

Christian JUTTEN

Théorie du signal

Département Informatique et Electronique des Systèmes Embarqués

IESE4

Univ. Grenoble Alpes - Polytech' Grenoble

Juillet 2018

Table des matières

1	Introduction à la théorie du signal	6
1.1	Théorie du signal	6
1.1.1	Signal et bruit	6
1.1.2	De la théorie du signal au traitement du signal	7
1.2	Théorie et traitement du signal	8
1.2.1	Communication à étalement de spectre [6]	8
1.2.2	Mesure par corrélation	10
1.2.3	Filtre adapté	10
1.2.4	Filtrage de Widrow [11]	11
1.2.5	Séparation <i>aveugle</i> de sources [7, 3]	12
1.2.6	Filtrage homomorphique	13
1.2.7	Vers un traitement multidimensionnel	13
1.3	Organisation du document	14
1.3.1	Contenu	14
1.3.2	Références	14
1.3.3	Avertissement	15
2	Signaux, fonctions et opérateurs de base	16
2.1	Signaux usuels	16
2.1.1	Fonction <i>signe</i>	16
2.1.2	Fonction <i>échelon unité</i>	17
2.1.3	Fonction <i>rampe</i>	17
2.1.4	Fonction rectangle ou porte	17
2.1.5	Fonction triangle	19
2.2	Impulsion de Dirac	19
2.2.1	Distribution de Dirac	20
2.2.2	Propriétés et règles opératoires	20
2.3	Produit de convolution	23
2.3.1	Définition	23
2.3.2	La convolution en BD	24
2.3.3	Propriétés	24
2.3.4	Commentaire sur les notations	24
2.4	Valeurs caractéristiques d'un signal	26
2.5	Exercices	27
2.5.1	Fonctions rectangle et triangle	27
2.5.2	Propriétés des produits de convolution	27

2.5.3	Calcul de produits de convolution	27
3	Classification des signaux	29
3.1	Signaux physiques et modèles	29
3.1.1	Signaux réalisables	29
3.1.2	Modèle	29
3.1.3	Classes de signaux	30
3.2	Signaux certains et aléatoires	30
3.2.1	Définitions	30
3.2.2	Signaux déterministes	30
3.2.3	Signaux aléatoires	31
3.3	Energie et puissance	32
3.3.1	Définitions	32
3.3.2	Signaux à énergie finie	33
3.3.3	Signaux à puissance moyenne finie	34
3.4	Classification spectrale	34
3.5	Autres propriétés	34
3.5.1	Variables continues ou discrètes	34
3.5.2	Parité	34
3.5.3	Causalité	35
3.6	Exercices	35
3.6.1	Classification de signaux	35
3.6.2	Classification énergétique de signaux simples	36
3.6.3	Puissance moyenne d'un signal périodique	36
3.6.4	Classification spectrale des signaux	36
4	Représentation vectorielle de signaux	37
4.1	Espace de signaux	37
4.1.1	Représentation discrète	37
4.1.2	Espace vectoriel de fonctions	37
4.1.3	Espace de signaux	38
4.1.4	Distance entre deux signaux	38
4.1.5	Espace L^2 des signaux à énergie finie	39
4.2	Fonctions orthogonales	40
4.2.1	Produit scalaire de signaux dans $L^2(t_1, t_2)$	40
4.2.2	Fonctions orthogonales	40
4.2.3	Produit scalaire et distance euclidienne	40
4.2.4	Inégalité de Schwartz	41
4.2.5	Approximation d'un signal dans $L^2(t_1, t_2)$	42
4.2.6	Théorème de la projection	42
4.2.7	Calcul des coefficients α_k optimaux au sens des moindres carrés	43
4.2.8	Qualité de l'approximation	44
4.2.9	Cas d'une base orthogonale	44
4.2.10	Construction d'une base orthonormale par la procédure de Gram-Schmidt	45
4.3	Exemples de fonctions orthogonales	45
4.3.1	Fonctions rectangulaires décalées	45
4.3.2	Fonctions orthogonales de Rademacher et de Walsh	45

