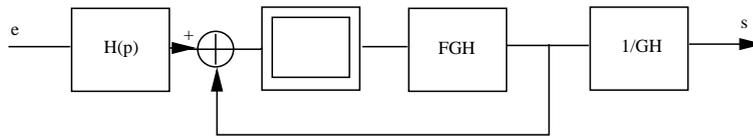


FIG. 1.5 – Système asservi sous forme canonique.

sommateur et dans la boucle de retour. De cette façon, l'élément non linéaire devient le premier bloc de la chaîne directe et, en entrée de ce bloc, le signal provenant de l'entrée e comme de la boucle de retour n'est pas modifié.

Attention aux transformations interdites : on ne doit pas intervertir un bloc linéaire avec un bloc non linéaire, car la réponse de l'élément non linéaire dépend de l'amplitude. Ainsi, le schéma de la figure 1.4 ne peut pas être transformé dans le schéma de la figure 1.6.

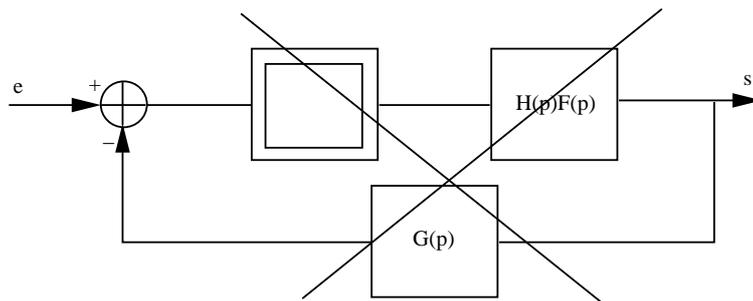


FIG. 1.6 – Transformation interdite de la figure 1.4.

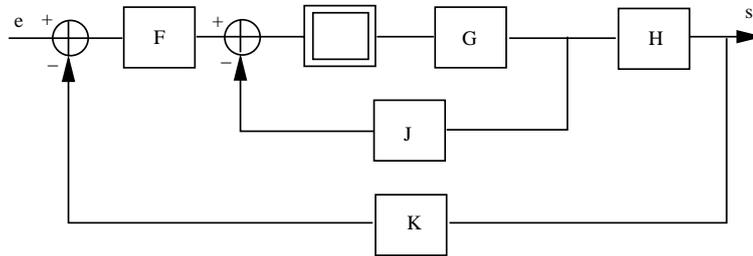


FIG. 1.7 – Système asservi à réduire.

1.5.2 Exercice

Réduire à la forme canonique le système asservi de la figure 1.7.

1.6 Méthodes d'études des systèmes asservis non linéaires

Dans ce cours, nous proposons deux méthodes d'étude des systèmes asservis non linéaires.

La *méthode du premier harmonique* est une généralisation de la méthode harmonique classique utilisée pour les systèmes linéaires. Le principe consiste à réaliser une linéarisation dans le domaine fréquentiel afin de généraliser la notion de fonction de transfert au cas NL. C'est une méthode approchée qui s'applique pour des systèmes à une non-linéarité séparable et qui suppose que la partie linéaire du système asservi se comporte comme un filtre passe-bas.

La *méthode du plan de phase* est un cas particulier (dimension 2) de la méthode très générale de l'espace de phase. Cette méthode est rigoureuse et permet d'étudier des systèmes non linéaires quelconques. En revanche, il est souvent difficile de trouver les solutions de façon analytique. L'intérêt actuel de cette méthode est lié à la puissance des calculateurs, qui permettent d'intégrer numériquement les équations et de calculer soit numériquement soit graphiquement les solutions.

1.7 Notations

Dans ce document, la variable p est utilisée comme variable de Laplace. Autrement dit, $p = j\omega$ où j est le nombre imaginaire pur, tel que $j^2 = -1$, et ω représente une pulsation.

Le module et l'argument d'un nombre complexe z seront notés $|z|$ et $\arg(z)$ respectivement. Les parties réelle et imaginaire seront notées $\Re(z)$ et $\Im(z)$, respectivement.

On utilisera souvent les abréviations suivantes :

- NL pour non linéaire,
- SA pour systèmes asservis.

1.8 Références

De nombreux ouvrages ont été écrits sur les asservissements non linéaires. Quelques références sont disponibles à la bibliothèque universitaire, et en particulier une référence française dont ce cours s'est fortement inspiré :

Christian Mira, *Systèmes asservis non linéaires. : aspects continus et discrets*, Hermès, Paris, 1990

1.9 Plan du document

Outre cette introduction, ce cours est constitué de 2 parties. La première est consacrée à la méthode du premier harmonique, la seconde à la méthode du plan de phase.

Chapitre 2

Méthode du premier harmonique

2.1 Principe

L'idée consiste à généraliser la méthode de l'analyse harmonique utilisée pour l'étude de systèmes linéaires.

Pour un système linéaire, à une excitation sinusoïdale de pulsation ω : $x(t) = x_1 \sin(\omega t)$ est associée une réponse sinusoïdale de même pulsation ω : $s(t) = s_1 \sin(\omega t + \phi)$.

En notation complexe, on peut écrire $x(t) = x_0 \exp(j\omega t)$ et $s(t) = s_1 \exp[j(\omega t + \phi)]$. En notant $p = j\omega$, la fonction de transfert $H(p)$ du système linéaire est alors égale au rapport complexe :

$$H(p) = \frac{s(t)}{x(t)} = \frac{s_1}{x_1} \exp(j\phi), \quad (2.1)$$

que l'on peut caractériser par le module :

$$|H(p)| = \left| \frac{s(t)}{x(t)} \right| = \frac{s_1}{x_1}, \quad (2.2)$$

et la phase :

$$\angle H(p) = \arg \left(\frac{s_1}{x_1} \exp(j\phi) \right) = \phi. \quad (2.3)$$

Pour un système NL, à une excitation sinusoïdale de pulsation ω : $x(t) = x_1 \sin(\omega t)$ est associée une réponse périodique de période $T = 2\pi/\omega$, mais

non sinusoïdale. La réponse $s(t)$ étant périodique, on peut la développer en séries de Fourier. En supposant que la moyenne s_0 de $s(t)$ est nulle, on a :

$$s(t) = s_1 \sin(\omega t + \phi_1) + s_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + \dots + s_k \sin(k\omega t + \phi_k) + \dots \quad (2.4)$$

L'approximation du premier harmonique consiste à conserver uniquement le premier terme en ω :

$$s(t) \approx s_1 \sin(\omega t + \phi_1), \quad (2.5)$$

les autres termes, en 2ω , 3ω , etc. étant supposés filtrés par le reste du système.

Par analogie au cas linéaire, on peut introduire une fonction de transfert généralisée ou équivalente, notée $N(x_1, \omega)$, qui dépend en particulier de l'amplitude du signal d'entrée. Le gain complexe équivalent s'écrit alors :

$$N(x_1, \omega) = \frac{s_1 \exp[j(\omega t + \phi_1)]}{x_1 \exp(j\omega t)}, \quad (2.6)$$

et il est caractérisé par son module :

$$|N(x_1, \omega)| = \frac{s_1}{x_1}, \quad (2.7)$$

et sa phase :

$$\angle N(x_1, \omega) = \phi_1. \quad (2.8)$$

Cette approche présente deux différences essentielles par rapport à la fonction de transfert utilisée pour les systèmes linéaires :

- il s'agit d'une approximation dont il faudra vérifier le bien-fondé,
- le gain complexe équivalent dépend de la pulsation et aussi de l'amplitude x_1 de l'excitation.

2.2 Condition de validité

Il faut vérifier deux conditions pour pouvoir appliquer la méthode du premier harmonique à un système asservi non linéaire :

1. *Condition de séparabilité* : le SA possède un seul bloc NL qu'il est possible d'isoler. Les autres éléments sont supposés linéaires, au moins approximativement.
2. *Condition de filtrage* : la partie linéaire du SA, notée globalement $L(p)$, est un filtre passe-bas qui filtre les termes en 2ω , 3ω , etc. ce qui rend acceptable l'approximation au premier harmonique (2.5) dans le calcul du développement en séries de Fourier.

Cette dernière condition est qualitative, mais de sa pertinence dépend la qualité de l'approximation.

2.3 Fonction de transfert généralisée

2.3.1 Représentation graphique

On considère la fonction de transfert généralisée $N(x_1, \omega)$ associée à un élément NL. $N(x_1, \omega)$ peut être représentée graphiquement par une famille de lieux de transfert gradués selon ω , chacun des lieux étant associé à une valeur de x_1 . Généralement, puisque $N(x_1, \omega)$ est complexe, on la représente dans le plan de Nyquist ($\Im(N), \Re(N)$) ou dans le plan de Black ($|N|, |N|_{dB}$).

2.3.2 Élément NL statique ou sans inertie

Le tracé et l'utilisation de la fonction de transfert généralisée est complexe dans le cas général, car celle-ci est une fonction de 2 variables. On peut souvent considérer que l'élément NL est statique (on dit aussi sans inertie) ne dépend pas de la pulsation ω . On peut alors écrire :

$$N(x_1, \omega) = N(x_1). \quad (2.9)$$

Cette simplification est possible pour les non-linéarités présentées dans l'Introduction. La fonction de transfert généralisée est alors appelée fonction d'amplitude ou gain complexe équivalent. Ce gain complexe équivalent $N(x_1)$ se représente par un lieu unique (et non plus une famille), gradué en x_1 , mais on considère plutôt le *lieu critique* $C(x_1) = -1/N(x_1)$, pour des raisons qui deviendront évidentes lorsque nous aborderons les problèmes de stabilité.

2.4 Calculs de gains complexes équivalents

On se propose de calculer les gains complexes équivalents de quelques non-linéarités usuelles. La méthode générale de calcul est le développement en séries de Fourier. On supposera que la non-linéarité est statique et symétrique (mais pas forcément impaire) par rapport à 0. On suppose que la non-linéarité est excitée par un signal de période $T = 1/f = 2\pi/\omega$ de la forme : $x(t) = x_1 \sin(\omega t)$.

2.4.1 Principe de calcul

Les coefficients de Fourier seront notés a_n pour les termes en cosinus d'harmonique n , et b_n pour les termes en sinus d'harmonique n . En pratique, on se limitera bien entendu au calcul des termes d'harmonique 1.

Propriétés La symétrie de la non-linéarité par rapport à 0 implique que la moyenne est égale à 0 :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = 0 \quad (2.10)$$

D'une façon générale, si la non-linéarité est impaire, le développement en séries de Fourier ne comporte pas de termes pairs, c'est-à-dire de termes en cosinus : $a_n = 0, \forall n$.

Si la non-linéarité est sans mémoire et symétrique, elle est impaire et par conséquent $a_n = 0, \forall n$.

Définition des coefficients Les coefficients des termes a_1 et b_1 sont définis par :

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(\omega t) dt \quad (2.11)$$

et :

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(\omega t) dt. \quad (2.12)$$

En réponse à $x(t) = x_1 \sin(\omega t)$, on obtient une réponse $s(t)$ dont l'approximation du premier harmonique vaut :

$$s(t) \approx s_1(x_1) \sin[\omega t + \phi(x_1)], \quad (2.13)$$

dans laquelle on a écrit $s_1(x_1)$ et $\phi(x_1)$ pour insister sur le fait que l'amplitude et la phase du premier harmonique dépendent de l'amplitude x_1 de l'excitation $x(t)$. Dans la suite, pour alléger les notations, on notera simplement s_1 et ϕ_1 , et on remplacera \approx par $=$. En développant (2.13), on a :

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1 \left(\sin(\omega t) \cos \phi_1 + \cos(\omega t) \sin \phi_1 \right) \\ &= (s_1 \sin \phi_1) \cos(\omega t) + (s_1 \cos \phi_1) \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (2.14)$$

On a finalement :

$$\begin{cases} a_1 &= s_1 \sin \phi_1 \\ b_1 &= s_1 \cos \phi_1 \end{cases} \quad (2.15)$$

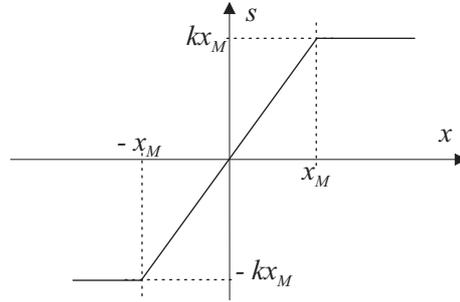


FIG. 2.1 – Saturation. Pour $|e| \leq x_M$, la réponse est $s = ke$, avec $k \in \mathbb{R}^+$.

Gain complexe équivalent En notation complexe, on a

$$\begin{cases} s(t) &= s_1 \exp[j(\omega t + \phi_1)] \\ x(t) &= x_1 \exp(j\omega t) \end{cases} \quad (2.16)$$

d'où le gain complexe équivalent :

$$N(x_1) = \frac{s(t)}{x(t)} = \frac{s_1}{x_1} \exp(j\phi_1) = \frac{s_1}{x_1} (\cos \phi_1 + j \sin \phi_1). \quad (2.17)$$

En utilisant le résultat (2.15), on a la formule :

$$N(x_1) = \frac{b_1}{x_1} + j \frac{a_1}{x_1}. \quad (2.18)$$

2.4.2 Gain complexe équivalent de la saturation

On désire calculer le gain complexe équivalent de la saturation (Fig. 2.1). On fera le calcul pour $k = 1$.

On applique à l'entrée une excitation sinusoïdale $x(t) = x_1 \sin(\omega t)$. Tant que $|x(t)| \leq x_M$, la sortie est égale à l'entrée, c'est-à-dire $s(t) = x(t)$. Pour $|x(t)| > x_M$, la saturation agit et on a $s(t) = x_M$ (Fig. 2.1)

Calcul

La saturation est une fonction impaire. On a donc $a_0 = a_1 = 0$. Il suffit de calculer le coefficient b_1 du terme en $\sin(\omega t)$:

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(\omega t) dt. \quad (2.19)$$

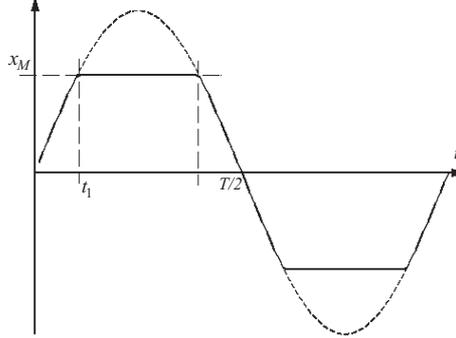


FIG. 2.2 – Réponse de la saturation à une excitation sinusoïdale.

En raison des symétries, l'intégrale peut être calculée dans l'intervalle $[0, \pi/4]$:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} x(t) \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{8}{T} \left[\int_0^{t_1} x_1 \sin^2(\omega t) dt + \int_{t_1}^{T/4} x_M \sin(\omega t) dt \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

où t_1 est tel que $x_1 \sin \omega t_1 = x_M$. En écrivant $\sin^2 u = (1 - \cos 2u)/2$ et en intégrant, on a :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{8}{T} \left[\int_0^{t_1} x_1 \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2} dt + \frac{x_M}{\omega} \cos \omega t \Big|_{t_1}^{T/4} \right] \\ &= \frac{4x_1}{T} \left(t_1 - \frac{\sin \omega t_1 \cos \omega t_1}{\omega} \right) + \frac{8x_M}{T\omega} \cos \omega t_1, \end{aligned} \quad (2.21)$$

car $\omega T/4 = 2\pi/4 = \pi/2$. En utilisant la définition de t_1 , on déduit $\sin \omega t_1 = x_M/x_1$ et $t_1 = \arcsin(x_M/x_1)/\omega$. De l'identité $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$, on tire $\cos \omega t_1 = \pm \sqrt{1 - (x_M/x_1)^2}$. Or l'angle $\omega t_1 \in]0, \pi/2[$, on déduit que $\cos \omega t_1 > 0$ et on choisit la détermination positive : $\cos \omega t_1 = +\sqrt{1 - (x_M/x_1)^2}$. Ainsi, le coefficient b_1 devient :

$$b_1 = \frac{2x_1}{\pi} \left[\arcsin \left(\frac{x_M}{x_1} \right) + \frac{x_M}{x_1} \sqrt{1 - \left(\frac{x_M}{x_1} \right)^2} \right]. \quad (2.22)$$

Finalement, le gain complexe équivalent est égal à :

$$N(x_1) = \frac{b_1}{x_1} = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \left(\frac{x_M}{x_1} \right) + \frac{x_M}{x_1} \sqrt{1 - \left(\frac{x_M}{x_1} \right)^2} \right], \quad (2.23)$$

pour $x_1 > x_M$ (sinon le système est linéaire et $N(x_1) = 1$).

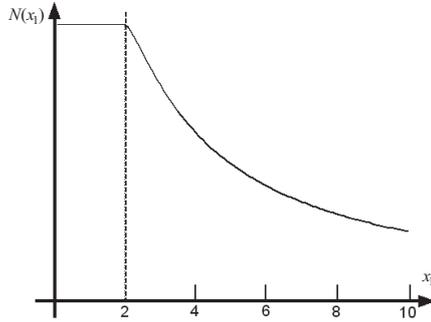


FIG. 2.3 – Gain complexe équivalent de la saturation ($x_M = 2$).

Tracé du gain complexe équivalent

Il est facile de voir que le gain complexe vaut 1 pour $x_1 \leq x_M$. En dérivant N par rapport à x_1 , on trouve :

$$\frac{dN}{dx_1} = -\frac{4 x_M}{\pi x_1^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_M}{x_1}\right)^2}. \quad (2.24)$$

On voit que la dérivée est négative, par conséquent le gain complexe équivalent est une fonction décroissante. On calcule ensuite la limite pour $x_1 \rightarrow x_M$:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_M} N(x_1) = 1, \quad (2.25)$$

et pour $x_1 \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} N(x_1) = 0. \quad (2.26)$$

Il est aussi facile de calculer le comportement asymptotique de $N(x_1)$, lorsque $x_1/x_M \gg 1$:

$$N(x_1) \sim \frac{4 x_M}{\pi x_1}, \quad (2.27)$$

est une hyperbole.

Finalement, le tracé est donné à la figure 2.3 pour $x_M = 2$.

Lieu critique

En pratique, l'étude de l'existence d'auto-oscillations et de la stabilité s'appuie sur le lieu critique $C(x_1) = -1/N(x_1)$ plutôt que sur le gain complexe équivalent. Le gain complexe équivalent étant une fonction décroissante

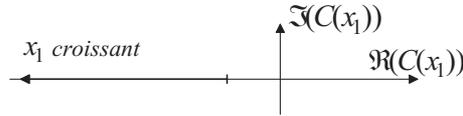


FIG. 2.4 – Lieu critique $C(x_1)$ de la saturation.

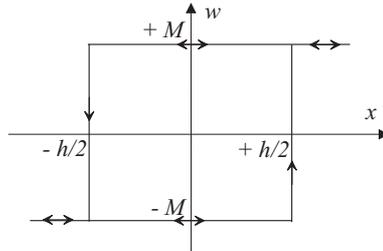


FIG. 2.5 – Relais sans seuil et avec hystérésis.

vérifiant $0 < N(x_1) \leq 1$, le lieu critique est une fonction également décroissante comprise dans l'intervalle $]-\infty, -1]$. La valeur $C(x_1) = -1$ est obtenue pour $N(x_1) = 1$, et $C(x_1) \rightarrow -\infty$ lorsque $x_1 \rightarrow +\infty$. On trace usuellement le lieu critique dans un plan complexe (plan de Black ou Nyquist). La figure 2.4 donne le tracé de $C(x_1)$ dans le plan de Nyquist.

2.4.3 Gain complexe équivalent d'un relais avec hystérésis

On désire calculer le gain complexe équivalent du relais sans seuil et avec hystérésis dont la caractéristique est donnée à la figure 2.5.

On applique à l'entrée une excitation sinusoïdale $x(t) = x_1 \sin(\omega t)$. On suppose que l'on part avec $w(t) = -M$. Tant que $x(t) \leq h/2$, la sortie du relais ne change pas. La commutation, $-M \rightarrow +M$, se produit pour $x(t) = h/2$. Ensuite, tant que $x(t) > -h/2$, la sortie de relais reste à $+M$. La commutation, $M \rightarrow -M$, se produit à $x(t) = -h/2$. Le relais reste dans cette position tant que l'entrée n'atteint pas $+h/2$ (Fig. 2.6).

Calcul

En raison de l'hystérésis, la sortie $w(t)$ est déphasée sur l'entrée $x(t)$, ce qui implique que les coefficients a_1 et b_1 sont non nuls.

Calculons d'abord a_1 , qui vaut par définition :

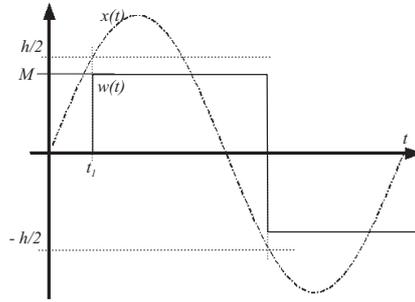


FIG. 2.6 – Réponse $w(t)$ du relais à hystérésis à une excitation sinusoïdale $x(t)$.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T w(t) \cos \omega t \, dt, \\
 &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} w(t) \cos \omega t \, dt, \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

car les deux fonctions $w(t)$ et $\cos \omega t$ étant opposées sur les intervalles $[0, T/2]$ et $[T/2, T]$, l'intégrale totale est égale à deux fois l'intégrale sur le premier intervalle. Soit t_1 la date de la commutation $-M \rightarrow +M$, on peut décomposer l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{4}{T} \left[\int_0^{t_1} w(t) \cos \omega t \, dt + \int_{t_1}^{T/2} w(t) \cos \omega t \, dt \right], \\
 &= \frac{4}{T} \left[\int_0^{t_1} (-M) \cos \omega t \, dt + \int_{t_1}^{T/2} M \cos \omega t \, dt \right], \\
 &= \frac{4}{T} \left[-\frac{M}{\omega} \sin \omega t_1 + \frac{M}{\omega} (\sin(\omega T/2) - \sin \omega t_1) \right], \\
 &= -\frac{8M}{\omega T} \sin \omega t_1,
 \end{aligned}$$

car $\sin \omega T/2 = \sin \pi = 0$.

Au temps t_1 , on a $x(t_1) = x_1 \sin \omega t_1 = h/2$, c'est-à-dire $\sin \omega t_1 = h/(2x_1)$; de plus, $\omega T = 2\pi$, puisque T est la période associée à la pulsation ω . Finalement, on a :

$$a_1 = -\frac{2Mh}{\pi x_1}. \tag{2.29}$$

Calculons maintenant b_1 :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T w(t) \sin \omega t \, dt, \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} w(t) \sin \omega t \, dt, \end{aligned} \quad (2.30)$$

car les deux fonctions $w(t)$ et $\sin \omega t$ étant opposées sur les intervalles $[0, T/2]$ et $[T/2, T]$, l'intégrale totale est égale à deux fois l'intégrale sur le premier intervalle. En notant toujours t_1 la date de la commutation $-M \rightarrow +M$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{T} \left[\int_0^{t_1} w(t) \sin \omega t \, dt + \int_{t_1}^{T/2} w(t) \sin \omega t \, dt \right], \\ &= \frac{4}{T} \left[\int_0^{t_1} (-M) \sin \omega t \, dt + \int_{t_1}^{T/2} M \sin \omega t \, dt \right], \\ &= \frac{4}{T} \left[+ \frac{M}{\omega} (\cos \omega t_1 - 1) + \frac{M}{\omega} (-\cos(\omega T/2) + \cos \omega t_1) \right], \\ &= \frac{8M}{\omega T} \cos \omega t_1, \end{aligned}$$

car $\cos \omega T/2 = \cos \pi = -1$.

Il reste à calculer $\cos \omega t_1$. Au temps t_1 , on a vu que $\sin \omega t_1 = h/(2x_1)$. Par conséquent, $\cos^2 \omega t_1 = 1 - \sin^2 \omega t_1$, ce qui conduit aux deux solutions :

$$\cos \omega t_1 = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2x_1}\right)^2}. \quad (2.31)$$

En réalité, puisque $0 < \omega t_1 < \pi/2$, $\cos \omega t_1 > 0$, et on ne conserve que la solution positive, d'où finalement :

$$b_1 = \frac{4M}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2x_1}\right)^2}. \quad (2.32)$$

Tracé du gain complexe équivalent

Le gain complexe équivalent s'écrit alors :

$$\begin{aligned} N(x_1) &= \frac{b_1 + ja_1}{x_1} \\ &= \frac{4M}{\pi x_1} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2x_1}\right)^2} - j \frac{2Mh}{\pi x_1^2}, \end{aligned}$$

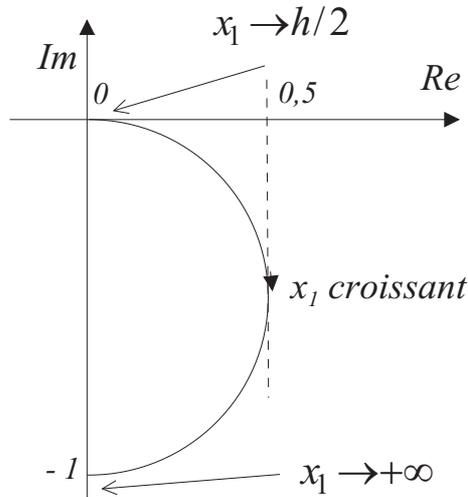


FIG. 2.7 – Gain complexe équivalent du relais à hystérésis dans le plan de Nyquist.

$$= \frac{4M}{\pi x_1} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2x_1}\right)^2} - j \frac{h}{2x_1} \right]. \quad (2.33)$$

On remarque facilement que le terme entre crochet est un nombre complexe de module unité. On en déduit facilement le module et l'argument du gain complexe équivalent :

$$|N(x_1)| = \frac{4M}{\pi x_1}, \quad (2.34)$$

$$\angle N(x_1) = -\arcsin\left(\frac{h}{2x_1}\right). \quad (2.35)$$

Remarquons que l'argument pourrait aussi être exprimé à partir de l'arctangente, mais cela donnerait une expression plus complexe. On remarque que l'argument prévoit un déphasage retard, ce qui se comprend intuitivement sur la figure 2.6 où la sortie du relais, $w(t)$, est retardée (de (ωt_1)) par rapport à l'entrée $x(t)$.

Lieu critique

Par définition, le lieu critique s'exprime $C(x_1) = -1/N(x_1)$. La forme exponentielle complexe de $N(x_1)$ est ici particulièrement intéressante à utiliser et conduit à :

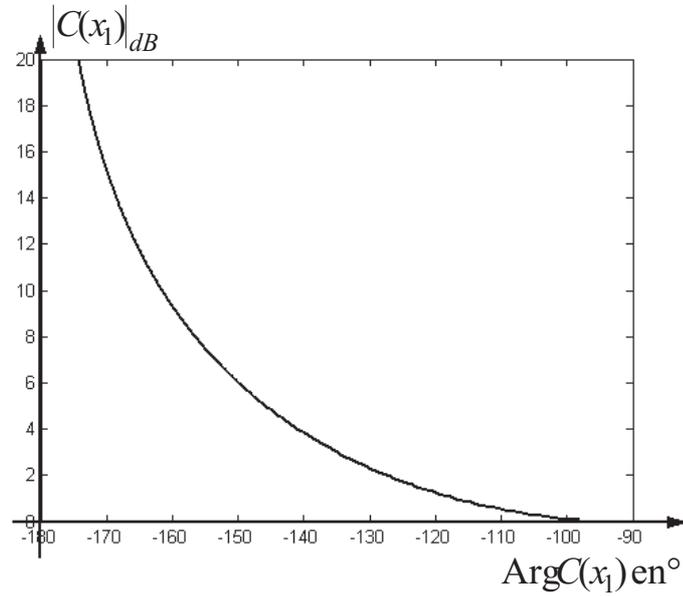


FIG. 2.8 – Lieu critique du relais à hystérésis dans le plan de Black.

$$|C(x_1)| = \frac{\pi x_1}{4M}, \quad (2.36)$$

$$\angle C(x_1) = -\pi + \arcsin\left(\frac{h}{2x_1}\right). \quad (2.37)$$

L'expression complexe est aussi très simple. A partir de (2.36), on déduit :

$$\begin{aligned} C(x_1) &= -\frac{\pi x_1}{4M} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2x_1}\right)^2} + j \frac{h}{2x_1} \right] \\ &= -\frac{\pi x_1}{4M} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2x_1}\right)^2} - j \frac{\pi h}{8M}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Le tracé du lieu critique est très simple dans le plan de Black (module en dB en fonction de la phase) comme dans le plan de Nyquist. Dans le plan de Nyquist, on remarque notamment que la partie imaginaire est constante, égale à $-\pi h/8M$, et que la partie réelle, toujours négative, tend vers $-\infty$ lorsque x_1 croît. Les tracés dans les deux représentations sont données aux figures 2.8 et 2.9.

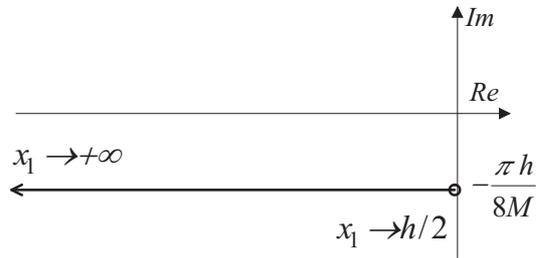


FIG. 2.9 – Lieu critique du relais à hystérésis dans le plan de Nyquist.

2.4.4 Gain complexe équivalent d'un système NL quelconque

Le gain complexe équivalent consiste à calculer l'approximation du premier harmonique. La méthode générale consiste à calculer le développement en série de Fourier. Parfois, il est possible de calculer le terme du premier harmonique par un calcul trigonométrique direct. C'est souvent le cas lorsque la nonlinéarité est continue et s'exprime sous la forme d'une expression simple, notamment polynomiale.

Exercice : NL définie par une expression

On considère la nonlinéarité telle que $w(x) = kx(1 + \beta x^2)$. Montrer que le gain complexe équivalent est égal à $N(x_1) = k(1 + \frac{3}{4}\beta x_1^2)$. On tracera le gain complexe et le lieu critique en discutant selon les valeurs de β .

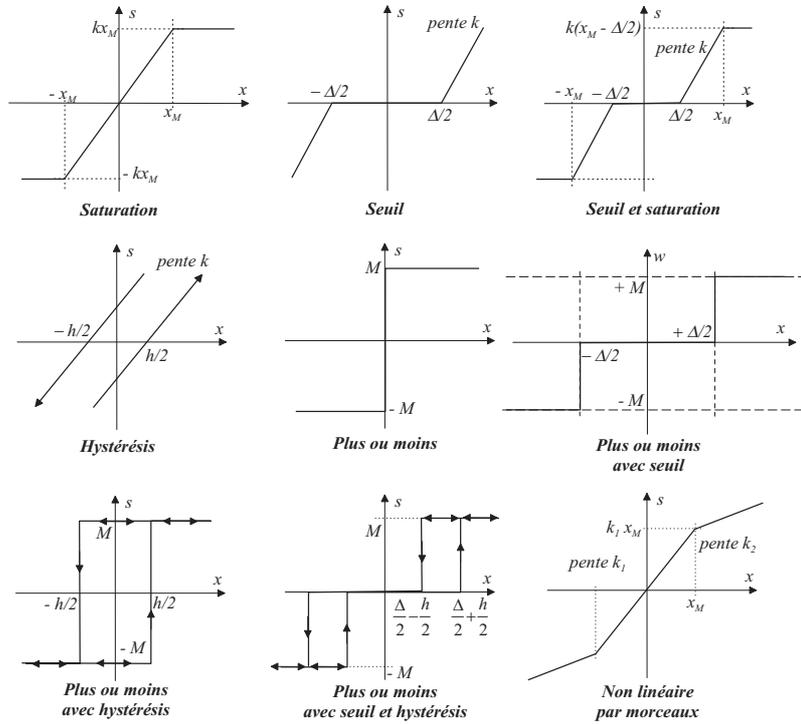


FIG. 2.10 – Non-linéarités usuelles dont les gains complexes équivalents sont donnés dans le tableau récapitulatif.

2.4.5 Tableau récapitulatif de gains complexes équivalents

Pour éviter les calculs, on pourra utiliser la table ci-dessous, dont les notations sont les suivantes :

- le gain complexe équivalent s'écrit $N(x_1) = N_P(x_1) + jN_Q(x_1)$, où N_P et N_Q sont les composantes en phase et en quadrature,
- x_1 est l'amplitude de l'entrée de la forme $x(t) = x_1 \sin(\omega t)$
- la fonction f désigne la fonction "saturation" définie par :

$$f(u) = \begin{cases} -1 & , \text{ pour } u \leq -1 \\ \frac{2}{\pi} \left[\arcsin u + u\sqrt{1-u^2} \right] & , \text{ pour } |u| < 1 \\ +1 & , \text{ pour } u \geq 1 \end{cases} \quad (2.39)$$

Le tableau ci-dessous donne les gains complexes correspondant aux caractéristiques de la figure 2.10.

Non-linéarité	Gain complexe équivalent
Saturation	$N_P = kf\left(\frac{x_M}{x_1}\right)$ $N_Q = 0$
Seuil	$N_P = k\left[1 - f\left(\frac{\Delta}{2x_1}\right)\right]$ $N_Q = 0$
Seuil et saturation	$N_P = k\left[1 - f\left(\frac{x_M}{x_1}\right) - f\left(\frac{\Delta}{2x_1}\right)\right]$ $N_Q = 0$
Hystérésis	$N_P = \frac{k}{2}\left[1 + f\left(1 - \frac{h}{x_1}\right)\right]$ $N_Q = -\frac{2kh}{\pi x_1}\left(1 - \frac{h}{2x_1}\right)$
Plus ou moins	$N_P = \frac{4M}{\pi x_1}$ $N_Q = 0$
Plus ou moins avec seuil	$N_P = \frac{4M}{\pi x_1}\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{2x_1}\right)^2}$ $N_Q = 0$
Plus ou moins avec hystérésis	$N_P = \frac{4M}{\pi x_1}\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2x_1}\right)^2}$ $N_Q = -\frac{2Mh}{\pi x_1^2}$
Plus ou moins avec seuil et hystérésis	$N_P = \frac{2M}{\pi x_1}\left[\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta+h}{2x_1}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta-h}{2x_1}\right)^2}\right]$ $N_Q = -\frac{2Mh}{\pi x_1^2}$
Non linéaire par morceaux	$N_P = (k_1 - k_2)f\left(\frac{x_M}{x_1}\right) + k_2$ $N_Q = 0$

TAB. 2.1 – Tableau récapitulatif des gains complexes équivalents de non-linéarités usuelles

2.5 Stabilité des systèmes asservis non linéaires

2.5.1 Conditions nécessaires d'auto-oscillations

Dans le cas d'un système asservi possédant un seul élément non linéaire, séparable, sans inertie et filtré, on peut se ramener au modèle canonique (Fig. 1.3).

Dans ce modèle, l'élément non linéaire est remplacé par son gain complexe équivalent $N(x_1)$. En boucle fermée, la fonction de transfert généralisée peut s'écrire :

$$\frac{S}{E} = \frac{N(x_1)L(j\omega)}{1 + N(x_1)L(j\omega)}. \quad (2.40)$$

Quelle que soit l'entrée e , la stabilité du système dépend de la valeur du dénominateur. On obtient la condition nécessaire d'auto-oscillation en annulant le dénominateur de la fonction de transfert (2.40) :

$$1 + N(x_1)L(j\omega) = 0. \quad (2.41)$$

Chaque solution mathématique de cette équation donne la pulsation ω_0 et l'amplitude $(x_1)_0$ d'une auto-oscillation. On peut encore écrire :

$$L(j\omega) = -\frac{1}{N(x_1)} = C(x_1). \quad (2.42)$$

Cette dernière relation, facile à résoudre graphiquement, montre que ces solutions sont les intersections entre les courbes représentatives de la partie linéaire $L(j\omega)$ et du lieu critique $C(x_1)$. Le lieu critique $C(x_1)$ est de façon évidente une généralisation de la notion de point critique, telle qu'elle est présentée dans l'étude des systèmes linéaires.

Si les deux courbes, $L(j\omega)$ et $C(x_1)$, se coupent en un point $M(\omega_0, (x_1)_0)$ (voir Figure 2.11), la condition nécessaire d'auto-oscillation est vérifiée au point d'intersection : il existe peut-être une auto-oscillation de pulsation ω_0 et d'amplitude $(x_1)_0$.

Pourquoi peut-être ?

Parce que cette auto-oscillation, pour être observable physiquement, ne doit pas être fugitive. C'est-à-dire que si on modifie un peu l'amplitude et/ou la pulsation de l'auto-oscillation, on doit revenir vers les solutions, ω_0 et $(x_1)_0$. On dit alors que l'auto-oscillation est stable.

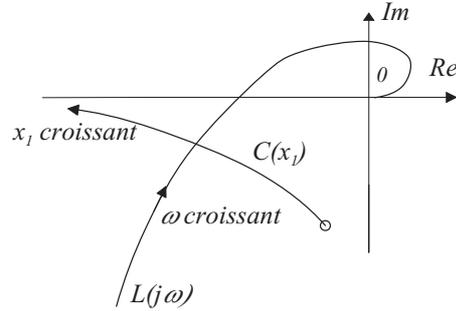


FIG. 2.11 – Une auto-oscillation est déterminée par la solution de l'équation $L(j\omega) = C(x_1)$, qui correspond graphiquement à l'intersection des deux courbes $L(j\omega)$ et $C(x_1)$.

2.5.2 Stabilité des auto-oscillations

On se place en un point d'intersection, $((x_1)_0, \omega_0)$, des deux courbes $L(j\omega)$ et $C(x_1)$. Sous l'hypothèse du premier harmonique, l'auto-oscillation se réduit à une oscillation sinusoïdale pure d'expression complexe $x(t) = (x_1)_0 \exp(j\omega_0 t)$. Supposons qu'à l'instant $t = 0$, on perturbe l'auto-oscillation par une petite variation de pulsation, $\Delta\omega$, et par une petite variation d'amplitude, Δx_1 . Pour $t > 0$, on peut alors écrire :

$$x(t) = ((x_1)_0 + \Delta x_1) \exp(j(\omega_0 + \Delta\omega)t) \exp(-\delta t), \quad (2.43)$$

où δ est un terme d'amortissement. Si $\delta > 0$, l'amplitude décroît lorsque t croît ; réciproquement, si $\delta < 0$, l'amplitude croît lorsque t croît. Par conséquent, l'auto-oscillation sera stable si lorsque t croît, $x(t)$ revient vers l'auto-oscillation initiale. Pour cela, dans (2.43), la perturbation d'amplitude, Δx_1 , et l'amortissement, δ , doivent donc être de même signe.

Condition mathématique générale

Puisque la fonction de transfert et le gain complexe équivalent sont des fonctions complexes, la condition de stabilité, $L(j\omega)N(x_1) + 1 = 0$ peut s'écrire :

$$X(\omega, x_1) + jY(\omega, x_1) = 0, \quad (2.44)$$

où $X(\omega, x_1)$ et $Y(\omega, x_1)$ sont deux fonctions réelles de deux variables réelles. Finalement, la condition d'auto-oscillation devient :

$$\begin{cases} X(\omega, x_1) = 0, \\ Y(\omega, x_1) = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Au voisinage du point $((x_1)_0, \omega_0)$, on peut écrire que la condition de stabilité reste satisfaite, c'est-à-dire :

$$X(\omega_0 + \Delta\omega + j\delta, (x_1)_0 + \Delta x_1) + jY(\omega_0 + \Delta\omega + j\delta, (x_1)_0 + \Delta x_1) = 0. \quad (2.46)$$

En développant au premier ordre au voisinage du point, et en tenant compte du fait que $X(\omega_0, (x_1)_0) = 0$ et $Y(\omega_0, (x_1)_0) = 0$, on arrive aux équations :

$$\frac{\partial X}{\partial \omega}(\Delta\omega + j\delta) + \frac{\partial X}{\partial x_1}\Delta x_1 + j\frac{\partial Y}{\partial \omega}(\Delta\omega + j\delta) + j\frac{\partial Y}{\partial x_1}\Delta x_1 = 0. \quad (2.47)$$

En regroupant entre eux les termes réels et imaginaires, on arrive finalement au système :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \omega}\Delta\omega + \frac{\partial X}{\partial x_1}\Delta x_1 - \frac{\partial Y}{\partial \omega}\delta = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial \omega}\Delta\omega + \frac{\partial Y}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial X}{\partial \omega}\delta = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

En multipliant la première équation par $\partial Y/\partial \omega$ et la seconde par $-\partial X/\partial \omega$, puis en sommant les deux équations, on élimine $\Delta\omega$ et il reste :

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial X}{\partial \omega}\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)\Delta x_1 = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^2\right]\delta. \quad (2.49)$$

De façon évidente, le terme de droite entre crochets est positif. Pour que la condition de stabilité soit satisfaite, puisque Δx_1 et δ doivent être de même signe, on doit donc satisfaire la condition :

$$\frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial X}{\partial \omega}\frac{\partial Y}{\partial x_1} > 0. \quad (2.50)$$

Condition pratique dans le plan de Nyquist

Nous avons vu que la détermination des auto-oscillations peut se faire très simplement de façon graphique. Nous proposons ici de chercher une condition pratique de stabilité. Nous nous plaçons dans le plan de Nyquist et nous posons :

$$\begin{cases} L(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \\ C(x_1) = P(x_1) + jQ(x_1). \end{cases} \quad (2.51)$$

Avec ces notations, la condition d'auto-oscillation, $L(j\omega) = C(x_1)$, s'écrit

$$U(\omega) - P(x_1) + j[V(\omega) - Q(x_1)] = 0. \quad (2.52)$$

En identifiant avec l'équation (2.44), on a :

$$\begin{cases} X(\omega, x_1) = U(\omega) - P(x_1) \\ Y(\omega, x_1) = V(\omega) - Q(x_1). \end{cases} \quad (2.53)$$

On peut maintenant calculer des dérivées partielles qui interviennent dans la condition de stabilité (2.50) qui devient alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} \frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{\partial V}{\partial \omega} \frac{\partial P}{\partial x_1} > 0. \quad (2.54)$$

En pratique, on représente les points (U, V) et (P, Q) du plan complexe comme des vecteurs $(U, V, 0)^T$ et $(P, Q, 0)^T$ d'un espace à trois dimensions. Les tangentes aux courbes $L(j\omega)$ et $C(x_1)$ sont respectivement colinéaires aux vecteurs :

$$\vec{t}_L = \frac{\partial}{\partial \omega} \begin{pmatrix} U \\ V \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t}_C = \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

La condition de stabilité (2.54) peut alors être vue comme la condition vectorielle sur les vecteurs tangentes :

$$\vec{t}_L \wedge \vec{t}_C > 0, \quad (2.56)$$

c'est-à-dire que les vecteurs tangente (\vec{t}_L, \vec{t}_C) sont dans le sens direct.