4.3.3	Séries de Fourier	47
4.4	Exercices	48
4.4.1	Distance entre deux signaux	48
4.4.2	Produit scalaire de deux signaux	48
4.4.3	Approximation d'un signal	48
4.4.4	Développement en séries de Fourier	48
5	Signaux certains	49
5.1	Transformée de Fourier	49
5.1.1	Définition et existence	49
5.1.2	Propriétés de la transformée de Fourier	49
5.1.3	Exemple 1 : impulsion à décroissance exponentielle	51
5.1.4	Exemple 2 : transformée de Fourier de $\text{rect}(t/T)$	52
5.1.5	Théorèmes de Plancherel	53
5.1.6	Théorème de Parseval	54
5.2	Fonctions de corrélation des signaux à énergie finie	56
5.2.1	Définitions	56
5.2.2	Propriétés	56
5.2.3	Relation entre corrélation et convolution	57
5.3	Densités spectrale et interspectrale d'énergie	59
5.3.1	Densité spectrale d'énergie	59
5.3.2	Densité interspectrale d'énergie (DISE)	59
5.3.3	Exemple	60
5.3.4	Dérivation de la fonction de corrélation	61
5.4	Signaux à puissance moyenne finie	62
5.4.1	Extension de la transformée de Fourier	62
5.4.2	Corrélation des signaux à puissance moyenne finie	63
5.4.3	Densités spectrale et interspectrale de puissance	64
5.5	Signaux périodiques	65
5.5.1	Transformée de Fourier d'un signal périodique	65
5.5.2	Enveloppe spectrale	67
5.5.3	Fonction de corrélation de signaux périodiques de même période	69
5.5.4	Densité spectrale de puissance	70
5.5.5	Densité interspectrale de puissance	71
5.6	Exercices	71
5.6.1	Propriétés de la transformée de Fourier (TF)	71
5.6.2	Calcul de transformées de Fourier	72
5.6.3	Calcul de TF et tracés de leur spectres d'amplitude et de phase	73
5.6.4	Convolution et corrélation	74
5.6.5	Applications des transformées de Fourier	74
5.6.6	Auto-corrélation, densités spectrales d'énergie et de puissance	75
5.6.7	Filtrage	76
6	Signaux aléatoires	78
6.1	Processus, signal et variable aléatoires	78
6.1.1	Exemple	78
6.1.2	Signaux aléatoires	80

6.1.3	Variables aléatoires	80
6.1.4	Vecteurs aléatoires	81
6.1.5	Statistique d'ordre 1	81
6.1.6	Statistiques d'ordre 2	83
6.2	Stationnarité et ergodisme	83
6.2.1	Stationnarité	83
6.2.2	Ergodisme	84
6.3	Autocorrélation et autocovariance des processus aléatoires stationnaires	84
6.3.1	Autocorrélation	84
6.3.2	Autocovariance	85
6.3.3	Propriétés	85
6.4	Densité spectrale de puissance	88
6.4.1	Définition	88
6.4.2	Théorème de Wiener-Khintchine	89
6.4.3	Notion de bruit blanc	90
6.5	Intercorrélation et densité interspectrale de puissance	92
6.5.1	Intercorrélation	92
6.5.2	Densité interspectrale de puissance	92
6.5.3	Intercovariance	92
6.5.4	Fonction de cohérence	93
6.6	Combinaison de signaux aléatoires	93
6.6.1	Transformation d'un vecteur aléatoire	93
6.6.2	Somme de signaux aléatoires	94
6.6.3	Théorème de la limite centrale	95
6.6.4	Fonction d'intercorrélation d'une somme de variables aléatoires	95
6.6.5	Densité spectrale de puissance d'une somme de variables aléatoires	96
6.7	Exercices	96
6.7.1	Rappels de probabilité	96
6.7.2	Stationnarité	97
6.7.3	Somme de deux signaux aléatoires	97
6.7.4	Signal binaire cadencé	98
7	Opérateurs fonctionnels et techniques de corrélation	99
7.1	Opérateurs linéaires invariants	99
7.1.1	Propriétés	99
7.1.2	Systèmes linéaires invariants à coefficients constants	100
7.1.3	Déconvolution	101
7.1.4	Formule des interférences	102
7.1.5	Corrélation entrée/sortie d'un opérateur de convolution	104
7.1.6	Statistique du signal en sortie d'un opérateur de convolution	105
7.2	Autres opérateurs	107
7.2.1	Multiplication par une constante	107
7.2.2	Opérateurs de retard	107
7.2.3	Opérateur de Hilbert	108
7.2.4	Opérateur de moyenne temporelle	109
7.2.5	Opérateur de filtrage idéal	110
7.3	Détection d'un signal dans du bruit	114