Condition pratique dans le plan de Black

On ne fera pas les calculs dans le plan de Black. De façon similaire, on pourrait montrer que, dans le plan de Black, la condition est *l'opposée* à celle du plan de Nyquist, c'est-à-dire que les vecteurs tangente (\vec{t}_L, \vec{t}_C) sont dans le sens rétrograde.

2.5.3 Auto-oscillations dans un asservissement à relais

Si l'élément non linéaire est un asservissement à relais avec seuil et hystérésis, il peut exister plusieurs intersections entre la courbe représentative du lieu critique et celle de $L(j\omega)$. C'est le cas de la figure 2.12, où il existe deux points d'intersection M et M' . En appliquant le critère de stabilité des auto-oscillations du paragraphe précédent, on vérifie que le point M correspond à une auto-oscillation stable, tandis que le point M' est associé à une auto-oscillation instable. Ceci signifie que l'auto-oscillation associée à M' n'est

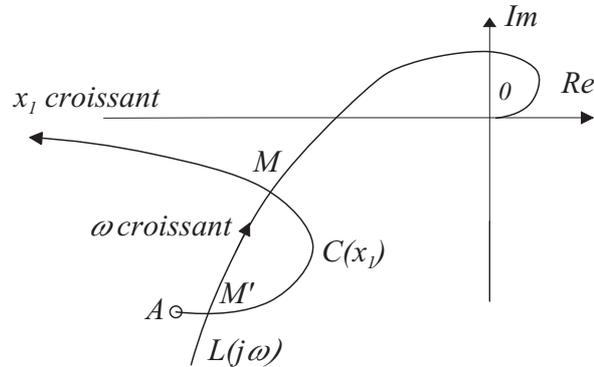


FIG. 2.12 – L’existence de deux intersections est possible selon la forme de la courbe $C(x_1)$. Dans ce cas, l’une des intersections (M) correspond à une auto-oscillation stable, l’autre (M') à une instable.

pas observable : en effet, s’il existe une petite perturbation (amplitude ou pulsation), on ne revient pas au point M , mais vers le point A (disparition de l’auto-oscillation) ou vers le point M' (l’auto-oscillation stable).

Si maintenant, le gain k de la partie linéaire $L(j\omega) = kL^*(j\omega)$ ($k \in \mathbb{R}$) varie, les points d’intersection se déplacent et peuvent disparaître (ou apparaître). A la figure 2.13, si k augmente, l’intersection M' glisse vers la gauche et peut disparaître. Il n’y a plus qu’une auto-oscillation stable. Au contraire, si le gain k diminue, les deux points M et M' se rapprochent, finissent par être confondus puis par disparaître pour $k < k_C$, où k_C est un gain critique. Selon les variations du gain, on observe que le comportement du système peut changer considérablement : ainsi k_C correspond à une frontière *dangereuse* de stabilité car on passe brutalement de l’absence d’auto-oscillation à une auto-oscillation stable.

Pour d’autres types de nonlinéarités (Figure 2.14), il n’existe qu’une intersection associée à une auto-oscillation stable et la variation du gain modifie continuellement les paramètres (amplitude et pulsation) de l’auto-oscillation. Lorsque $k < k_c$ il n’y a pas d’auto-oscillation, lorsque $k > k_c$ l’auto-oscillation apparaît et ses paramètres varient progressivement lorsque k augmente : on parle alors de frontière non dangereuse de stabilité.

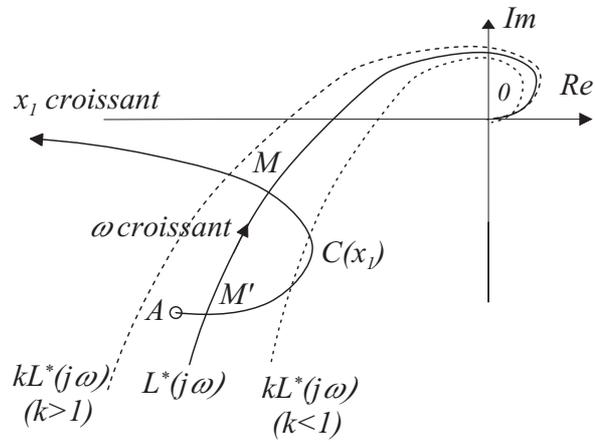


FIG. 2.13 – Existence de deux auto-oscillations. Lorsque le gain k varie, les auto-oscillations peuvent disparaître ou apparaître, et parfois brutalement.

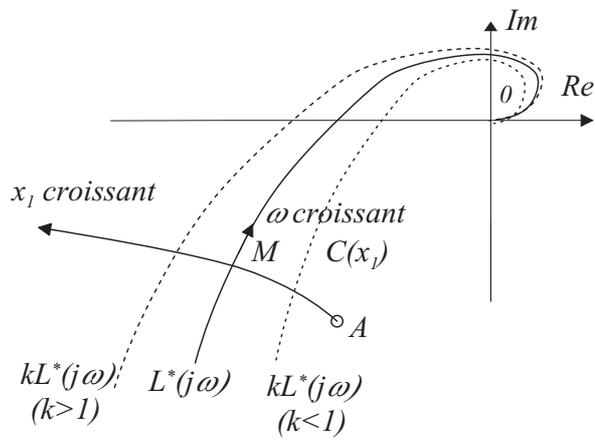


FIG. 2.14 – Existence d’une auto-oscillation. Lorsque le gain k varie, l’auto-oscillation peut disparaître ou apparaître, mais ses paramètres varient progressivement.

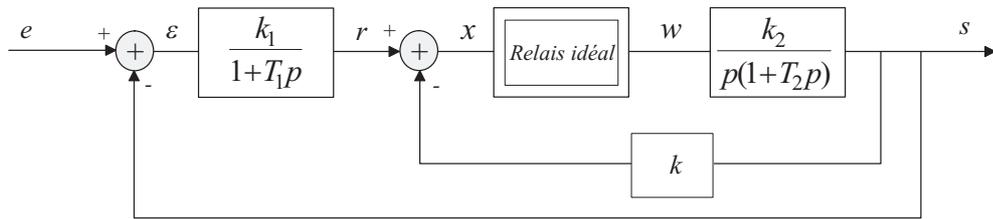


FIG. 2.15 – Asservissement non linéaire. Le relais est idéal : il commute aux passages à 0 vers les valeurs $\pm M$.

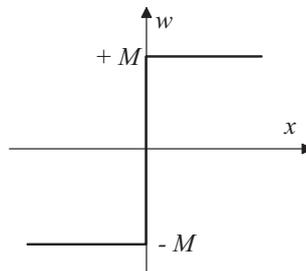


FIG. 2.16 – La non linéarité est un relais idéal.

2.5.4 Exemple : détermination mathématique des auto-oscillations

On considère l'asservissement de la figure 2.15, dans lequel l'élément non linéaire isolé est un relais idéal dont la caractéristique est donnée à la figure 2.16. On veut déterminer s'il existe des auto-oscillations et si oui, quelles sont leurs caractéristiques.

Avant tout calcul, il faut justifier l'utilisation de la méthode du premier harmonique : il n'y a qu'un seul élément non linéaire, séparé, la condition de filtrage est a priori satisfaite par les blocs linéaires passe-bas. Ceci étant, on peut procéder à calculer les auto-oscillations :

- graphiquement, après avoir mis l'asservissement sous forme canonique (Fig. 2.17), calculé le gain complexe équivalent du relais et étudié les intersections des courbes représentatives $C(x_1)$ et $L(j\omega)$.
- analytiquement, en calculant les solutions mathématiques de l'équation $L(j\omega) = C(x_1)$ et en étudiant leur stabilité.

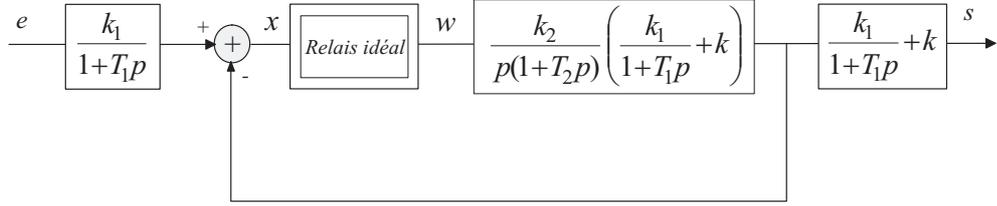


FIG. 2.17 – Forme canonique de l’asservissement non linéaire de la figure 2.15.

Détermination analytique des solutions à partir de la forme canonique

La forme canonique montre clairement que les conditions d’application de la méthode du premier harmonique sont satisfaites :

- l’élément non linéaire est séparable,
- la partie linéaire se comporte globalement comme un filtre passe-bas d’ordre deux : la condition de filtrage est vérifiée.

A partir de la représentation canonique, on écrit la condition d’auto-oscillation $L(j\omega)N(x_1) + 1 = 0$. L’expression $L(j\omega)$ apparaît directement sur la figure 2.17 ; l’expression de $N(x_1)$ se calcule aisément par développement en séries de Fourier (en observant, compte tenu de la forme impaire de la caractéristique, que le terme $a_1 = 0$. Après un calcul simple¹, on arrive à $N(x_1) = 4M/\pi x_1$.

La condition d’auto-oscillation s’écrit donc :

$$\frac{4M}{\pi x_1} \frac{k_2}{p(1+T_2p)} \left(\frac{k_1}{1+T_1p} + k \right) + 1 = 0. \quad (2.57)$$

Après un calcul algébrique simple, on peut mettre cette expression sous la forme d’une équation polynomiale en p :

$$T_1T_2p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + \left(1 + k_2T_1 \frac{4M}{\pi x_1} \right) p + k_2(k_1 + k) \frac{4M}{\pi x_1} = 0. \quad (2.58)$$

En posant $p = j\omega$, on peut écrire cette équation sous la forme :

$$-jT_1T_2\omega^3 - (T_2 + T_1)\omega^2 + j\left(1 + \frac{4M}{\pi x_1} k_2T_1 \right) \omega + \frac{4M}{\pi x_1} k_2(k_1 + k) = 0. \quad (2.59)$$

¹on pourrait aussi trouver ce résultat en faisant $h/2 = 0$ dans la relation (2.38)

En rassemblant les termes réels et imaginaires, on arrive à la forme théorique $X(\omega, x_1) + jY(\omega, x_1) = 0$:

$$\left[\frac{4M}{\pi x_1} k_2(k_1 + k) - (T_2 + T_1)\omega^2 \right] + j \left[\left(1 + \frac{4M}{\pi x_1} k_2 k T_1\right)\omega - T_1 T_2 \omega^3 \right] = 0. \quad (2.60)$$

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} X(\omega, x_1) = \frac{4M}{\pi x_1} k_2(k_1 + k) - (T_2 + T_1)\omega^2 = 0 \\ Y(\omega, x_1) = \left(1 + \frac{4M}{\pi x_1} k_2 k T_1\right)\omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

dont les solutions sont les couples (ω, x_1) associés aux auto-oscillations. On peut éliminer ω en multipliant la première équation par $-T_1 T_2$ et la seconde par $(T_1 + T_2)/\omega$, puis en sommant les deux, ce qui donne :

$$\begin{aligned} -\frac{4M}{\pi x_1} k_2(k_1 + k) T_1 T_2 + \left(1 + \frac{4M}{\pi x_1} k_2 k T_1\right)(T_1 + T_2) &= 0, \\ -\frac{4M}{\pi x_1} k_2 k_1 T_1 T_2 + (T_1 + T_2) + \frac{4M}{\pi x_1} k_2 k T_1^2 &= 0, \\ -\frac{4M}{\pi x_1} k_2 T_1 (k_1 T_2 - k T_1) + (T_1 + T_2) &= 0. \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$(x_1)_0 = \frac{4M}{\pi} \frac{k_2 T_1 (k_1 T_2 - k T_1)}{T_1 + T_2}. \quad (2.62)$$

En reportant la solution en x_1 dans la première équation² de (2.61), on trouve la solution en ω :

$$\frac{4M}{\pi} \left[\frac{\pi}{4M} \frac{T_1 + T_2}{k_2 T_1 (k_1 T_2 - k T_1)} \right] k_2(k_1 + k) - (T_2 + T_1)\omega^2 = 0, \quad (2.63)$$

c'est-à-dire, après simplification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k}{T_1 (k_1 T_2 - k T_1)}}. \quad (2.64)$$

Ces solutions mathématiques ont un sens si les deux quantités x_1 et ω sont positives, c'est-à-dire si $0 < k < k_1 T_1 / T_2$.

²on choisit la plus simple

Détermination analytique directe des solutions

On peut aussi procéder analytiquement sans mettre l'asservissement sous forme canonique. Les équations du système sont :

$$\begin{cases} r &= -\frac{k_1 s}{1+T_1 p} \\ x &= r - k s \\ w &= \phi(x) \\ s &= \frac{k_2 w}{p(1+T_2 p)}. \end{cases} \quad (2.65)$$

La troisième équation de (2.65) peut donc s'écrire :

$$w = \frac{4M}{\pi x_1} x. \quad (2.66)$$

En calculant w en fonction de x à l'aide des autres équations de (2.65), on trouve successivement :

$$\begin{cases} w &= \frac{sp(1+T_2 p)}{k_2} \\ x &= -\left(\frac{k_1 s}{1+T_1 p} - k s\right). \end{cases} \quad (2.67)$$

Puis en combinant les deux équations de (2.67), on arrive à :

$$w = \frac{4M}{\pi x_1} x = -\frac{p(1+T_2 p)}{k_2} \frac{1+T_1 p}{k_1 + k + kT_1 p} x. \quad (2.68)$$

Enfin, en simplifiant par x , on a :

$$\frac{4M}{\pi x_1} \frac{k_2(k_1 + k + kT_1 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)} = -1, \quad (2.69)$$

qui est de la forme $N(x_1)L(j\omega) = -1$ (avec $p = j\omega$) et identique à l'équation (2.57) trouvée précédemment.

Stabilité de l'auto-oscillation

De plus, il faut vérifier que la solution mathématique trouvée au paragraphe précédent a une réalité physique, c'est-à-dire dire qu'elle est observable ou stable au sens où nous l'avons défini précédemment. Pour cela, on va vérifier si la condition de stabilité (2.50) de l'auto-oscillation est satisfaite. Calculons d'abord les dérivées partielles des parties réelles et imaginaires de (2.61) par rapport à x_1 et ω :

$$\begin{cases} \frac{\partial X(\omega, x_1)}{\partial x_1} = -\frac{4M}{\pi x_1^2} k_2(k_1 + k) & ; & \frac{\partial X(\omega, x_1)}{\partial \omega} = -2\omega(T_1 + T_2) \\ \frac{\partial Y(\omega, x_1)}{\partial x_1} = \frac{4M}{\pi x_1^2} k_2 k T_1 \omega & ; & \frac{\partial Y(\omega, x_1)}{\partial \omega} = 1 + \frac{4M}{\pi x_1} k_2 k T_1 - 3T_1 T_2 \omega^2 \end{cases} \quad (2.70)$$

On calcule maintenant la condition \mathcal{C}_O :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_O(\omega, x_1) &= \frac{\partial X(\omega, x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial Y(\omega, x_1)}{\partial \omega} - \frac{\partial X(\omega, x_1)}{\partial \omega} \frac{\partial Y(\omega, x_1)}{\partial x_1} \\
&= -\frac{4M}{\pi x_1^2} k_2 (k_1 + k) \left[1 + \frac{4M}{\pi x_1} k_2 k T_1 - 3\omega^2 T_1 T_2 \right] \\
&\quad - 2\omega^2 (T_1 + T_2) \frac{4M}{\pi x_1} k_2 k T_1 \\
&= -k_2 \frac{4M}{\pi x_1^2} \left[\omega^2 T_1 (2k T_1 - 3k_1 T_2 - k T_2) + (k_1 + k) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4M}{\pi x_1} k_2 k T_1 (k_1 + k) \right].
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Puisque l'on étudie la condition au point solution de la condition d'auto-oscillation, dans la dernière équation on remplace x_1 et ω par les valeurs trouvées à (2.62) et (2.64) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_O(\omega_0, (x_1)_0) &= -k_2 \frac{4M}{\pi x_1^2} \left[\frac{k_1+k}{T_1(T_2 k_1 - T_1 k)} T_1 (2k T_1 - 3k_1 T_2 - k T_2) \right. \\
&\quad \left. + (k_1 + k) + \frac{T_1+T_2}{k_2 T_1 (T_2 k_1 - T_1 k)} k_2 k T_1 (k_1 + k) \right] \\
&= -k_2 \frac{4M}{\pi x_1^2} \left[(k_1 + k) \frac{(2(k T_1 - k_1 T_2) - T_2(k_1 + k))}{(T_2 k_1 - T_1 k)} \right. \\
&\quad \left. + (k_1 + k) + \frac{k(k_2 + k)(T_1 + T_2)}{(T_2 k_1 - T_1 k)} \right] \\
&= -k_2 \frac{4M}{\pi x_1^2} \left[- (k_1 + k) - \frac{T_2(k_1 + k)^2}{(T_2 k_1 - T_1 k)} + \frac{k(k_1 + k)(T_1 + T_2)}{(T_2 k_1 - T_1 k)} \right] \\
&= -\frac{4M k_2 (k_1 + k)}{\pi x_1^2 (T_2 k_1 - T_1 k)} \left[- (T_2 k_1 - T_1 k) \right. \\
&\quad \left. - T_2 (k_1 + k) + k (T_1 + T_2) \right] \\
&= \frac{8M k_2 (k_1 + k)}{\pi x_1^2} \\
&= \frac{\pi k_2 (k_1 + k) (T_1 + T_2)^2}{2M (T_2 k_1 - T_1 k)^2} > 0
\end{aligned} \tag{2.72}$$

On remarque que $\mathcal{C}_O(\omega_0, (x_1)_0)$ est toujours positif. La condition de stabilité est donc satisfaite. L'auto-oscillation définie par le couple $(\omega_0, (x_1)_0)$ est stable.

2.6 Auto-oscillation dissymétrique

2.6.1 Généralités

Les auto-oscillations dissymétriques se produisent si :

- l'élément non linéaire est dissymétrique (Figure 2.18),
- il existe des perturbations avec une composante continue (ou quasi-continue), même avec un élément non linéaire symétrique.

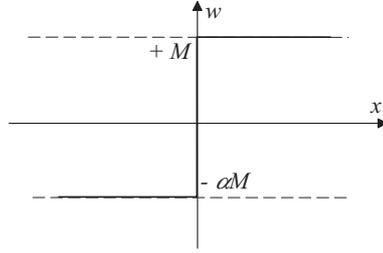


FIG. 2.18 – En raison des imperfections du composant, le relais est dissymétrique : les valeurs de commutation du relais ne sont pas opposées, mais valent $+M$ et $-\alpha M$ ($\alpha \neq 1$). La sortie du relais comporte alors une composante continue non nulle.

Dans les deux cas, la sortie w de l'élément non linéaire présente une valeur moyenne non nulle. On peut lui associer le modèle d'entrée suivant :

$$x(t) = x_0 + x_1 \sin \omega t. \quad (2.73)$$

Si l'élément non linéaire est sans inertie (c'est-à-dire si la caractéristique ne dépend pas de ω), on peut calculer l'approximation du premier harmonique de la sortie $w(t) = \phi(x_0 + x_1 \sin \omega t)$:

$$w(t) \approx w_0(x_0, x_1) + b_1((x_0, x_1) \sin \omega t + a_1((x_0, x_1) \cos \omega t, \quad (2.74)$$

avec :

$$\begin{cases} w_0(x_0, x_1) &= \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x_0 + x_1 \sin \omega t) dt, \\ b_1(x_0, x_1) &= \frac{2}{T} \int_0^T \phi(x_0 + x_1 \sin \omega t) \sin \omega t dt, \\ a_1(x_0, x_1) &= \frac{2}{T} \int_0^T \phi(x_0 + x_1 \sin \omega t) \cos \omega t dt. \end{cases} \quad (2.75)$$

2.6.2 Exemple : cas d'un relais symétrique avec une entrée $x_0 + x_1 \sin \omega t$

L'élément non linéaire est un relais à seuil symétrique (Fig. 2.19) dont l'entrée comporte une composante continue : $x(t) = x_0 + x_1 \sin \omega t$. La sortie du relais $w(t)$ suit la courbe de la figure 2.20 dont les instants de commutation satisfont :

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 \sin \omega t_1 &= \frac{\Delta}{2}, \text{ avec } 0 < t_1 < T/4, \\ x_0 + x_1 \sin \omega t_2 &= \frac{\Delta}{2}, \text{ avec } T/4 < t_2 < T/2, \end{aligned}$$

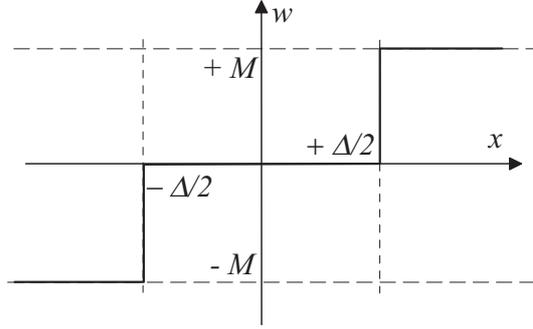


FIG. 2.19 – Caractéristique non linéaire du relais à seuil symétrique.

$$\begin{aligned}
 x_0 + x_1 \sin \omega t_3 &= -\frac{\Delta}{2}, \text{ avec } T/2 < t_3 < 3T/4, \\
 x_0 + x_1 \sin \omega t_4 &= -\frac{\Delta}{2}, \text{ avec } 3T/4 < t_4 < T.
 \end{aligned}$$

En tenant compte des symétries et en utilisant la détermination principale de la fonction arcsin, on a les relations :

$$\begin{aligned}
 \omega t_1 &= \arcsin \left(\frac{\Delta - 2x_0}{2x_1} \right), \\
 \omega t_2 &= \pi - \omega t_1, \\
 \omega t_3 &= \pi + \arcsin \left(\frac{\Delta + 2x_0}{2x_1} \right), \\
 \omega t_4 &= 2\pi - \arcsin \left(\frac{\Delta + 2x_0}{2x_1} \right).
 \end{aligned}$$

Calculons maintenant l'approximation du premier harmonique de la sortie du relais, en commençant par la valeur moyenne $w_0(x_0, x_1)$:

$$\begin{aligned}
 w_0(x_0, x_1) &= \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt, \\
 &= \frac{1}{T} \left[\int_{t_1}^{t_2} M dt + \int_{t_3}^{t_4} (-M) dt \right], \\
 &= \frac{M}{T} (t_2 - t_1 - t_4 + t_3), \\
 &= \frac{M}{T\omega} \left[\pi - 2 \arcsin \left(\frac{\Delta - 2x_0}{2x_1} \right) - \pi + 2 \arcsin \left(\frac{\Delta + 2x_0}{2x_1} \right) \right], \\
 &= \frac{M}{\pi} \left[\arcsin \left(\frac{\Delta + 2x_0}{2x_1} \right) - \arcsin \left(\frac{\Delta - 2x_0}{2x_1} \right) \right].
 \end{aligned}$$

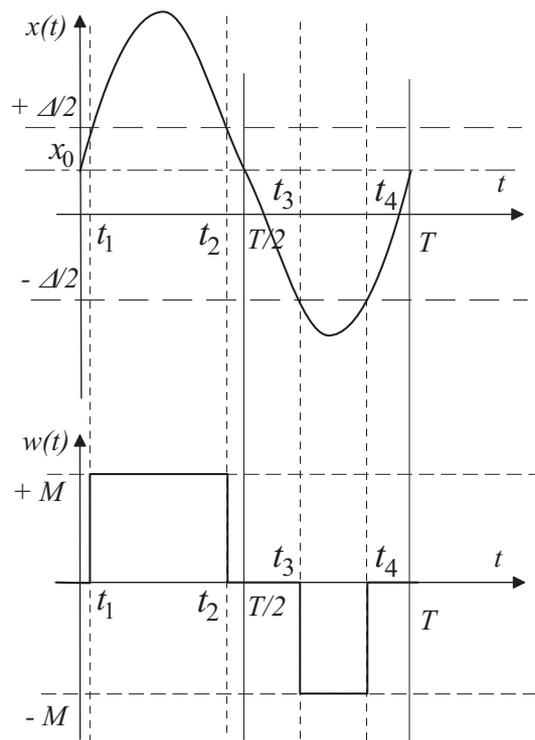


FIG. 2.20 – Sortie du relais à seuil symétrique en réponse à un signal de la forme $x_0 + x_1 \sin \omega t$.

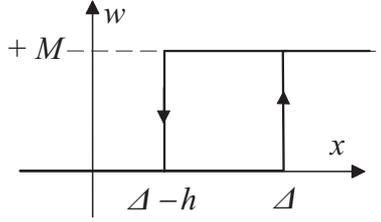


FIG. 2.21 – Caractéristique du relais à hystérésis non symétrique.

Compte tenu de la symétrie de la sortie sur chaque alternance, le coefficient du terme en $\cos \omega t$ est nul : $a_1(x_0, x_1) = 0$.

Calculons le coefficient $b_1(x_0, x_1)$:

$$\begin{aligned}
 b_1(x_0, x_1) &= \frac{2}{T} \int_0^T w(t) \sin \omega t \, dt, \\
 &= \frac{2}{T} \left[\int_{t_1}^{t_2} M \sin \omega t \, dt + \int_{t_3}^{t_4} (-M) \sin \omega t \, dt \right], \\
 &= \frac{2M}{\omega T} (-\cos \omega t_2 + \cos \omega t_1 + \cos \omega t_4 - \cos \omega t_3), \\
 &= \frac{M}{\pi} \left[2\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta - 2x_0}{2x_1} \right)^2} + 2\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta + 2x_0}{2x_1} \right)^2} \right], \\
 &= \frac{2M}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta - 2x_0}{2x_1} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta + 2x_0}{2x_1} \right)^2} \right].
 \end{aligned}$$

Le calcul des cosinus à partir des sinus exige de tenir compte de la détermination. Pour t_1 et t_2 , les sinus sont égaux : $\sin \omega t_1 = \sin \omega t_2$, et les cosinus valent : $\cos \omega t_i = \pm \sqrt{1 - (\sin \omega t_i)^2}$. Or les cosinus sont opposés : $\cos \omega t_1 = -\cos \omega t_2$, avec $\cos \omega t_1 > 0$. Il faut donc choisir la bonne détermination (signe) de chaque racine carrée.

2.6.3 Exemple : cas d'un relais à hystérésis dissymétrique

Considérons maintenant le relais à hystérésis de la Figure 2.21 dont la sortie prend les valeurs 0 ou M .

En raison de la dissymétrie du relais, l'entrée $x(t)$ comprend une composante continue et sous l'hypothèse du premier harmonique peut s'écrire : $x(t) = x_0 + x_1 \sin \omega t$. En réponse à ce signal, la sortie $w(t)$ est représentée à la figure 2.22. La commutation $0 \rightarrow M$ a lieu au temps t_1 tel que :

$$x_0 + x_1 \sin \omega t_1 = \Delta, \quad (2.76)$$

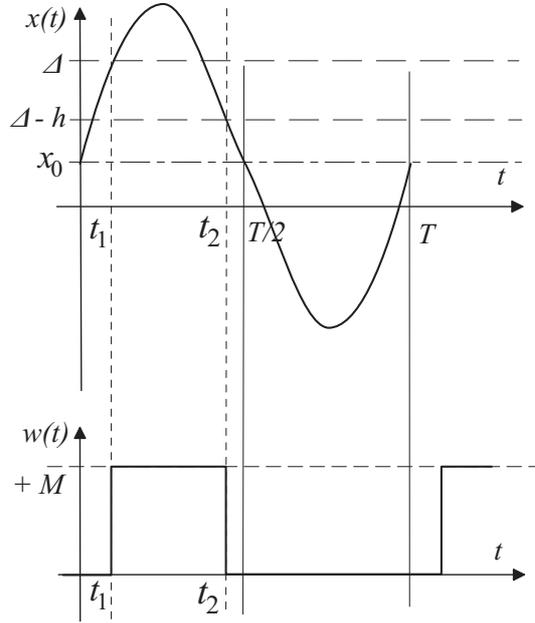


FIG. 2.22 – Réponse du relais non symétrique.

avec $0 < \omega t_1 < \pi/2$, d'où l'on déduit :

$$\sin \omega t_1 = \frac{\Delta - x_0}{x_1}, \quad (2.77)$$

$$\cos \omega t_1 = +\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta - x_0}{x_1}\right)^2}, \quad (2.78)$$

$$\omega t_1 = \arcsin\left(\frac{\Delta - x_0}{x_1}\right) \quad (2.79)$$

La commutation $M \rightarrow 0$ a lieu au temps t_2 tel que :

$$x_0 + x_1 \sin \omega t_2 = \Delta - h, \quad (2.80)$$

avec $\pi/2 < \omega t_2 < \pi$, d'où l'on déduit :

$$\sin \omega t_2 = \frac{\Delta - h - x_0}{x_1}, \quad (2.81)$$

$$\cos \omega t_2 = -\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta - h - x_0}{x_1}\right)^2}, \quad (2.82)$$

$$\omega t_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{\Delta - h - x_0}{x_1}\right). \quad (2.83)$$

Calculons d'abord la valeur moyenne $w_0(x_0, x_1)$:

$$\begin{aligned}
w_0(x_0, x_1) &= \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt, \\
&= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} M dt, \\
&= \frac{M}{T} (t_2 - t_1), \\
&= \frac{M}{T\omega} \left[\pi - \arcsin \left(\frac{\Delta - h - x_0}{x_1} \right) - \arcsin \left(\frac{\Delta - x_0}{x_1} \right) \right], \\
&= \frac{M}{2\pi} \left[\pi - \arcsin \left(\frac{\Delta - h - x_0}{x_1} \right) - \arcsin \left(\frac{\Delta - x_0}{x_1} \right) \right].
\end{aligned}$$

Calculons maintenant le coefficient $b_1(x_0, x_1)$:

$$\begin{aligned}
b_1(x_0, x_1) &= \frac{2}{T} \int_0^T w(t) \sin \omega t dt, \\
&= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} M \sin \omega t dt, \\
&= \frac{2M}{\omega T} (-\cos \omega t_2 + \cos \omega t_1), \\
&= \frac{M}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta - h - x_0}{x_1} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta - x_0}{x_1} \right)^2} \right].
\end{aligned}$$

Calculons enfin le coefficient $a_1(x_0, x_1)$:

$$\begin{aligned}
a_1(x_0, x_1) &= \frac{2}{T} \int_0^T w(t) \cos \omega t dt, \\
&= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} M \cos \omega t dt, \\
&= \frac{2M}{\omega T} (\sin \omega t_2 - \sin \omega t_1), \\
&= \frac{M}{\pi} \left(\frac{\Delta - h - x_0}{x_1} - \frac{\Delta - x_0}{x_1} \right), \\
&= -\frac{Mh}{\pi x_1}.
\end{aligned}$$

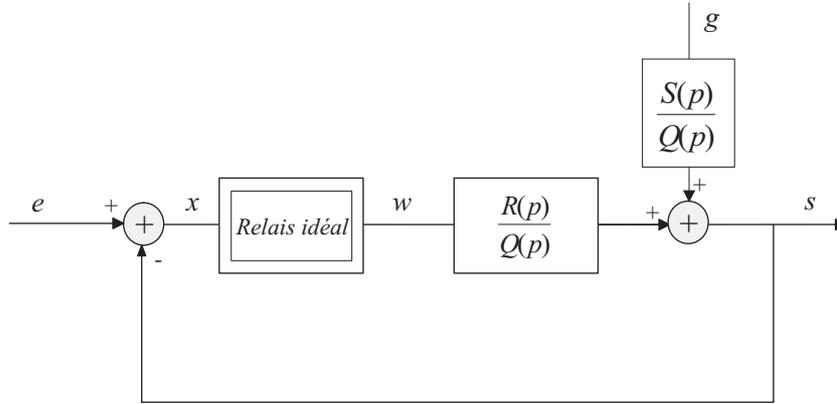


FIG. 2.23 – Asservissement avec perturbation.

2.6.4 Principe de détermination des auto-oscillations

Les perturbations lentes sont modélisées par un signal g à très basse fréquence, filtré par $S(p)/Q(p)$ ³. Le modèle est représenté à la figure 2.23.

On peut donc écrire les relations :

$$\begin{cases} x = e - s, \\ w = \phi(x), \\ s = \frac{R(p)}{Q(p)}w + \frac{S(p)}{Q(p)}g, \end{cases} \quad (2.84)$$

qui donnent :

$$Q(p)x + R(p)\phi(x) = Q(p)e - S(p)g. \quad (2.85)$$

Pour tenir compte de la composante continue, on pose :

$$x = x_0 + x^*, \quad (2.86)$$

où x_0 est le terme continu ou à variation lente, et x^* est le terme harmonique de la forme $x^* = x_1 \sin \omega t$. De plus, sous l'hypothèse du premier harmonique, la sortie de l'élément non linéaire s'écrit :

$$\phi(x) = w_0(x_0, x_1) + N(x_0, x_1)x^*. \quad (2.87)$$

Avec ces notations, l'équation générale de l'asservissement s'écrit :

$$Q(p)(x_0 + x^*) + R(p)\left(w_0(x_0, x_1) + N(x_0, x_1)x^*\right) = Q(p)e - S(p)g. \quad (2.88)$$

³On peut toujours mettre ce filtre sous cette forme, avec le dénominateur $Q(p)$ commun à la partie linéaire $L(p) = R(p)/Q(p)$

Elle peut alors être décomposée en deux équations, l'une correspondant aux termes continus (c'est-à-dire pour $p = j\omega = 0$), l'autre aux termes harmoniques ($p \neq 0$) :

$$\begin{cases} Q(0)x_0 + R(0)w_0(x_0, x_1) &= Q(0)e - S(0)g, \\ Q(p)x^* + R(p)N(x_0, x_1)x^* &= 0, \end{cases} \quad (2.89)$$

car e et g , à variations très lentes, n'ont pas de composante harmonique. On remarque que ces deux équations dépendent des 3 variables x_0 , x_1 et ω . La première équation décrit les variations lentes de x_0 et w_0 en fonction de e et g ; la seconde décrit les auto-oscillations (x_1, ω) autour de x_0 .

En regroupant les termes réels et les termes imaginaires, on peut écrire la seconde équation sous la forme $X(x_0, x_1, \omega) + jY(x_0, x_1, \omega) = 0$, ce qui revient à résoudre le système de deux équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} X(x_0, x_1, \omega) &= 0, \\ Y(x_0, x_1, \omega) &= 0. \end{cases} \quad (2.90)$$

En résolvant, on peut exprimer deux des variables en fonction de la troisième, par exemple :

$$\begin{cases} x_1 &= x_1(x_0), \\ \omega &= \omega(x_0). \end{cases} \quad (2.91)$$

En reportant dans l'expression de $w_0(x_0, x_1)$ on obtient une fonction ne dépendant plus que de la variable x_0 , que nous noterons $w_0(x_0, x_1) = F(x_0)$. La première équation peut alors s'écrire :

$$Q(0)x_0 + R(0)F(x_0) = Q(0)e - S(0)g, \quad (2.92)$$

qui ne dépend plus que de la variable x_0 . Après résolution, on obtient donc les solutions sous la forme de triplets (x_0, x_1, ω) .

2.6.5 Exemple d'un asservissement à relais avec perturbation lente

Reprenons l'exemple du paragraphe 2.5.4 dans lequel nous ajoutons une perturbation continue constante $g(t) = g_0 = \text{cte}$ filtrée par $1/(p(1 + T_2p))$ (Figure 2.24). L'entrée est une rampe $e(t) = e_0t$, où e_0 est une constante.

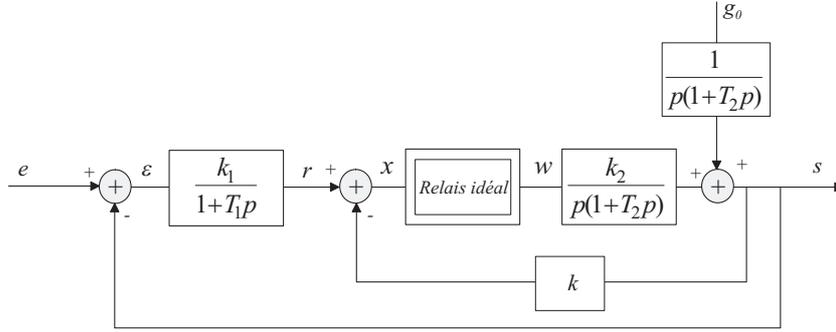


FIG. 2.24 – Exemple d’asservissement avec perturbation.

Equations

Ecrivons le système d’équations qui décrit l’asservissement :

$$\begin{cases} \epsilon = e - s, \\ (1 + T_1 p)r = k_1 \epsilon, \\ x = r - ks \\ w = \phi(x), \\ p(1 + T_2 p)s = k_2 w + g_0. \end{cases} \quad (2.93)$$

Des deux premières équations de (2.93), on élimine ϵ :

$$r = \frac{k_1(e - s)}{1 + T_1 p}, \quad (2.94)$$

et de la dernière, on tire :

$$s = \frac{k_2 w + g_0}{p(1 + T_2 p)}. \quad (2.95)$$

En reportant dans la troisième équation, on peut éliminer r et s et exprimer x uniquement en fonction de e et de g_0 :

$$x = \frac{k_1 e}{1 + T_1 p} - \left(k + \frac{k_1}{1 + T_1 p}\right) \frac{k_2 w + g_0}{p(1 + T_2 p)}, \quad (2.96)$$

que l’on met sous la forme :

$$p(1 + T_2 p)(1 + T_1 p)x + k_2(k + k_1 + kT_1 p)w = k_1 p(1 + T_2 p)e - (k + k_1 + kT_1 p)g_0. \quad (2.97)$$

La rampe d'entrée $e(t) = e_0 t$ vérifie $pe = e_0 = \text{cte}$. Ainsi, en posant $x = x_0 + x^*$, $w = w_0(x_0, x_1) + N(x_0, x_1)x^*$, on décompose l'équation (2.97) en deux équations, l'une correspondant aux termes continus ($p = 0$) et l'autre aux termes harmoniques ($p \neq 0$) :

$$\begin{cases} k_2(k + k_1)w_0(x_0, x_1) - k_1e_0 + (k + k_1)(k_2g_0) = 0, \\ p(1 + T_2p)(1 + T_1p)x^* + k_2(k + k_1 + kT_1p)N(x_0, x_1)x^* = 0. \end{cases} \quad (2.98)$$

Solutions

En posant $p = j\omega$, la seconde équation du système (2.99) peut se mettre sous la forme complexe $X(x_0, x_1, \omega) + jY(x_0, x_1, \omega) = 0$, et est équivalente au système :

$$\begin{cases} X(x_0, x_1, \omega) = -(T_1 + T_2)\omega^2 + k_2N(x_0, x_1)(k + k_1) = 0, \\ Y(x_0, x_1, \omega) = -T_1T_2\omega^3 + (1 + k_2T_1N(x_0, x_1))\omega = 0. \end{cases} \quad (2.99)$$

En éliminant les termes en ω , on tire :

$$N(x_0, x_1) = \frac{T_1 + T_2}{k_2T_1(k_1T_2 - kT_1)}. \quad (2.100)$$

De plus, le calcul du gain complexe équivalent du relais idéal en présence du terme continue x_0 est égal à :

$$N(x_0, x_1) = \frac{4M}{\pi x_1} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x_1} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.101)$$

En reportant dans l'équation précédente, on a alors l'équation :

$$\frac{4M}{\pi x_1} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x_1} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{T_1 + T_2}{k_2T_1(k_1T_2 - kT_1)}, \quad (2.102)$$

qui ne fait intervenir que x_0 et x_1 . On peut donc calculer la solution $x_1(x_0)$. Pour cela, posons :

$$\bar{x}_1 = \frac{4Mk_2T_1(k_1T_2 - kT_1)}{\pi(T_1 + T_2)}, \quad (2.103)$$

(\bar{x}_1 correspond à la solution pour $x_0 = 0$), l'équation (2.102) s'écrit :

$$\left[1 - \left(\frac{x_0}{x_1} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{x_1}{\bar{x}_1}. \quad (2.104)$$

En élevant au carré et en développant, on a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_1}\right)^2 &= 1 \\ \left(\frac{x_1}{x_1}\right)^4 - \left(\frac{x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^2 &= 0.\end{aligned}\quad (2.105)$$

En posant $(x_1/\bar{x}_1)^2 = U$ et $(x_0/\bar{x}_1)^2 = C > 0$, on a l'équation bicarrée :

$$U^2 - U + C = 0, \quad (2.106)$$

dont les solutions réelles sont :

$$U = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4C}}{2}, \quad (2.107)$$

pourvu que le discriminant soit positif : $\Delta = 1 - 4C > 0$, ou de façon équivalente $|x_0/\bar{x}_1| < 1/2$.