7.3.1	Signal connu dans du bruit : filtrage adapté	115
7.3.2	Signal inconnu dans du bruit	116
7.3.3	Extraction d'un signal aléatoire dans du bruit	117
7.3.4	Filtre de Wiener	119
7.4	Exercices	120
7.4.1	Opérateur idéal de moyenne temporelle	120
7.4.2	Filtrage	121
7.4.3	Extraction d'une composante continue	122
7.4.4	Fonction de cohérence	123
7.4.5	Application de l'auto-corrélation	123
7.4.6	Filtrage - Préaccentuation et désaccentuation	124
7.4.7	Amélioration du rapport signal à bruit	125

Chapitre 1

Introduction à la théorie du signal

La théorie du signal : qu'est-ce que c'est ? quels sont ses objectifs ?

L'objet de ce chapitre est de répondre à ces questions, au travers de quelques définitions et surtout de quelques exemples.

1.1 Théorie du signal

1.1.1 Signal et bruit

Consultons d'abord le Petit Larousse sur le sens du mot *signal*.

Définition 1.1.1 (Signal) *vient du latin signum : signe ; variation d'une grandeur physique de nature quelconque porteuse d'information.*

Un signal est donc la représentation physique de l'information. Sa nature physique peut être très variable : acoustique, électronique, optique, etc.

Le mot *signal* est pratiquement toujours associé au mot *bruit*. Ce dernier est utilisé dans le langage commun, mais il revêt, dans la théorie du signal, un sens bien particulier.

Définition 1.1.2 (Bruit) *vient du latin populaire brugere : braire et rugire : rugir ; perturbation indésirable qui se superpose au signal et aux données utiles, dans un canal de transmission ou dans un système de traitement de l'information.*

Le bruit (*noise* en anglais) dépendra très fortement du contexte. Par exemple :

- pour un opérateur sonar, le signal utile est émis par les navires et les sous-marins, alors que les poissons et les crustacés émettent des signaux qui sont des perturbations pour le signal utile, donc des bruits,
- réciproquement, pour l'opérateur sonar d'un bâtiment de pêche, le signal utile est celui émis par les bancs de poissons, les autres signaux sont donc des perturbations et constituent donc du bruit.

Ainsi, il apparaît évident qu'un problème fondamental en traitement du signal sera d'extraire le signal utile du bruit. La difficulté du problème dépend en particulier de la proportion entre signal et bruit. Ceci est mesuré par le *rapport signal à bruit* (RSB, ou SNR en anglais pour *signal noise ratio*).

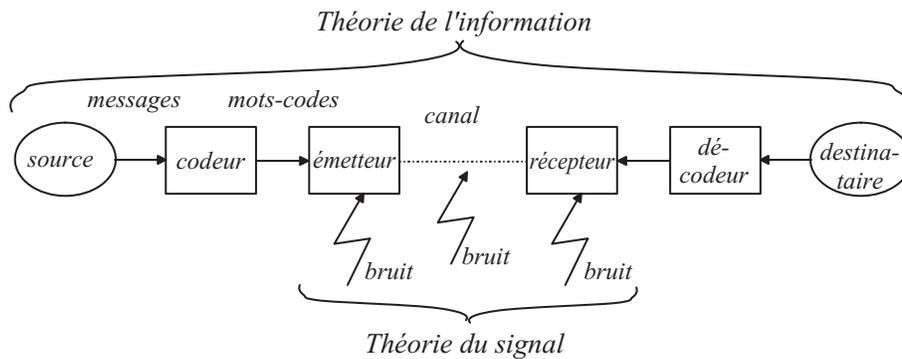


FIGURE 1.1 – Position des théories de l’information et du signal dans une chaîne de transmission de l’information

Définition 1.1.3 (RSB) Le rapport signal à bruit est le rapport des puissances du signal, P_S , et du bruit, P_B :

$$RSB = \frac{P_S}{P_B}, \quad (1.1)$$

ou, en dB :

$$RSB_{dB} = 10 \log \left(\frac{P_S}{P_B} \right), \quad (1.2)$$

où log est le logarithme décimal.