On utilise maintenant le calcul de la valeur moyenne :

$$w_0(x_0, x_1) = \frac{2M}{\pi} \arcsin\left(\frac{x_0}{x_1}\right), \quad (2.108)$$

dans laquelle on doit éliminer la valeur de x_1 à partir du résultat précédent.

Pour que le relais change d'état, il faut que $x_1 > |x_0|$. En utilisant l'équation (2.105), posons alors $\sin(\beta/2) = x_0/x_1$ et $\cos(\beta/2) = x_1/\bar{x}_1$. En effet, l'identité $\sin^2(\beta/2) + \cos^2(\beta/2) = 1$ est identique à l'équation (2.105) :

$$\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_1}\right)^2 = 1. \quad (2.109)$$

Calculons alors $\sin \beta$:

$$\begin{aligned}\sin \beta &= 2 \sin(\beta/2) \cos(\beta/2) \\ &= 2 \frac{x_0}{x_1} \frac{x_1}{\bar{x}_1}, \\ &= \frac{2x_0}{\bar{x}_1}.\end{aligned}\quad (2.110)$$

En reportant dans l'expression de $w_0(x_0, x_1)$ (2.108), on trouve :

$$\begin{aligned}w_0(x_0, x_1) &= \frac{2M}{\pi} \arcsin(\sin(\beta/2)), \\ &= \frac{M}{\pi} \beta, \\ &= \frac{M}{\pi} \arcsin(\sin \beta), \\ &= \frac{M}{\pi} \arcsin\left(\frac{2x_0}{\bar{x}_1}\right).\end{aligned}\quad (2.111)$$

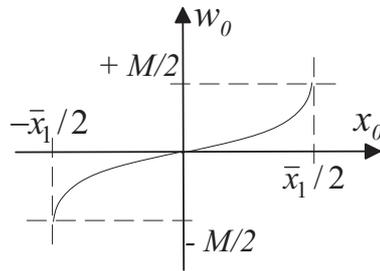


FIG. 2.25 – Valeur moyenne w_0 en fonction de la perturbation continue x_0 .

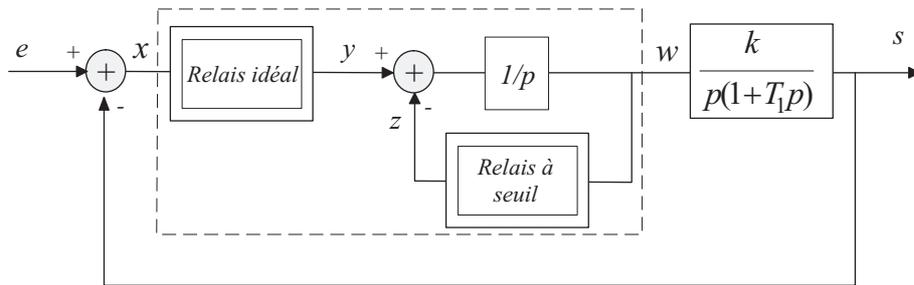


FIG. 2.26 – Asservissement à deux non linéarités.

Cette formule est valable pour $|x_0| \leq \bar{x}_1/2$. Pour $|x_0| > \bar{x}_1/2$ (discriminant de l'équation bicarrée négatif), le relais ne peut pas changer d'état et il n'y a plus d'auto-oscillations. L'allure de la fonction $w_0(x_0, x_1)$ est donnée à la figure 2.25.

2.7 Asservissement à plusieurs non linéarités

Il n'y a pas de méthode générale pour étudier les systèmes à plusieurs non linéarités. L'idée consiste à essayer de fusionner les éléments non linéaires afin de se ramener à un système canonique. Nous allons illustrer cette idée sur un exemple.

2.7.1 Système étudié

Considérons l'asservissement de la figure 2.26 qui possède deux éléments non linéaires dont les caractéristiques sont précisées à la figure 2.27. Les valeurs de commutation du relais idéal sont $\pm M$. Le relais à seuil commute de 0 vers $\pm M$ lorsque l'entrée atteint $\pm \Delta/2$.

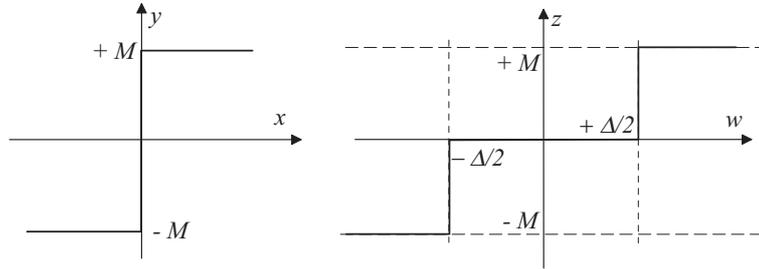


FIG. 2.27 – Caractéristiques des deux relais du système 2.26.

2.7.2 Non linéarité équivalente

On se place sous l'hypothèse du premier harmonique⁴, c'est-à-dire que l'excitation x est supposée de la forme $x(t) = x_1 \sin \omega t$. L'objectif est de trouver la non-linéarité équivalente au bloc entouré en pointillé.

La sortie y du relais idéal est donc un signal carré dont les commutations se font au passage par zéro de x .

Devant l'intégrateur, on a alors $y - z = y$ si $z = 0$, c'est-à-dire tant que $|w(t)| < \Delta/2$. La sortie w vaut alors :

$$w(t) = \int y(t) dt = \pm Mt + \text{cte}, \quad (2.112)$$

le signe dépendant de la sortie y du relais idéal.

Lorsque $|w(t)| = \Delta/2$, la sortie z du relais à seuil passe à $\pm M$. De façon plus précise,

- si le relais idéal est à $y = +M$, la sortie de l'intégrateur vaut $w(t) = +Mt + \text{cte}$ jusqu'à $w(t) = +\Delta/2$ qui entraîne la commutation $z = +M$. L'entrée de l'intégrateur vaut alors $y - z = 0$ si bien que la sortie de l'intégrateur w reste constante : $w(t) = +\Delta/2$, jusqu'au changement d'état du relais idéal. Lorsque celui-ci commute à $-M$, l'entrée de l'intégrateur vaut (pendant un très bref instant) $y - z = -M - M = -2M$, la sortie de l'intégrateur diminue et z commute vers 0 et entraîne $y - z = -M$.

⁴La partie linéaire se comporte comme un filtre passe-bas d'ordre 2 : la condition de filtrage est satisfaite

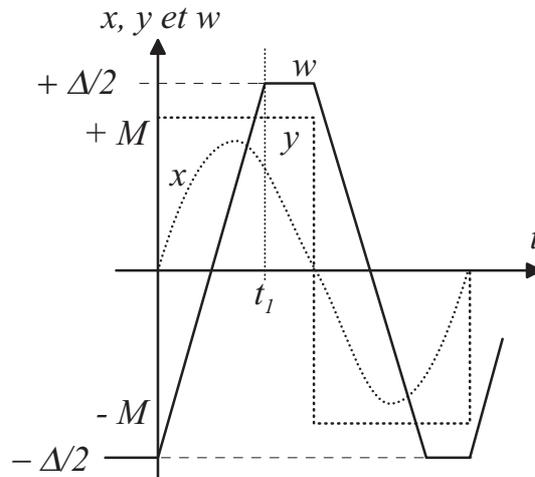


FIG. 2.28 – Caractéristique équivalente $w(t)$ (trait plein) des deux relais et de l'intégrateur du système 2.26. L'excitation $x(t)$ est en pointillé, la sortie y du relais est en tirets.

- si le relais idéal est à $y = -M$, la sortie de l'intégrateur vaut $w(t) = -Mt + \text{cte}$ jusqu'à $w(t) = -\Delta/2$ qui entraîne la commutation $z = -M$. L'entrée de l'intégrateur vaut alors (pendant un très bref instant) $y - z = 0$ si bien que la sortie de l'intégrateur w reste constante : $w(t) = -\Delta/2$, jusqu'au changement d'état du relais idéal. Lorsque celui-ci commute à $+M$, l'entrée de l'intégrateur vaut $y - z = +M - (-M) = +2M$, la sortie de l'intégrateur augmente et z commute vers 0 entraînant $y - z = +M$.

On remarque qu'en raison de l'intégrateur, le signal $w(t)$ dépend de la pulsation ω de l'excitation. De plus, on voit facilement que $w(t)$ est déphasé par rapport à $x(t)$. Le gain complexe équivalent est donc complexe et de la forme $N(x_1, \omega)$.

2.7.3 Calcul du gain complexe équivalent

En raison de la symétrie, la valeur moyenne de $w(t)$ est nulle. Calculons les termes b_1 et a_1 .

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(\omega t) w(t) dt,$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \sin(\omega t) w(t) dt, \\
&= \frac{4}{T} \left[\int_0^{t_1} \sin(\omega t) (Mt - \Delta/2) dt + \int_{t_1}^{T/2} \sin(\omega t) (\Delta/2) dt \right], \\
&= \frac{4}{T} \left[M \int_0^{t_1} t \sin(\omega t) dt - (\Delta/2) \int_0^{t_1} \sin(\omega t) dt + (\Delta/2) \int_{t_1}^{T/2} \sin(\omega t) dt \right], \\
&= \frac{4}{T} \left[\frac{M}{\omega} \left[-t \cos \omega t \right]_0^{t_1} + \frac{M}{\omega} \int_0^{t_1} \cos(\omega t) dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Delta}{2\omega} \left[\cos \omega t \right]_0^{t_1} - \frac{\Delta}{2\omega} \left[\cos \omega t \right]_{t_1}^{T/2} \right], \\
&= \frac{4}{T} \left[-\frac{M}{\omega} t_1 \cos \omega t_1 + \frac{M}{\omega^2} \sin \omega t_1 + \frac{\Delta}{\omega} \cos \omega t_1 \right], \\
&= \frac{4}{T} \frac{M}{\omega^2} \sin \omega t_1, \\
&= \frac{2M}{\pi \omega} \sin \omega t_1. \tag{2.113}
\end{aligned}$$

Dans la suite, on posera $\sin \omega t_1 = \sin(2\alpha)$, et on utilisera :

$$b_1 = \frac{2M}{\pi \omega} \sin 2\alpha. \tag{2.114}$$

De façon similaire, on calcule a_1 :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos(\omega t) w(t) dt, \\
&= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \cos(\omega t) w(t) dt, \\
&= \frac{4}{T} \left[\int_0^{t_1} \cos(\omega t) (Mt - \Delta/2) dt + \int_{t_1}^{T/2} \cos(\omega t) (\Delta/2) dt \right], \\
&= \frac{4}{T} \left[M \int_0^{T/2} t \cos(\omega t) dt - (\Delta/2) \int_0^{t_1} \cos(\omega t) dt + (\Delta/2) \int_{t_1}^{T/2} \cos(\omega t) dt \right], \\
&= \frac{4}{T} \left[\frac{M}{\omega} \left[t \sin \omega t \right]_0^{t_1} - \frac{M}{\omega} \int_0^{t_1} \sin(\omega t) dt \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Delta}{2\omega} \left[\sin \omega t \right]_0^{t_1} + \frac{\Delta}{2\omega} \left[\sin \omega t \right]_{t_1}^{T/2} \right], \\
&= \frac{4}{T} \left[\frac{M}{\omega} t_1 \sin \omega t_1 + \frac{M}{\omega^2} (\cos \omega t_1 - 1) - \frac{\Delta}{\omega} \sin \omega t_1 \right]. \tag{2.115}
\end{aligned}$$

En remarquant qu'au temps t_1 , on a $w(t_1) = \Delta/2 = Mt_1 - \Delta/2$, c'est-à-dire $t_1 = \Delta/M$, on peut simplifier la dernière relation :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{4M}{T\omega^2}(\cos \omega t_1 - 1), \\
&= \frac{2M}{\pi\omega}(\cos 2\alpha - 1), \\
&= -\frac{4M}{\pi\omega} \sin^2 \alpha.
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Le gain complexe équivalent du bloc pointillé s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
N(x_1, \omega) &= \frac{b_1 + ja_1}{x_1}, \\
&= \frac{2M}{\pi\omega x_1}(\sin 2\alpha - 2j \sin^2 \alpha).
\end{aligned} \tag{2.117}$$

2.7.4 Détermination des auto-oscillations

Les auto-oscillations sont les couples (x_1, ω) satisfaisant l'équation $L(j\omega) = -1/N(x_1, \omega)$:

$$\frac{k}{j\omega(1 + jT_1\omega)} = -\frac{\pi\omega x_1}{2M(\sin 2\alpha - 2j \sin^2 \alpha)}. \tag{2.118}$$

Or $\alpha = \omega t_1/2 = \omega\Delta/2M$, on arrive à l'équation complexe :

$$\begin{aligned}
2kM(\sin 2\alpha - 2j \sin^2 \alpha) + \frac{2\pi M\alpha x_1}{\Delta}(j\omega - T_1\omega^2) &= 0 \\
\left(\sin 2\alpha - \alpha x_1 \omega^2 \frac{\pi T_1}{k\Delta}\right) + j\left(\alpha x_1 \omega \frac{\pi}{k\Delta} - 2 \sin^2 \alpha\right) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.119}$$

qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = \alpha x_1 \omega^2 \frac{\pi T_1}{k\Delta} \\ 2 \sin^2 \alpha = \alpha x_1 \omega \frac{\pi}{k\Delta}. \end{cases} \tag{2.120}$$

En utilisant $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, on a :

$$\begin{cases} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \alpha x_1 \omega^2 \frac{\pi T_1}{k\Delta} \\ 2 \sin^2 \alpha = \alpha x_1 \omega \frac{\pi}{k\Delta}, \end{cases} \tag{2.121}$$

puis en divisant la seconde équation par la première :

$$\tan \alpha = \frac{\Delta}{\alpha 2MT_1}. \tag{2.122}$$

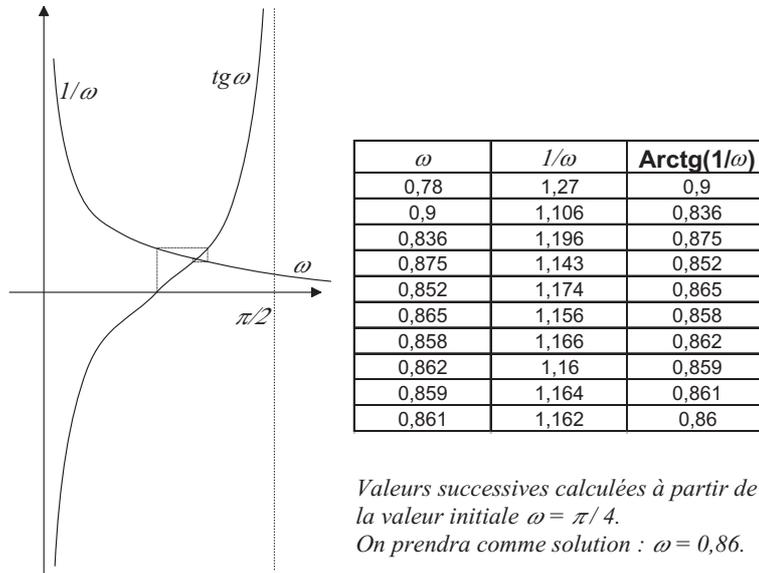


FIG. 2.29 – Résolution itérative de l'équation $\tan \omega = 1/\omega$.

Cette équation peut être résolue graphiquement ou itérativement (Fig. 2.29). Avec les valeurs numériques $T_1 = 1s$, $k = 3,14$, $M = 1$ et $\Delta = 2$, l'équation (2.123) se réduit à :

$$\tan \omega = \frac{1}{\omega}, \quad (2.123)$$

dont la solution est $\omega = 0,86$ rd/s. On en déduit ensuite x_1 en reportant dans une des deux équations du système (2.121) :

$$x_1 = \frac{4 \sin^2 \omega}{\omega^2} = 3,11. \quad (2.124)$$

Il faudrait ensuite vérifier (ce que l'on admettra) que cette auto-oscillation est stable.

2.8 Conclusions sur la méthode du premier harmonique

La méthode du premier harmonique est une méthode applicable à la condition que les parties non linéaire et linéaire de l'asservissement soient

séparables et que la partie linéaire se comporte comme un filtre passe-bas.

C'est une méthode approchée, puisqu'elle néglige les termes harmoniques d'ordre supérieur à 1, mais elle est malgré tout précise si ces conditions sont vérifiées.

Chapitre 3

Méthode du plan de phase

3.1 Introduction

La méthode du plan de phase est un cas particulier de la méthode de l'espace de phase, dans le cas où l'espace est de dimension 2. Cette méthode s'applique de façon très générale à tout système décrit par un ensemble d'équations différentielle. En revanche, il n'existe pas toujours de solutions analytiques aux trajectoires calculées dans l'espace des phase. Cette méthode, connue depuis longtemps, connaît un regain d'intérêt lié aux performances des calculateurs actuels qui rendent possible le calcul des trajectoires solutions par intégration numérique. Dans le cadre des systèmes asservis non linéaires, cette méthode est exacte et ne suppose pas de condition particulière, contrairement à la méthode du premier harmonique.

Ce chapitre est organisée en deux parties principales. La première présente les fondements mathématiques. La seconde partie propose une étude approfondie dans le cas d'asservissements à relais.

3.2 Fondements mathématiques

3.2.1 Principe général

On considère un système physique décrit par le système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (3.1)$$

avec n conditions initiales $x_i(0) = x_{i0}$.

L'espace de dimension n rapporté aux variables x_i est appelé espace de phase. Dans cet espace, les conditions initiales correspondent à un point M_0 , et la solution pour $t > 0$ est de la forme $M(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$: c'est une trajectoire dans l'espace de phase.

La détermination de cette trajectoire est une méthode rigoureuse d'étude de systèmes non linéaires. Elle est particulièrement simple à mettre en oeuvre lorsqu'il s'agit d'asservissements non linéaires décrits par des équations différentielles non linéaires d'ordre 2 : dans ce cas, l'espace des phase se réduit à un espace de dimension 2 : le plan de phase.

Les fonctions $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont en général non linéaires et le calcul analytique de $M(t)$ est souvent impossible. Cependant, les calculateurs actuels permettent de résoudre ces équations par intégration numérique. Dans la suite, on restreindra l'étude au cas $n = 2$.

3.2.2 Points singuliers

On considère dans cette partie un système physique, par exemple un système asservi, décrit par un système différentiel de forme canonique :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = X_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2(t) = X_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans le plan de phase l'équation des trajectoires est la solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2(x_1, x_2)}{X_1(x_1, x_2)}, \quad (3.3)$$

avec deux conditions initiales.

Définition de point singulier

L'équation (3.3) précise de façon unique la tangente en chaque point de la trajectoire, sauf aux points singuliers. D'où la définition :

Définition 3.2.1 *Etant donné le système canonique (3.2), (x_{10}, x_{20}) est un point singulier si*

$$\begin{cases} X_1(x_{10}, x_{20}) = 0, \\ X_2(x_{10}, x_{20}) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

En effet, en un tel point, le rapport $\frac{dx_2}{dx_1}$ n'est pas défini.

On montre l'unicité de la tangente dans un domaine (\mathcal{D}) si :

- $X_1(x_1, x_2)$ et $X_2(x_1, x_2)$ sont uniformes, bornées et continues dans (\mathcal{D}),
- leurs dérivées partielles sont bornées dans ce domaine sauf aux points singuliers (conditions de Lipschitz¹).

Les points singuliers sont des positions d'équilibre du système. En effet,

$$\begin{cases} X_1(x_1, x_2) = \dot{x}_1(t) = 0 \implies \text{la vitesse de } x_1 \text{ est nulle} \\ X_2(x_1, x_2) = \dot{x}_2(t) = 0 \implies \text{la vitesse de } x_2 \text{ est nulle.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Ce point singulier sera stable si toutes les trajectoires de phase concourent vers ce point, instable dans le cas contraire, c'est-à-dire si certaines (il en suffit d'une) trajectoires s'en écartent.

3.2.3 Cas d'une équation différentielle d'ordre 2

Soit un système décrit par une équation différentielle d'ordre 2, de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A(x)\frac{dx}{dt} + B(x)x = F(x). \quad (3.6)$$

Il est facile de montrer que cette équation se met sous la forme canonique (3.2). En effet, posons $y = dx/dt$, l'équation (3.7) devient :

$$\frac{dy}{dt} + A(x)y + B(x)x = F(x). \quad (3.7)$$

L'équation est donc équivalente au système canonique :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -A(x)y - B(x)x + F(x). \end{cases} \quad (3.8)$$

Dans ce cas, le plan de phase est le plan de coordonnées (x, y) avec $y = dx/dt$.

3.2.4 Stabilité en un point singulier

Soit (x_{10}, x_{20}) un point singulier. Nous choisissons ce point singulier comme nouvelle origine du plan. On peut alors écrire :

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + \tilde{x}_1 \\ x_2 = x_{20} + \tilde{x}_2. \end{cases} \quad (3.9)$$

¹Rudolf Lipschitz : mathématicien allemand 1832 – 1903

De plus, nous supposons que $X_1(x_1, x_2)$ et $X_2(x_1, x_2)$ sont continuellement dérivables au voisinage du point singulier. Sous cette hypothèse, on peut linéariser le système canonique au voisinage du point singulier, en faisant un développement au premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{d(x_{10} + \tilde{x}_1(t))}{dt} &= X_1(x_{10}, x_{20}) + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \tilde{x}_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \tilde{x}_2 + O(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \\ \frac{d(x_{20} + \tilde{x}_2(t))}{dt} &= X_2(x_{10}, x_{20}) + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \tilde{x}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \tilde{x}_2 + O(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2). \end{cases} \quad (3.10)$$

Puisque (x_{10}, x_{20}) est un point singulier, $X_1(x_{10}, x_{20}) = X_2(x_{10}, x_{20}) = 0$. De plus, x_{10} et x_{20} étant des constantes, on a $d(x_{10} + \tilde{x}_1(t))/dt = d\tilde{x}_1(t)/dt$ et $d(x_{20} + \tilde{x}_2(t))/dt = d\tilde{x}_2(t)/dt$. A partir de ces remarques et en négligeant les termes d'ordre supérieur, le système ci-dessus se simplifie :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_1(t)}{dt} &= \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \tilde{x}_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \tilde{x}_2 \\ \frac{d\tilde{x}_2(t)}{dt} &= \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \tilde{x}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \tilde{x}_2. \end{cases} \quad (3.11)$$

En notant $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$ et en introduisant la matrice Jacobienne \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

on peut mettre l'équation (3.11) sous forme vectorielle :

$$\frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} = \mathbf{J}\tilde{\mathbf{X}}. \quad (3.13)$$

Le système (3.13) est un système différentiel linéaire à coefficients constant qui décrit le comportement du système au voisinage du point singulier (x_{10}, x_{20}) .

3.2.5 Rappel sur la résolution d'un système différentiel linéaire

Rappelons brièvement la méthode de résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients constants, de la forme :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{X}, \quad (3.14)$$

où \mathbf{M} est une matrice carrée.

On cherche des solutions de la forme :

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Lambda} \exp(\lambda t), \quad (3.15)$$

où $\mathbf{\Lambda}$ et λ sont respectivement un vecteur et un scalaire à déterminer. Avec cette forme de solution, on déduit :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \lambda\mathbf{\Lambda} \exp(\lambda t). \quad (3.16)$$

En reportant dans le système (3.14), cette solution doit satisfaire ($\forall t$) la relation :

$$\lambda\mathbf{\Lambda} \exp(\lambda t) = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda} \exp(\lambda t), \quad (3.17)$$

c'est-à-dire :

$$(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{\Lambda} = 0, \quad (3.18)$$

où \mathbf{I} représente la matrice identité. Cette équation a une solution non triviale (différente de $\mathbf{\Lambda} = 0$) si et seulement si $\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Les solutions $\mathbf{\Lambda}$ et λ sont donc les vecteurs et valeurs propres de la matrice \mathbf{M} .

Pour les calculer, déterminons d'abord λ à partir de l'équation caractéristique (développée ici dans le cas où \mathbf{M} est de dimension 2) :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \\ \begin{vmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (m_{11} - \lambda)(m_{22} - \lambda) - m_{12}m_{21} &= 0 \\ \lambda^2 - (m_{11} + m_{22})\lambda + (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Cette équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels possède 2 solutions dans \mathbb{C} , que nous noterons λ_1 et λ_2 . En reportant chacune de ces valeurs λ_i dans l'équation (3.18), on calcule les vecteurs propres $\mathbf{\Lambda}_i$ associés, solutions de :

$$(\mathbf{M} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{\Lambda} = 0. \quad (3.20)$$

Les solutions du système sont alors de la forme :

$$\mathbf{X}(t) = C_1\mathbf{\Lambda}_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2\mathbf{\Lambda}_2 \exp(\lambda_2 t), \quad (3.21)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires.

3.2.6 Nature des points singuliers

En résolvant le système différentiel (3.13), dont les solutions sont les valeurs et vecteurs propres de la matrice Jacobienne \mathbf{J} , on trouve donc la solution :

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = C_1\mathbf{\Lambda}_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2\mathbf{\Lambda}_2 \exp(\lambda_2 t), \quad (3.22)$$

qui décrit les trajectoires solutions au voisinage du point singulier. Pour que le point singulier soit stable, il faut qu'asymptotiquement, c'est-à-dire pour $t \rightarrow +\infty$, toute trajectoire revienne au point initial, c'est-à-dire $\tilde{\mathbf{X}}(t) \rightarrow 0$. Cette condition est vérifiée si et seulement si les valeurs propres λ_1 et λ_2 ont des parties réelles négatives. L'étude des valeurs propres permet ainsi de caractériser l'allure générale des trajectoires autour d'un point singulier.

Les valeurs propres sont réelles et négatives

On suppose pour la discussion que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. On sait que toutes les trajectoires convergent vers le point : le point singulier est un point d'équilibre stable du système.

Pour étudier de façon plus précise l'allure des trajectoires, supposons que l'on choisisse la trajectoire telle que $C_2 = 0$:

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = C_1 \mathbf{\Lambda}_1 \exp(\lambda_1 t), \quad (3.23)$$

que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= C_1 (\mathbf{\Lambda}_1)_1 \exp(\lambda_1 t), \\ \tilde{x}_2(t) &= C_1 (\mathbf{\Lambda}_1)_2 \exp(\lambda_1 t), \end{aligned} \quad (3.24)$$

où $(\mathbf{\Lambda}_j)_i$ est la composante i du vecteur propre $\mathbf{\Lambda}_j$. Dans le plan de phase, la trajectoire est portée par la droite

$$\tilde{x}_2 = \frac{(\mathbf{\Lambda}_1)_2}{(\mathbf{\Lambda}_1)_1} \tilde{x}_1, \quad (3.25)$$

et converge vers le point singulier lorsque t croît.

Avec un calcul similaire, pour la condition $C_1 = 0$, on trouve que la trajectoire est portée par la droite :

$$\tilde{x}_2 = \frac{(\mathbf{\Lambda}_2)_2}{(\mathbf{\Lambda}_2)_1} \tilde{x}_1, \quad (3.26)$$

et converge aussi vers le point singulier, lorsque t croît.

On remarque que ces deux droites sont colinéaires aux deux vecteurs propres $\mathbf{\Lambda}_1$ et $\mathbf{\Lambda}_2$.

Considérons maintenant une trajectoire quelconque (C_1 et C_2 sont différents de zéro). Initialement, c'est-à-dire pour $t \rightarrow -\infty$, on a $\exp(\lambda_1 t) \gg \exp(\lambda_2 t)$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t) &\sim C_1(\mathbf{\Lambda}_1)_1 \exp(\lambda_1 t), \\ \tilde{x}_2(t) &\sim C_1(\mathbf{\Lambda}_1)_2 \exp(\lambda_1 t),\end{aligned}\tag{3.27}$$

c'est-à-dire que les trajectoires partent de la direction asymptotique du vecteur propre $\mathbf{\Lambda}_1$:

$$\tilde{x}_2 = \frac{(\mathbf{\Lambda}_1)_2}{(\mathbf{\Lambda}_1)_1} \tilde{x}_1.\tag{3.28}$$

Avec un raisonnement similaire, pour $t \rightarrow +\infty$, on a $\exp(\lambda_2 t) \gg \exp(\lambda_1 t)$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t) &\sim C_2(\mathbf{\Lambda}_2)_1 \exp(\lambda_2 t), \\ \tilde{x}_2(t) &\sim C_2(\mathbf{\Lambda}_2)_2 \exp(\lambda_2 t),\end{aligned}\tag{3.29}$$

c'est-à-dire que les trajectoires tendent vers la direction asymptotique du vecteur propre $\mathbf{\Lambda}_2$ lorsque $t \rightarrow +\infty$:

$$\tilde{x}_2 = \frac{(\mathbf{\Lambda}_2)_2}{(\mathbf{\Lambda}_2)_1} \tilde{x}_1.\tag{3.30}$$

Un tel point est appelé un noeud stable. L'allure des trajectoires en un tel point est indiquée à la figure 3.1.

Les valeurs propres sont réelles et positives

On suppose pour la discussion que $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. On sait que toutes les trajectoires divergent : le point singulier est un point d'équilibre instable du système.

Pour étudier de façon plus précise l'allure des trajectoires, considérons la trajectoire telle que $C_2 = 0$:

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = C_1 \mathbf{\Lambda}_1 \exp(\lambda_1 t),\tag{3.31}$$

que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t) &= C_1(\mathbf{\Lambda}_1)_1 \exp(\lambda_1 t), \\ \tilde{x}_2(t) &= C_1(\mathbf{\Lambda}_1)_2 \exp(\lambda_1 t),\end{aligned}\tag{3.32}$$

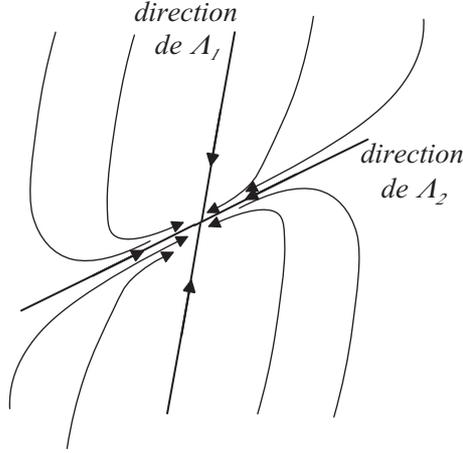


FIG. 3.1 – Toutes les trajectoires d'un noeud stable concourent vers le point singulier.

où $(\mathbf{\Lambda}_j)_i$ est la composante i du vecteur propre $\mathbf{\Lambda}_j$. Dans le plan de phase, la trajectoire est portée par la droite

$$\tilde{x}_2 = \frac{(\mathbf{\Lambda}_1)_2}{(\mathbf{\Lambda}_1)_1} \tilde{x}_1, \quad (3.33)$$

et s'éloigne du point singulier lorsque t croît.

Avec un calcul similaire, pour la condition $C_1 = 0$, on trouve que la trajectoire est portée par la droite :

$$\tilde{x}_2 = \frac{(\mathbf{\Lambda}_2)_2}{(\mathbf{\Lambda}_2)_1} \tilde{x}_1, \quad (3.34)$$

et s'éloigne aussi du point singulier lorsque t croît.

Considérons maintenant une trajectoire quelconque (C_1 et C_2 sont différents de zéro). Initialement, c'est-à-dire pour $t \rightarrow -\infty$, on a $\exp(\lambda_2 t) \gg \exp(\lambda_1 t)$ et en négligeant les termes en $\exp(\lambda_1 t)$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &\sim C_2 (\mathbf{\Lambda}_2)_1 \exp(\lambda_2 t), \\ \tilde{x}_2(t) &\sim C_2 (\mathbf{\Lambda}_2)_2 \exp(\lambda_2 t), \end{aligned} \quad (3.35)$$

c'est-à-dire que les trajectoires partent de la direction asymptotique :

$$\tilde{x}_2 = \frac{(\mathbf{\Lambda}_2)_2}{(\mathbf{\Lambda}_2)_1} \tilde{x}_1. \quad (3.36)$$

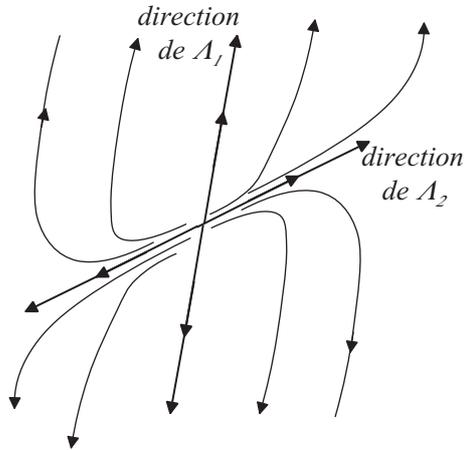


FIG. 3.2 – Les trajectoires d’un noeud instable s’éloignent du point singulier.

Avec un raisonnement similaire, pour $t \rightarrow +\infty$, on a $\exp(\lambda_1 t) \gg \exp(\lambda_2 t)$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t) &\sim C_1(\mathbf{\Lambda}_1)_1 \exp(\lambda_1 t), \\ \tilde{x}_2(t) &\sim C_1(\mathbf{\Lambda}_1)_2 \exp(\lambda_1 t),\end{aligned}\tag{3.37}$$

c’est-à-dire que les trajectoires suivent la direction asymptotique du vecteur propre $\mathbf{\Lambda}_1$ lorsque $t \rightarrow +\infty$:

$$\tilde{x}_2 = \frac{(\mathbf{\Lambda}_1)_2}{(\mathbf{\Lambda}_1)_1} \tilde{x}_1.\tag{3.38}$$

Un tel point est appelé noeud instable. L’allure des trajectoires en un tel point est indiquée à la figure 3.2.

Les valeurs propres sont réelles et de signes contraires

On suppose pour la discussion que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Puisqu’une des valeurs propres est positive, on sait que le point singulier est un point d’équilibre instable du système.

Pour étudier de façon plus précise l’allure des trajectoires, considérons la trajectoire telle que $C_2 = 0$:

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = C_1 \mathbf{\Lambda}_1 \exp(\lambda_1 t),\tag{3.39}$$

dont la trajectoire, portée par la droite :

$$\tilde{x}_2 = \frac{(\mathbf{\Lambda}_1)_2}{(\mathbf{\Lambda}_1)_1} \tilde{x}_1, \quad (3.40)$$

converge (car $\lambda_1 < 0$) vers le point singulier lorsque t croît.

De même, pour la condition $C_1 = 0$, on trouve que la trajectoire est portée par la droite :

$$\tilde{x}_2 = \frac{(\mathbf{\Lambda}_2)_2}{(\mathbf{\Lambda}_2)_1} \tilde{x}_1, \quad (3.41)$$

et s'éloigne (car $\lambda_2 > 0$) du point singulier lorsque t croît.

Considérons maintenant une trajectoire quelconque (C_1 et C_2 sont différents de zéro). Initialement, c'est-à-dire pour $t \rightarrow -\infty$, on a $\exp(\lambda_1 t) \gg \exp(\lambda_2 t)$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &\sim C_1 (\mathbf{\Lambda}_1)_1 \exp(\lambda_1 t), \\ \tilde{x}_2(t) &\sim C_1 (\mathbf{\Lambda}_1)_2 \exp(\lambda_1 t), \end{aligned} \quad (3.42)$$

c'est-à-dire que les trajectoires partent de la direction asymptotique :

$$\tilde{x}_2 = \frac{(\mathbf{\Lambda}_1)_2}{(\mathbf{\Lambda}_1)_1} \tilde{x}_1. \quad (3.43)$$

Avec un raisonnement similaire, pour $t \rightarrow +\infty$, on a $\exp(\lambda_2 t) \gg \exp(\lambda_1 t)$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &\sim C_2 (\mathbf{\Lambda}_2)_1 \exp(\lambda_2 t), \\ \tilde{x}_2(t) &\sim C_2 (\mathbf{\Lambda}_2)_2 \exp(\lambda_2 t), \end{aligned} \quad (3.44)$$

c'est-à-dire que les trajectoires suivent la direction asymptotique du vecteur $\mathbf{\Lambda}_2$ pour $t \rightarrow +\infty$:

$$\tilde{x}_2 = \frac{(\mathbf{\Lambda}_2)_2}{(\mathbf{\Lambda}_2)_1} \tilde{x}_1. \quad (3.45)$$

Un tel point (instable) est appelé col ou selle. L'allure des trajectoires est indiquée à la figure 3.3.

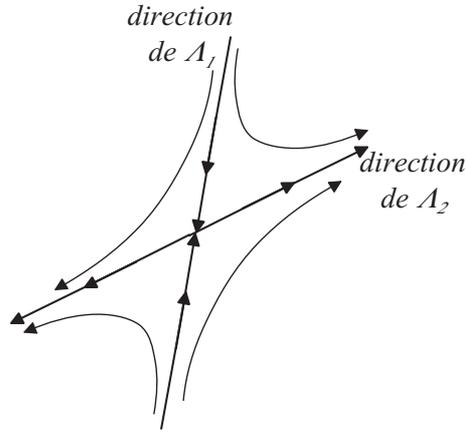


FIG. 3.3 – Les trajectoires d'un col s'éloignent du point singulier.

Les valeurs propres sont complexes

Les coefficients de l'équation caractéristique étant réels, les racines sont complexes conjuguées, c'est-à-dire de la forme $\lambda_1 = h + j\omega$ et $\lambda_2 = h - j\omega$. Les solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \exp ht \left[C_1(\mathbf{\Lambda}_1)_1 \exp(j\omega t) + C_2(\mathbf{\Lambda}_2)_1 \exp(-j\omega t) \right], \\ \tilde{x}_2(t) = \exp ht \left[C_1(\mathbf{\Lambda}_1)_2 \exp(j\omega t) + C_2(\mathbf{\Lambda}_2)_2 \exp(-j\omega t) \right]. \end{cases} \quad (3.46)$$

En posant $\exp(j\omega t) = \cos \omega t + j \sin \omega t$, ces équations deviennent :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \exp ht \left[C_{11} \cos \omega t + C_{12} \sin \omega t \right], \\ \tilde{x}_2(t) = \exp ht \left[C_{21} \cos \omega t + C_{22} \sin \omega t \right], \end{cases} \quad (3.47)$$

avec $C_{11} = C_1(\mathbf{\Lambda}_1)_1 + C_2(\mathbf{\Lambda}_2)_1$, $C_{12} = j(C_1(\mathbf{\Lambda}_1)_1 - C_2(\mathbf{\Lambda}_2)_1)$, $C_{21} = C_1(\mathbf{\Lambda}_1)_2 + C_2(\mathbf{\Lambda}_2)_2$ et $C_{22} = j(C_1(\mathbf{\Lambda}_1)_2 - C_2(\mathbf{\Lambda}_2)_2)$.

Pour $h < 0$, la trajectoire est une spirale dont le rayon décroît, c'est-à-dire tend vers 0 : la trajectoire converge vers le point singulier (Fig. 3.4.a). Le point singulier est alors un foyer stable.

Pour $h > 0$, la trajectoire est une spirale dont le rayon croît, c'est-à-dire tend vers $+\infty$: la trajectoire diverge du point singulier (Fig. 3.4.b). Le point singulier est alors un foyer instable.

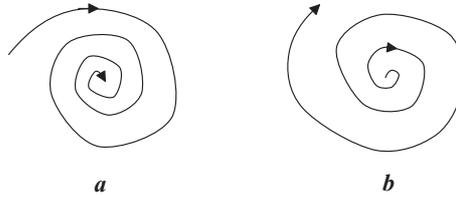


FIG. 3.4 – Les trajectoires au voisinage d'un foyer sont des spirales convergentes pour les foyers stables (a) ou divergentes pour les foyers instables (b).

Cas où $h = 0$

Dans ce cas, les trajectoires sont des ellipses centrées autour du point singulier. D'un point de vue physique, la valeur $h = 0$ signifie que le système est sans perte (système conservatif), ce qui n'est pas possible. En réalité, on se trouve dans un cas critique de Liapunov qui est dû au fait que l'approximation du premier ordre au voisinage du point singulier n'est pas suffisante. Il faudrait alors reprendre l'écriture des équations avec un développement à l'ordre 2.

Autres cas

D'autres cas particuliers (une valeur propre nulle, valeurs propres identiques, etc.) pourraient être étudiés, mais seront éludés dans ce cours. Ce sont notamment le cas où les deux valeurs propres sont identiques et celui où une des valeurs propres est nulle.

3.2.7 Segments singuliers

Si le système, $X_1 = 0$ et $X_2 = 0$, admet pour solution un segment ou un axe, ce lieu détermine une infinité de points singuliers qui sont des points d'équilibre, stables ou instables. Cette situation est tout à fait usuelle dans les systèmes asservis non linéaires, dès lors que la non-linéarité présente un seuil ou un jeu. Nous allons illustrer cette situation par un exemple de mécanique.

Le système et ses équations

On considère une masse M ancrée par des ressorts de raideur $k/2$. Cette masse peut se déplacer sur un seul axe, x . Elle glisse avec frottements secs

constants, de valeur f_0 , qui s'opposent au mouvement. En appliquant l'équation fondamentale de la dynamique, $\Sigma_i F_i = M\ddot{x}$, on a :

$$M\ddot{x} = -kx - \text{signe}(\dot{x})f_0, \quad (3.48)$$

où $\text{signe}(\dot{x}) = +1$ si $\dot{x} > 0$ et -1 dans le cas contraire. Pour qu'il y ait mouvement, il faut que la force de rappel des ressorts soit supérieure aux frottements, c'est-à-dire $|x| > f_0/k$. Pour des élongations inférieures, le mobile reste fixe : le système possède donc une infinité de position d'équilibre correspondant au segment $[-f_0/k, f_0/k]$. Ce segment est donc un segment singulier.