Le RSB mesure donc la qualité du signal. C’est une mesure objective. Cependant, dans de nombreux cas, en particulier ceux où l’opérateur humain intervient dans la chaîne de traitement, cette mesure n’est pas très significative. Ceci est particulièrement vrai pour les signaux audio ou les images et les vidéos. Des mesures subjectives, ou des mesures plus fines, prenant en compte les propriétés de la perception humaine doivent être mises en oeuvre. Ceci sera abordé dans le cours de Perception visuelle (N. Guyader) en IESE5, option Images, Signal, Automatique (ISA).

1.1.2 De la théorie du signal au traitement du signal

Les mots signal et information sont communs dans le langage courant. Dans le monde scientifique, ces mots ont des significations bien précises : en particulier, théorie de l’information, théorie du signal et traitement du signal correspondent à des notions différentes, illustrées à la figure 1.1 dans le cadre d’une chaîne de communications. De façon encore plus générale :

- la théorie du signal est l’ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire les signaux et les bruits émis par une source, ou modifiés par un système de traitement,
- la théorie de l’information est l’ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire la transmission de messages véhiculés d’une source vers un destinataire,
- le traitement du signal est l’ensemble des méthodes et des algorithmes qui permet d’élaborer ou d’interpréter les signaux porteurs d’information. Plus précisément :
 - élaboration : codage, modulation, changement de fréquence,
 - interprétation : décodage, démodulation, filtrage, détection, identification, etc.

Actuellement, les méthodes de traitement sont presque en totalité numériques, ce qui suppose :

- un échantillonnage temporel, et une représentation des signaux en temps discret,

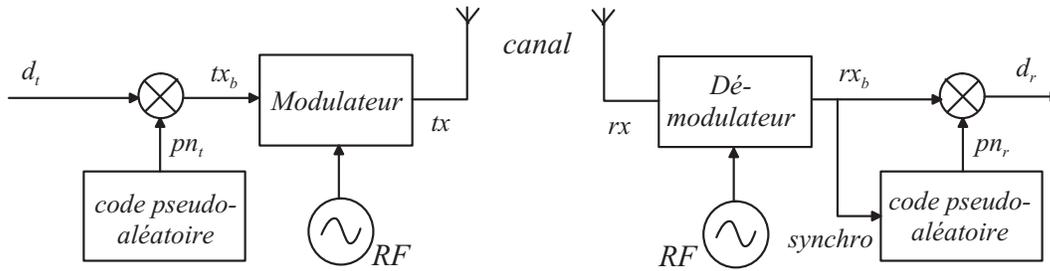


FIGURE 1.2 – Communication à étalement de spectre

— la numérisation du signal par conversion analogique/numérique, ce qui implique une quantification du signal.

Ces aspects seront développés dans le cours de traitement numérique du signal (D. Pelle-
rin), au second semestre.

1.2 Théorie et traitement du signal

Les outils de la théorie du signal et de traitement du signal s’appliquent à de nombreux do-
maines, dès qu’un capteur mesure une grandeur physique porteuse d’information, qui est perturbée
(par du bruit ou le système de mesures) et qui devra être traitée pour en extraire l’information utile.

Les méthodes de traitement du signal permettent d’imaginer des méthodes plus sûres, plus
fiables, plus rapides pour analyser et transmettre des signaux. Dans le domaine des communi-
cations, étalement de spectre, GSM, etc. en sont des exemples représentatifs.

Dans la suite, nous proposons quelques exemples.

1.2.1 Communication à étalement de spectre [6]

Considérons le système de traitement de la figure 1.2. L’émetteur envoie un message d_t , qui
est codé par multiplication avec un signal pseudo-aléatoire pn_t . Le résultat est un signal en bande
de base, noté tx_b , qui est ensuite modulé par une porteuse radio-fréquence RF et fournit le signal
transmis tx . A la réception, le signal reçu rx est d’abord démodulé pour produire un signal en
bande de base rx_b . En multipliant rx_b par le signal pseudo-aléatoire pn_r , on peut reconstituer le
message d_r .