En posant $y = \dot{x}$ et $x = x$, on peut transformer cette équation différentielle d'ordre 2 en un système différentielle de deux équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{k}{M}x - \frac{f_0}{M}\text{signe}(y). \end{cases} \quad (3.49)$$

Ce système est non linéaire dans la mesure où la seconde équation diffère selon le signe de y .

Solutions

Pour $y > 0$, $\text{signe}(y) = +1$ et le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{k}{M}x - \frac{f_0}{M}. \end{cases} \quad (3.50)$$

Puisque $\dot{u} = du/dt$, en faisant le rapport des deux équations, on élimine dt et on a :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k}{M}\frac{x}{y} - \frac{f_0}{My}, \quad (3.51)$$

qui est une équation différentielle à variable séparable :

$$ydy + \frac{k}{M}\left(x + \frac{f_0}{k}\right)dx = 0. \quad (3.52)$$

En intégrant, on trouve :

$$\frac{y^2}{2} + \frac{k\left(x + \frac{f_0}{k}\right)^2}{2M} = \text{cste}. \quad (3.53)$$

Les différents paramètres étant positifs, la constante est nécessairement positive, et nous la noterons R^2 :

$$y^2 + \frac{k(x + \frac{f_0}{k})^2}{M} = R^2. \quad (3.54)$$

Dans le plan $(x\sqrt{k/M}, y)$, en posant $h = f_0/k$, la solution (3.54) est l'équation d'un cercle de centre $(-h\sqrt{k/M}, 0)$ et de rayon R , qui dépend de la condition initiale.

Pour $y < 0$, $\text{signe}(y) = -1$ et le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{k}{M}x + \frac{f_0}{M}. \end{cases} \quad (3.55)$$

Ce système ne diffère de (3.50) que par le signe négatif devant f_0 . Les solutions sont donc similaires, au signe près devant f_0 :

$$y^2 + \frac{k(x - \frac{f_0}{k})^2}{M} = R^2. \quad (3.56)$$

Dans la plan $x\sqrt{k/M}, y$, avec la notation $h = f_0/k$, la solution (3.56) est l'équation d'un cercle de centre $(+h\sqrt{k/M}, 0)$ et de rayon R , qui dépend de la condition initiale.

Trajectoires

Dans la plan de phase (x, y) , les trajectoires sont représentées à la figure 3.5, pour deux conditions initiales particulières, $(x_i, 0)$. Ces conditions déterminent la valeur du rayon du cercle solution. A chaque croisement de l'axe des x , il y a changement de signe de y , donc changement d'équations et de trajectoires solutions : la constante de la solution est alors déterminée par continuité. On remarque que le mobile s'arrête en un point quelconque du segment singulier, dépendant notamment du point initial.

Le sens des trajectoires est déterminé par les coordonnées du plan de phase : $(x, y = dx/dt)$. L'axe des ordonnées correspond donc à la variable vitesse de x . On doit donc avoir $y > 0$ lorsque x croît. Le sens des trajectoires est donc obligatoirement celui des aiguilles d'une montre. Le sens inverse serait absurde !

Calcul du temps de trajet le long d'une trajectoire

En remarquant que $y = dx/dt$, une petite variation de temps associée à un petit déplacement dx s'exprime $dt = dx/y$. Par intégration on peut calculer le temps T pour aller d'une élongation x_i à une élongation x_f :

$$T = \int_{x_i}^{x_f} \frac{dx}{y}. \quad (3.57)$$

Dans chaque cas particulier, en utilisant l'équation de la trajectoire, on peut exprimer $y = y(x)$ et intégrer.

Dans le cas particulier du mobile avec frottements secs, calculons le temps mis pour parcourir le premier demi-cercle de la trajectoire (1). Cette trajectoire correspond à $y < 0$ et d'après l'équation (3.56), on tire :

$$y = -\sqrt{R^2 - \frac{k(x - \frac{f_0}{k})^2}{M}}, \quad (3.58)$$

avec $x_i = +h + R\sqrt{M/k}$ et $x_f = +h - R\sqrt{M/k}$.

En reportant dans l'équation (3.57), on a l'intégrale :

$$T = - \int_{+h+R\sqrt{M/k}}^{+h-R\sqrt{M/k}} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - \frac{k(x-h)^2}{M}}}. \quad (3.59)$$

Faisons le changement de variable $(x - h)\sqrt{k/M}/R = U$. La relation entre éléments différentiels est $dx = R\sqrt{M/k}dU$, et les bornes de l'intégrales deviennent $x_i \rightarrow U_i = +1$ et $x_f \rightarrow U_f = -1$, d'où l'intégrale :

$$T = -\frac{M}{k} \int_{+1}^{-1} \frac{dU}{\sqrt{1 - U^2}}. \quad (3.60)$$

Posons maintenant $U = \cos \theta$, on déduit $dU = -\sin \theta d\theta$ et les bornes $U_i = -1 \rightarrow \theta_i = 0$ et $U_f = 1 \rightarrow \theta_f = \pi$. On a finalement :

$$T = \frac{M}{k} \int_0^\pi d\theta = \pi \frac{M}{k}. \quad (3.61)$$

Bien sûr, cette méthode permet de calculer le temps mis pour parcourir un segment quelconque de trajectoire : il suffit de déterminer les élongations initiales et finales. Pour une trajectoire correspondant à un angle au centre α , on trouvera simplement $T = \alpha \frac{M}{k}$.

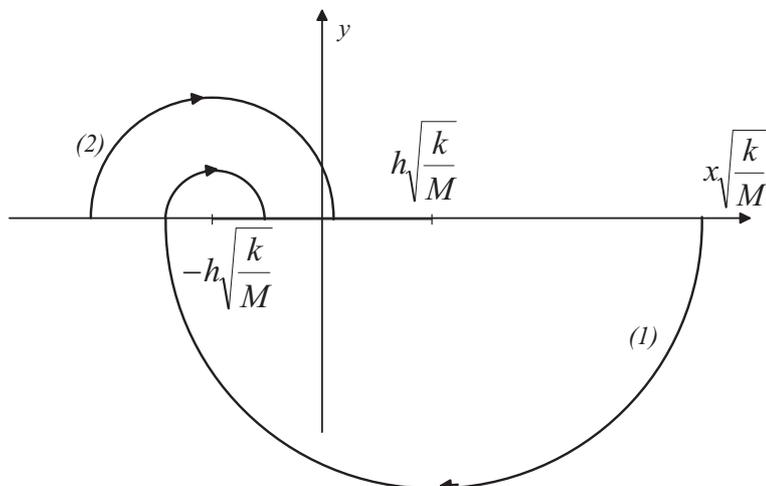


FIG. 3.5 – Dans le plan de phase, la trajectoire de la masse M est une succession de demi-cercles. Le point d'arrêt est un point quelconque du segment singulier, qui dépend du point initial.

3.2.8 Cycles limites

Dans le cas général, un cycle limite stable dans le plan de phase est associé à une auto-oscillation (physiquement observable) de l'asservissement. Ce cycle stable peut entourer un foyer instable, un noeud instable ou un segment d'équilibre instable.

Le cycle limite peut aussi être instable : il est alors associé à une auto-oscillation (non physiquement observable) de l'asservissement. Un tel cycle entoure un foyer, un noeud ou un segment stable : pour une petite variation vers l'intérieur, la trajectoire ne reste pas sur le cycle, mais va converger vers le point ou le segment singulier.

Quelques situations de cycles limites stables et instables sont illustrées à la figure 3.6.

3.3 Etude d'asservissements à relais

On considère un asservissement de la forme canonique proposée à la figure 3.7 dans lequel la non-linéarité est un élément à commutation : relais électromécanique ou dispositif électronique (transistor ou thyristor). Dans

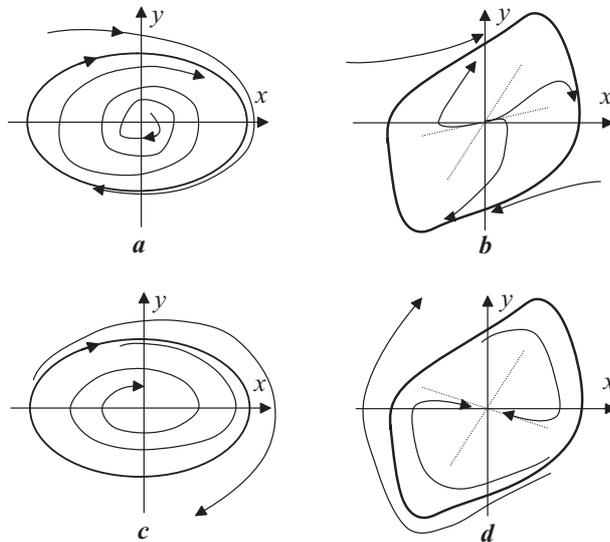


FIG. 3.6 – Quelques exemples de cycles-limites stables (a et b) et instables (c et d).

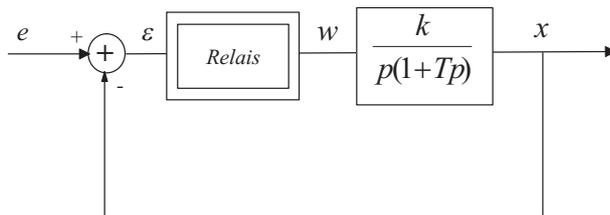


FIG. 3.7 – Asservissement à relais.

le cas le plus général (relais avec seuil et hystérésis), la sortie peut prendre 3 états possibles : 0 et $\pm M$. En notant $w(\epsilon) = Mf(\epsilon)$ la sortie de la non-linéarité attaquée par une entrée ϵ , la fonction $f(\epsilon)$ peut alors prendre les 3 valeurs 0 et ± 1 . Dans cette partie, on considère $e = 0$, c'est-à-dire que l'entrée du relais satisfait : $\epsilon = -x$.

L'asservissement satisfait les équations :

$$Tx'' + x' = kMf(\epsilon), \quad (3.62)$$

où $x' = dx/dt$.

Posons les nouvelles variables de temps et d'espace :

$$t' = \frac{t}{T} \text{ et } u = \frac{x}{kMT}, \quad (3.63)$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} v &= \frac{du}{dt'} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{kMT} x'T = \frac{x'}{kM} \\ \dot{v} &= \frac{dv}{dt'} = \frac{dv}{dx'} \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{kM} x''T = \frac{x''T}{kM}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Avec ces notations, l'équation (3.65) devient :

$$\ddot{u} + \dot{u} = f(-ukMT), \quad (3.65)$$

où $\dot{u} = du/dt'$ et $\ddot{u} = d^2u/dt'^2$.

La fonction $f(\cdot)$ ne pouvant prendre que les trois valeurs 0 et ± 1 , on voit que, pour chaque l'état du relais, l'asservissement est décrit par une équation différentielle particulière. Ces équations ne diffèrent que par une constante, et sont de la forme :

$$\ddot{u} + \dot{u} = \lambda, \quad (3.66)$$

ou encore

$$\dot{v} + v = \lambda, \quad (3.67)$$

avec $\lambda = f(-ukM)$ et $v = \dot{u}$.

3.3.1 Solutions dans le plan de phase

En intégrant l'équation (3.67), on a :

$$v(t') = C_0 \exp(-t') + \lambda. \quad (3.68)$$

Avec la condition initiale $v(0) = v_0 = C_0 + \lambda$, l'équation s'écrit :

$$v(t') = v_0 \exp(-t') + \lambda(1 - \exp(-t')). \quad (3.69)$$

En intégrant une seconde fois, on obtient la solution en u :

$$u(t') = C_1 - v_0 \exp(-t') + \lambda(t' + \exp(-t')). \quad (3.70)$$

Avec la condition initiale $u(0) = u_0 = C_1 - v_0 + \lambda$, cette solution s'écrit :

$$u(t') = u_0 + v_0 - v_0 \exp(-t') - \lambda(1 - t' - \exp(-t')). \quad (3.71)$$

On peut éliminer facilement le paramètre t' dans ces deux équations. A l'aide de la première équation (3.69), on déduit :

$$t' = \ln \left[\frac{v_0 - \lambda}{v - \lambda} \right]. \quad (3.72)$$

En additionnant membre à membre les équations (3.69) et (3.71) et en éliminant t' à l'aide de (3.72), on obtient l'équation générale des trajectoires dans le plan de phase (u, v) :

$$u + v = u_0 + v_0 + \lambda \ln \left[\frac{v_0 - \lambda}{v - \lambda} \right]. \quad (3.73)$$

Cette équation non paramétrique dépend de deux constantes arbitraires (conditions initiales) : elle définit donc une famille de courbes dont nous allons étudier les propriétés.

3.3.2 Etude de la trajectoire

L'équation peut se mettre sous la forme d'une fonction explicite $u = F(v)$, mais il n'existe pas de forme $v = G(u)$. On a en effet :

$$\begin{aligned} u &= F(v) \\ &= u_0 + v_0 + \lambda \ln |v_0 - \lambda| - v - \lambda \ln |v - \lambda|, \\ &= \text{cste} - v - \lambda \ln |v - \lambda|. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Les différentes courbes de la famille se déduisent donc par simple translation le long de l'axe des u . On restreindra donc l'étude à la courbe correspondant à la constante nulle. Cette fonction ne dépend plus que du paramètre λ et nous la noterons : $u = F_\lambda(v) = -v - \lambda \ln |v - \lambda|$.

- Son domaine de définition est $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{\lambda\}$.
- Pour le paramètre $-\lambda$, on remarque que la fonction $F_{-\lambda}(-v) = +v + \lambda \ln |-v + \lambda| = -F_\lambda(v)$. Autrement dit, $F_{-\lambda}(v)$ se déduit de $F_\lambda(v)$ par simple symétrie par rapport à l'origine.
- Pour $v \rightarrow \lambda$, on a $F_{+1}(v) \rightarrow +\infty$ ($\lambda = 1$) et $F_{-1}(v) \rightarrow -\infty$ ($\lambda = -1$)
- Pour $v \rightarrow \infty$, on remarque que $u \sim -v$, c'est-à-dire que la courbe admet la droite $u = -v$ comme direction asymptotique.

Il reste à étudier le sens de parcours des trajectoires le long de ces courbes. Pour cela, revenons aux équations paramétriques et étudions les valeurs atteintes pour $t' \rightarrow \pm\infty$ et pour $\lambda > 0$.

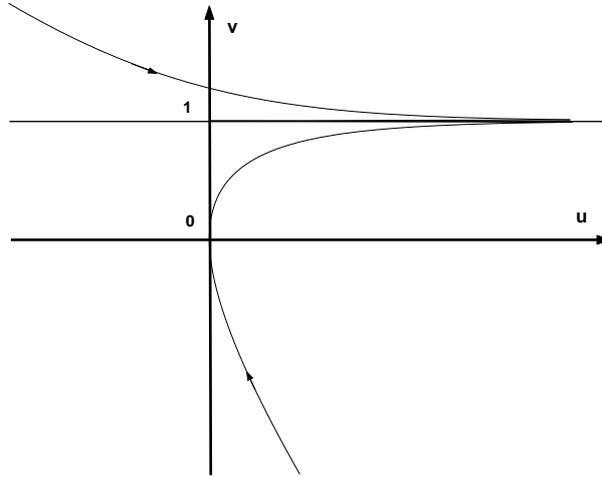


FIG. 3.8 – Représentation graphique d’une trajectoire solution pour $\lambda = 1$. Les flèches indiquent le sens de parcours lorsque t croît.

- Pour $t' \rightarrow -\infty$, on peut écrire

$$\begin{aligned} u(t') &\sim -(v_0 - \lambda) \exp(-t') \\ v(t') &\sim (v_0 + \lambda \exp(-t')), \end{aligned} \quad (3.75)$$

c’est-à-dire que la trajectoire part de la direction asymptotique $u = -y$.

- Pour $t' \rightarrow +\infty$, on a :

$$u(t') \rightarrow +\infty \quad (3.76)$$

$$v(t') \rightarrow \lambda, \quad (3.77)$$

ce qui correspond à l’asymptote “verticale”² $v = \lambda$.

3.3.3 Représentation des trajectoires

La trajectoire $u = F_1(v) = -v - \ln|v - 1|$ est représentée à la figure 3.8.

Compte tenu des propriétés démontrées dans le paragraphe précédent, on pourra utiliser cette courbe comme abaque des trajectoires solutions des équations $\ddot{u} + \dot{u} = \pm 1$, avec les règles “géométriques” suivantes :

- La courbe correspondant à la bonne condition initiale se déduit de la courbe associée à $u_0 = v_0 = 0$ par translation de l’abaque le long de l’axe des u (Fig. 3.9).

²dans le plan (v, u) , mais horizontale dans le plan de phase (u, v)

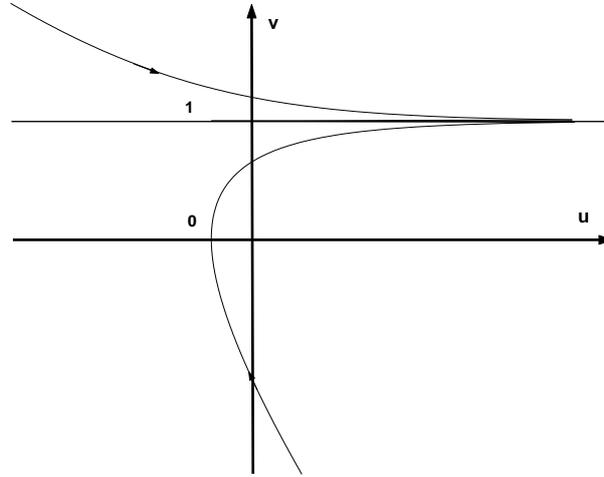


FIG. 3.9 – Une trajectoire solution avec une condition initiale différente de $u_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$ se déduit de la trajectoire $u_0 = v_0 = 0$ par simple translation le long de l’axe des u .

- On passe des trajectoires solutions de $\ddot{u} + \dot{u} = +1$ à celles solutions (Fig. 3.10) de $\ddot{u} + \dot{u} = -1$ en retournant l’abaque d’un demi-tour (symétrie par rapport à 0).

3.3.4 Trajectoire pour $\lambda = 0$

Pour $\lambda = 0$, l’équation du système asservi devient $\ddot{u} + \dot{u} = 0$ que l’on peut intégrer directement. La solution générale calculée pour $\lambda \neq 0$ reste également valable :

$$v = -u + u_0 + v_0 = -u + \text{cste}. \quad (3.78)$$

La trajectoire est donc une droite de pente -1 dans le plan de phase.

3.3.5 Calcul du temps le long d’une trajectoire

Dans le cas particulier des systèmes étudiés dans cette partie, le calcul du temps de parcours le long d’une trajectoire est particulièrement simple.

Calcul pour $\lambda \neq 0$

En effet, considérons deux points, $M_1 : (u_1, v_1)$ et $M_2 : (u_2, v_2)$, appartenant à un arc de trajectoire. Le point M_1 est associé à la date t'_1 et M_2 à

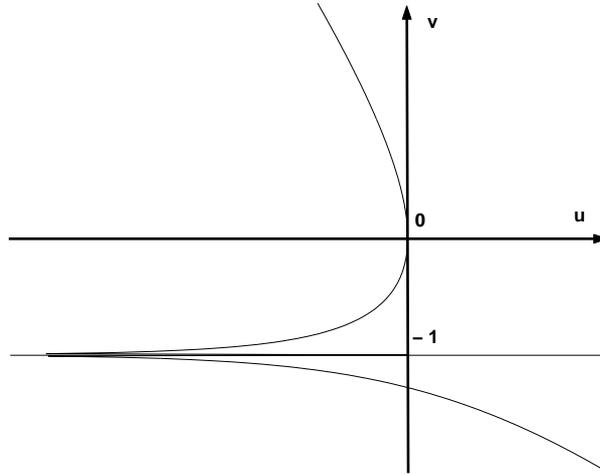


FIG. 3.10 – Une trajectoire solution avec le paramètre $\lambda = -1$ se déduit par symétrie par rapport à 0 de la trajectoire solution avec le paramètre $\lambda = +1$. Graphiquement, la courbe obtenue est aussi déduite par rotation de π (un demi-tour) de la courbe 3.8.

la date t'_2 . Fixons arbitrairement t_1 et M_1 comme date et point initiaux. En utilisant les relations (3.72) et (3.73), on peut donc écrire pour tout point de la trajectoire et en particulier pour M_2 :

$$u_2 + v_2 = u_1 + v_1 + \lambda(t'_2 - t'_1), \quad (3.79)$$

d'où finalement :

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\lambda}[(u_2 - u_1) + (v_2 - v_1)], \quad (3.80)$$

que l'on peut encore écrire de façon compacte :

$$\Delta t' = \frac{1}{\lambda}[\Delta u + \Delta v]. \quad (3.81)$$

Calcul pour $\lambda = 0$

Cette formule est valable le long des trajectoires solutions de l'équation différentielle $\ddot{u} + \dot{u} = \lambda \neq 0$. En effet, pour $\lambda = 0$, la relation (3.81) n'est pas définie. En intégrant la relation générale $dt = du/v$, on a alors :

$$t'_2 - t'_1 = \int_{u_1}^{u_2} du/v,$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{u_1}^{u_2} du / (-u + u_1 + v_1), \\
&= -\ln(-u + u_1 + v_1) \Big|_{u_1}^{u_2}, \\
&= -\ln(-u_2 + u_1 + v_1) + \ln(v_1). \tag{3.82}
\end{aligned}$$

En tenant compte de l'équation de la trajectoire $v = -u + u_0 + v_0$, on déduit $-u_2 + u_1 = v_2 - v_1$ et on peut écrire simplement :

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \ln(v_1/v_2) \tag{3.83}$$

Calcul dans l'échelle de temps initiale

Enfin, ces deux relations donnent le temps dans l'échelle de temps t' . Pour revenir à l'échelle de temps initiale, il faut tenir compte du changement de variable $t' = t/T$, c'est-à-dire :

$$\Delta t = T \Delta t'. \tag{3.84}$$

3.3.6 Etude pour un relais idéal

Dans ce paragraphe, on considère le relais sans seuil et sans hystérésis.

Droite de commutation et trajectoire

Les deux valeurs possibles de $f(\epsilon)$ sont ± 1 . Dans le plan de phase, on peut donc distinguer deux régions, chacune associée à une valeur de λ donc à une équation différentielle de la forme $\ddot{u} + \dot{u} = f(-kMTu) = \lambda$. Le changement d'état du relais se fait pour $u = 0$ qui est donc la droite de commutation. A droite dans le plan de phase, c'est-à-dire pour $u > 0$, puisque $x = kMTu$, la sortie du relais vaut $-M$, c'est-à-dire $f(-kMTu) = -1$: la trajectoire est solution de l'équation $\ddot{u} + \dot{u} = -1$. A gauche, pour $u < 0$, les trajectoires sont solutions de l'équation $\ddot{u} + \dot{u} = +1$. Le début de la trajectoire est représentée à la figure 3.11.

Existence de cycle limite

Un cycle limite correspond à une trajectoire fermée. Sur la figure 3.11, l'existence d'un cycle limite revient à chercher s'il existe des solutions à l'équation géométrique $P = R$, ou compte tenu des symétries des trajectoires pour $\lambda = \pm 1$, si P et Q sont symétriques. Pour cela, partons du point initial $P : (u_P = 0, v_P)$ et calculons si le point $Q : (u_Q = 0, v_Q = -v_P)$

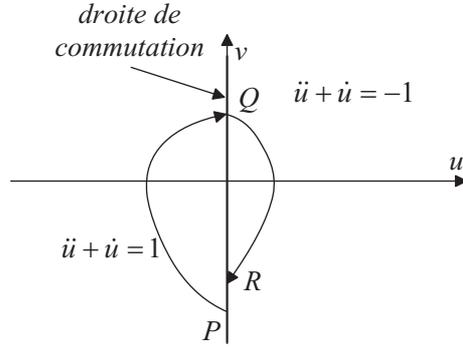


FIG. 3.11 – Début de la trajectoire solution pour un relais idéal. Les deux régions du plan associée chacune à une équation différentielle sont séparées par la droite de commutation $u = 0$.

appartient à la trajectoire solution de $\ddot{u} + \dot{u} = +1$ (on est dans $u < 0$). Les coordonnées (u, v) des points devant satisfaire l'équation non paramétrique de la trajectoire, on peut écrire :

$$u_Q + v_Q = u_P + v_P + \ln \left[\frac{(v_P - 1)}{(v_Q - 1)} \right], \quad (3.85)$$

soit, en tenant compte des valeurs particulières $u_P = u_Q = 0$ et $v_Q = -v_P$, on a :

$$-v_P = v_P + \ln \left[\frac{(v_P - 1)}{(-v_P - 1)} \right]. \quad (3.86)$$

Les valeurs v_P sont donc solutions de :

$$\begin{aligned} 2x &= \ln \left[\frac{(1+x)}{(1-x)} \right], \\ \exp(2x)(1-x) &= (1+x). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Cette dernière équation est transcendantale et n'admet pas de solution analytique. On peut facilement la résoudre graphiquement, en cherchant les intersections des deux courbes $f(x)$ et $g(x)$ d'équations (Fig. 3.12) :

$$f(x) = \exp(2x)(1-x) \text{ et } g(x) = (1+x). \quad (3.88)$$

On remarque que le seul point d'intersection se produit pour $x = 0$. Cela correspond donc au point $P : (0, 0)$ donc à un cycle limite d'amplitude nulle.

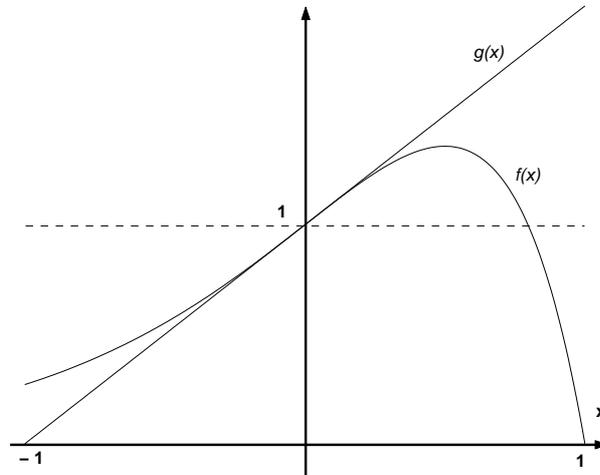


FIG. 3.12 – Résolution graphique de l'équation d'existence d'un cycle limite dans le cas d'un relais idéal.

3.3.7 Etude pour un relais avec hystérésis

Dans ce paragraphe, on considère le relais symétrique avec hystérésis (commutation pour $x = \pm h/2$). Avec le changement de variable (de x à u), dans le plan de phase, le changement d'état du relais se produit aux valeurs $u = \pm h/(2kMT) = \pm a$.

Droite de commutation et trajectoire

Les deux valeurs possibles de $f(\epsilon)$ sont encore ± 1 . Dans le plan de phase, on peut distinguer deux régions, chacune associée à une valeur de λ donc à une équation différentielle de la forme $\ddot{u} + \dot{u} = f(-u) = \lambda$. Supposons que u soit très grande, l'entrée du relais $\epsilon = -u < 0$ est très petite, et la sortie du relais est dans l'état $-M$ (c'est-à-dire $\lambda = +1$), jusqu'à ce que l'entrée u diminue et atteigne $-a$: la commutation $-M \rightarrow +M$ est donc la demi-droite $u = -a$ située dans le demi-plan $v < 0$, car cette commutation se produit lorsque u décroît (donc $v = du/dt < 0$). De même, la commutation $+M \rightarrow -M$ sera la demi-droite $u = +a$ située dans le demi-plan $v > 0$, car cette commutation se produit lorsque u croît (donc $v = du/dt > 0$). Les droites de commutation et les équations valides dans chaque partie du plan de phase sont données à la figure 3.13.

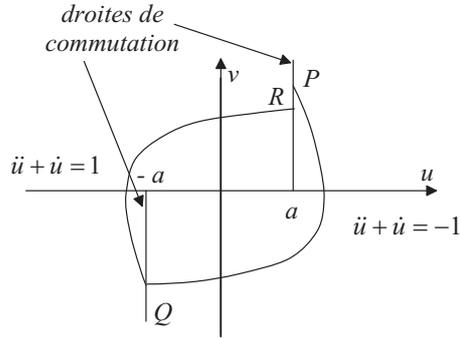


FIG. 3.13 – Droites de commutation et allure de la trajectoire solution pour un relais avec hystérésis.

Existence de cycle limite

L'existence d'un cycle limite correspond à une trajectoire fermée. Sur la figure 3.13, cela revient à chercher s'il existe des solutions à l'équation géométrique $P = R$, ou compte tenu des symétries des trajectoires pour $\lambda = \pm 1$, si P et Q sont symétriques. Pour cela, partons du point initial $P : (u_P = a, v_P)$ et calculons à quelle condition le point $Q : (u_Q = -a, v_Q = -v_P)$ appartient à la trajectoire solution de $\ddot{u} + \dot{u} = -1$. Les coordonnées (u, v) des points devant satisfaire l'équation non paramétrique de la trajectoire, on peut écrire :

$$u_Q + v_Q = u_P + v_P - \ln \left[\frac{(v_P + 1)}{(v_Q + 1)} \right], \quad (3.89)$$

soit, en tenant compte des valeurs particulières $u_P = a$, $u_Q = -a$ et $v_Q = -v_P$, on a :

$$-2a = 2v_P - \ln \left[\frac{(v_P + 1)}{(-v_P + 1)} \right]. \quad (3.90)$$

Les valeurs v_P sont donc solutions de :

$$\begin{aligned} -2a - 2x &= \ln \left[\frac{(1 - x)}{(1 + x)} \right], \\ \exp(2a) \exp(x)(1 - x) &= \exp(-x)(1 + x). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Cette dernière équation est transcendante et n'admet pas de solution analytique. On peut facilement la résoudre graphiquement, en cherchant les intersections des deux courbes $f(x)$ et $g(x)$ d'équations (Fig. 3.14) :

$$f(x) = \exp(2a) \exp(x)(1 - x) \text{ et } g(x) = \exp(-x)(1 + x). \quad (3.92)$$

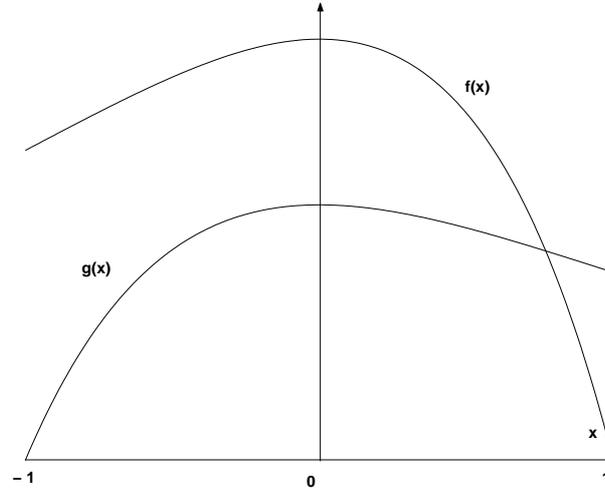


FIG. 3.14 – Résolution graphique de l'équation d'existence d'un cycle limite dans le cas d'un relais avec hystérésis.

On remarque que (si $a \neq 0$, sinon il n'y a pas d'hystérésis), il existe un point d'intersection $x > 0$. Cela correspond donc à un point $P = (a, v_P)$ donc à un cycle limite.

Paramètres de l'auto-oscillation

Le cycle-limite est associé à une auto-oscillation. Pour vérifier si celle-ci est stable ou instable, il suffit de tracer les trajectoires à partir de deux conditions initiales : une intérieure et l'autre extérieure au cycle. Si ces deux trajectoires convergent vers le cycle, celui-ci est stable. Si l'une des deux au moins en diverge, celui-ci est instable.

L'amplitude du cycle A_u se lit directement dans le plan de phase (Fig. 3.15) sur l'axe u . Il ne faut pas oublier de tenir compte du facteur d'échelle et de calculer l'amplitude de la variable initiale x : $A_x = kMTA_u$.

En utilisant les résultats du paragraphe 3.3.5, on peut facilement calculer la demi-période (entre P et Q) :

$$\mathcal{T}'/2 = (\Delta u + \Delta v)/\lambda = 2(a + v_P), \quad (3.93)$$

où v_p est défini sur la Fig 3.15. En tenant compte du changement d'échelle de temps, on a finalement :

$$\mathcal{T} = 4(a + v_P)T. \quad (3.94)$$

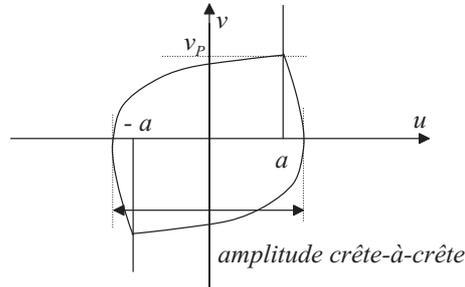


FIG. 3.15 – L’amplitude crête-à-crête se lit simplement en recherchant les élongations maximales, c’est-à-dire les intersections du cycle avec l’axe u .

3.3.8 Relais avec seuil et retard de commutation

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que la méthode du plan de phase permet de prendre en compte des paramètres réels des composants, comme un retard de commutation τ du relais. Le relais est symétrique avec un seuil de $\pm\Delta/2$ pour la variable x , soit un seuil de $\pm\Delta/(2kMT) = \pm a$ pour la variable u .

Droite de commutation avec $\tau = 0$

La sortie du relais peut prendre trois valeurs possibles : 0 ou $\pm M$. On a donc trois régions distinctes dans le plan de phase, chacune associée à une équation différentielle de la forme $\ddot{u} + \dot{u} = \lambda$ où λ prend les valeurs 0 ou ± 1 . Lorsque $u > 0$ est très grand, l’entrée du relais $\epsilon = -kMTu$ impose une sortie de relais égale à $-M$. Lorsque u décroît (donc $\dot{u} < 0$) le relais reste dans cet état jusqu’à ce que $u = +a$: il commute alors à 0. Si u décroît encore, lorsque $u = -a$, le relais commute à $-M$. Les droites de commutation sont donc les deux droites d’équation $u = -a$ et $u = +a$ (Fig. 3.16).

Droite de commutation avec $\tau \neq 0$

Considérons que la commutation ne se fait pas instantanément, c’est-à-dire lorsque $u = \pm a$, mais avec un retard de τ .

En particulier, sur le premier segment de trajectoire, la commutation ne se produit pas au point $P : (-a, v_P)$, mais au point $R : (u_R, v_R)$ (Fig. 3.17). Les points P et R appartenant à la trajectoire, en prenant P comme point initial (au temps $t' = 0$), le point R est atteint au temps $t' = \tau$. Plus

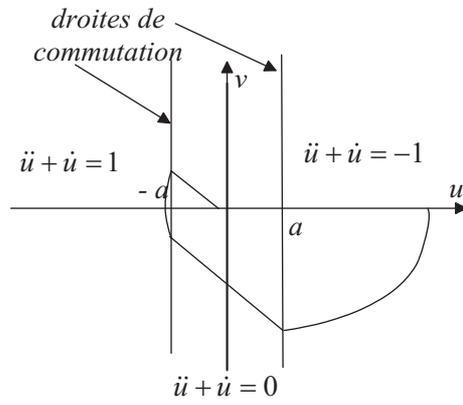


FIG. 3.16 – Les droites de commutation sont les droites $u = \pm a$. La trajectoire se termine lorsqu'elle coupe le segment singulier $u = [-a, +a]$

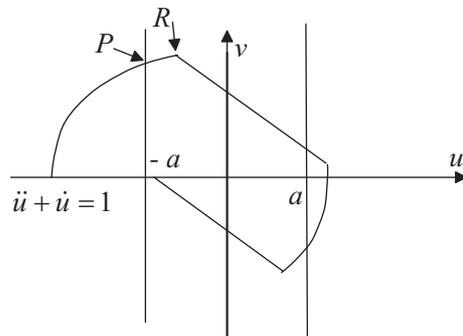


FIG. 3.17 – Les commutations ne se produisent pas sur les droites de commutation mais sur des points “distants” de τ .

précisément :

$$\begin{cases} v_R &= v_P \exp(-\tau) + (1 - \exp(-\tau)), \\ u_R &= -a + v_P - v_R + \ln \frac{v_P - 1}{v_R - 1} \end{cases} \quad (3.95)$$

De la première équation on tire :

$$\frac{v_R - 1}{v_P - 1} = \exp(-\tau), \quad (3.96)$$

et :

$$v_P = (v_R - 1) \exp(\tau) + 1. \quad (3.97)$$

En reportant dans la seconde équation, on arrive à :

$$\begin{aligned} u_R &= -a + (v_R - 1) \exp(\tau) + 1 - v_R + \tau, \\ v_R(\exp(\tau) - 1) &= u_R + a - 1 - \tau + \exp \tau. \end{aligned}$$

On en déduit que les points $R : (u_R, v_R)$ sont situés sur une droite d'équation :

$$v = \frac{u + (a - 1 - \tau + \exp \tau)}{\exp(\tau) - 1}. \quad (3.98)$$

La droite de commutation n'est donc plus la droite verticale $u = -a$, mais une droite de pente $1/(\exp(\tau) - 1)$. Avec un calcul similaire, on montre facilement que la droite de commutation verticale $u = a$ est remplacée par la droite d'équation :

$$v = \frac{u + (-a - 1 - \tau + \exp \tau)}{\exp(\tau) - 1}. \quad (3.99)$$

3.3.9 Système avec correction tachymétrique

Ce paragraphe illustre l'intérêt de la méthode du plan de phase, qui permet de prendre en compte les particularités du montage. Pour chaque situation, la principale étape consiste à déterminer les droites de commutation, qui partagent le plan de phase en des régions distinctes, chacune associée à une équation différentielle particulière. Dans ce paragraphe, on considère un asservissement avec une correction tachymétrique (Fig. 3.18). Avec ce système, en supposant l'entrée $e = 0$, on voit que l'entrée du relais est égale à :

$$\epsilon = -(x + T_1 dx/dt). \quad (3.100)$$

En faisant les changements de variables sur x et sur t (u et t'), on se ramène à une équation différentielle canonique de la forme :

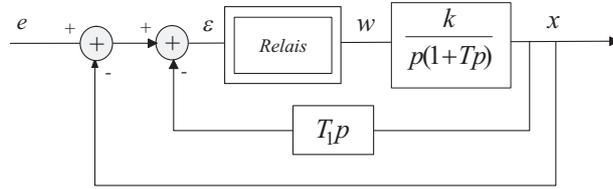


FIG. 3.18 – L’asservissement comporte une boucle de retour avec correction dérivée.

$$\ddot{u} + \dot{u} = f\left(-\left(u + \frac{T_1}{T}v\right)kMT\right), \quad (3.101)$$

où $f(\cdot)$ prend les valeurs 0 ou ± 1 .

Droites de commutation

Il est clair que les droites de commutation sont associées aux changements d’état de la fonction $f(\cdot)$. Si f change d’état lorsque son argument vaut a , la droite de commutation s’écrit alors :

$$-\left(u + \frac{T_1}{T}v\right) = a, \quad (3.102)$$

c’est-à-dire :

$$v = -(u + a)\frac{T}{T_1}. \quad (3.103)$$

On remarque que la correction dérivée entraîne des droites de commutation à pente négative, T/T_1 .

Compensation d’un retard de commutation par correction tachymétrique

On peut ainsi utiliser une correction tachymétrique pour compenser un retard de commutation τ . Il suffit de chercher pour quelle valeur de T_1 , les valeurs absolues des pentes des droites de commutations avec retard ou correction tachymétrique sont égales. On écrit donc :

$$\frac{T}{T_1} = \frac{1}{\exp(\tau) - 1}, \quad (3.104)$$

d’où l’on déduit :

$$T_1 = T(\exp(\tau) - 1). \quad (3.105)$$

3.4 Conclusions

La méthode de l'espace de phase est une méthode générale d'étude d'un système d'équations différentielles non linéaire. La méthode du plan de phase, étudiée un peu plus en détail dans ce document, se restreint à des systèmes d'ordre 2. Cette restriction permet déjà d'étudier bon nombre d'asservissements non linéaires ; elle a de plus le mérite de la simplicité.

Cette méthode est une méthode exacte. Les approximations éventuelles sont liées à l'intégration numérique des solutions, car il n'existe pas toujours de forme analytique. De plus, cette méthode permet, comme nous l'avons vu au travers de quelques exemples, de prendre en compte des paramètres réels des composants (retard de commutation, dissymétrie, etc.) ou des variantes de montage (correction tachymétrique) de façon très simple.

Cette méthode est aussi utilisable pour étudier la convergence d'algorithmes d'estimation non linéaires de la forme :

$$\mathbf{X}(t + 1) = \mathbf{X}(t) + \mu \Delta \mathbf{J}(\mathbf{X}(t)). \quad (3.106)$$

L'idée de base consiste à calculer d'abord l'équation différentielle ordinaire (ODE pour ordinary differential equation) associée à (3.106) en faisant tendre le pas de temps discret vers 0. On montre que cette équation s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \Delta \mathbf{J}, \quad (3.107)$$

avec $\Delta \mathbf{J} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[\Delta \mathbf{J}(\mathbf{X}(t))]$. Sous certaines conditions, on montre alors que les points d'équilibre (convergence) de l'algorithme sont de même nature (stable ou non) que les points d'équilibre de l'ODE. Ainsi, l'étude de la nature des points d'équilibre de cette ODE par la méthode de l'espace de phase permet de conclure sur la convergence (ou non) de l'algorithme associé.