Regardons ce système plus en détails, en faisant abstraction des blocs de modulation et de
démodulation. Considérons le signal à transmettre, d_t , binaire à valeurs dans $\{-1, +1\}$, de du-
rée symbole T_s , soit de fréquence-symbole $f_s = 1/T_s$. On dispose par ailleurs d’une séquence
binaire pseudo-aléatoire (très facile à générer avec un registre à décalage correctement câblé) de
fréquence-bit $f_n = 1/T_n = kf_s$ où $k \in \mathbb{N}$ et k grand.

Le principe de l’étalement de spectre (*spectrum spreading*) est montré à la figure 1.3. Le signal
émis, d_t a un spectre relativement étroit, dont la forme est un sinus cardinal au carré (voir dans la
suite de ce cours) dont le lobe principal a une largeur $2/T_s$. Le signal pseudo-aléatoire, pn_t a un
spectre de forme similaire, beaucoup plus large, de largeur égale à $2/T_n$. Le produit $tx_b = d_t pn_t$
a un encombrement spectral très similaire au signal pseudo-aléatoire. Ainsi, comme l’indique le
nom de la méthode, le signal est étalé sur un spectre très large par cette opération. A la réception,
si la transmission est sans bruit et après démodulation supposée idéale, on reçoit le signal en

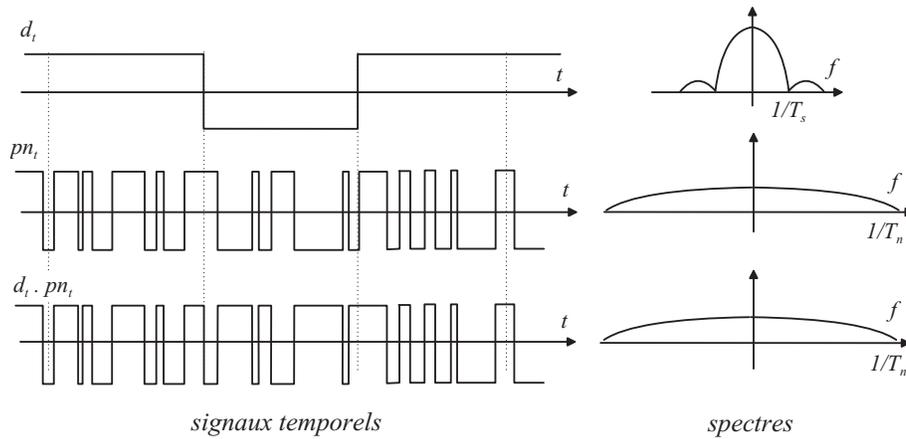


FIGURE 1.3 – Principe d’une communication à étalement de spectre

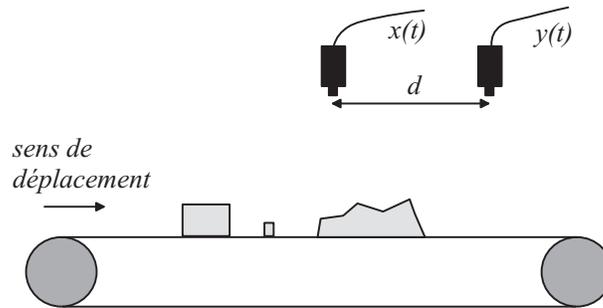


FIGURE 1.4 – Dispositif de mesure de vitesse d’un tapis convoyeur

bande de base $rx_b = d_t pn_t$. Si le récepteur possède la séquence pseudo-aléatoire $pn_r = pn_t$ avec synchronisation, on peut restituer le message binaire par simple multiplication :

$$\begin{aligned}
 rx_b pn_r &= (d_t pn_t) pn_r \\
 &= d_t (pn_t pn_r) \\
 &= d_t.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Cette étape constitue le désétalement de spectre (*spectrum despreading*). Si la transmission et la modulation/démodulation ont entraîné des perturbations (interférences) i , on reçoit :

$$rx_b = d_t pn_t + i. \tag{1.4}$$

Le désétalement de spectre donne alors (toujours en supposant $pn_r = pn_t$) :

$$\begin{aligned}
 rx_b pn_r &= (d_t pn_t) pn_r + i pn_r \\
 &= d_t + i pn_t.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

On remarque que le désétalement de spectre restitue le signal émis dans sa bande de base (il reconstruit le spectre), alors qu’il étale le spectre de l’interférence i . Ce principe améliore ainsi le rapport signal à bruit dans la bande de fréquence du signal utile, puisque l’énergie du bruit est dispersée sur une très large bande de fréquences.

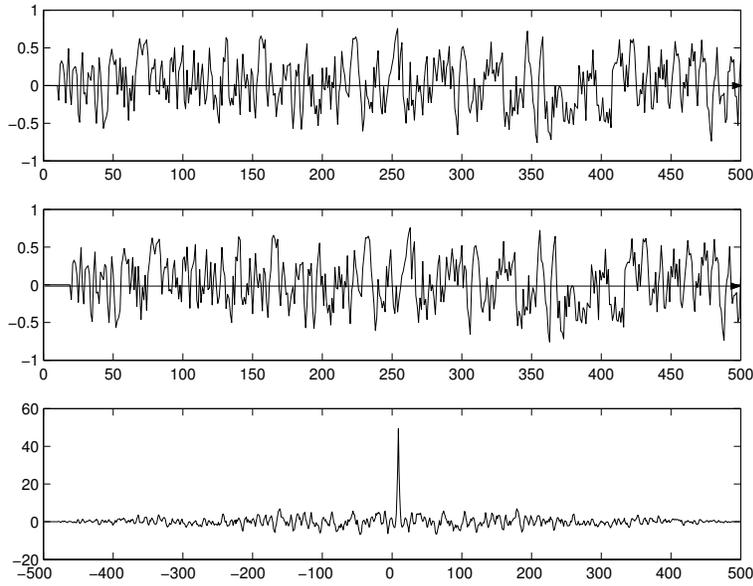


FIGURE 1.5 – Signaux $x(t)$ et $y(t)$ et leur intercorrélacion

1.2.2 Mesure par corrélation

On cherche à mesurer la vitesse de déplacement d'un tapis convoyeur d'objets, matières premières, fruits, etc. Pour cela, on place deux capteurs (caméras ou capteurs à ultra-sons, par exemple) à deux positions précises, séparées d'une distance d . Ces capteurs fournissent des signaux $x(t)$ et $y(t)$. Bien sûr, ces deux signaux doivent se ressembler, à un retard Δ près : le signal $y(t)$ doit être approximativement égal au signal $x(t)$ retardé de Δ , c'est-à-dire $x(t - \Delta) \simeq y(t)$. Le retard Δ permet de déduire la vitesse du tapis, par la relation :

$$\Delta = \frac{d}{v}, \quad (1.6)$$

où v est la vitesse du tapis.

En fait, on résout le problème autrement, en cherchant pour quel retard τ les signaux $x(t - \tau)$ et $y(t)$ sont les plus similaires. La mesure de similarité peut s'effectuer grâce à la fonction d'intercorrélacion :

$$\Gamma_{yx}(\tau) = \int_W y(t)x(t - \tau)dt, \quad (1.7)$$

où W est la fenêtre d'intégration. L'inter-corrélacion étant maximale lorsque la similarité est la plus grande, la détermination de Δ se fera en recherchant la position τ du maximum de la courbe $\Gamma_{yx}(\tau)$.

1.2.3 Filtre adapté

Cette méthode très connue de traitement du signal permet de détecter la présence d'un signal connu $s(t)$ dans du bruit. Elle est utilisée dans de nombreux systèmes. Par exemple, dans le cas d'un radar, on cherche à détecter la présence d'un objet. Pour cela, une antenne émettrice envoie un signal $s(t)$. En présence d'un objet à une distance d , le signal $s(t)$ est réfléchi par l'objet. Sur

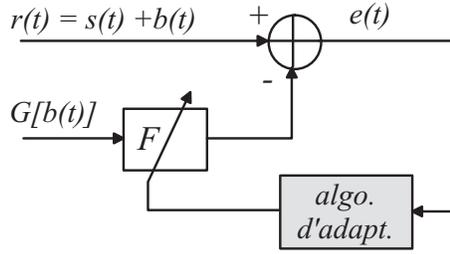


FIGURE 1.6 – Principe de la méthode de soustraction de bruit de Widrow

l'antenne réceptrice, on obtient donc un signal $r(t)$:

$$r(t) = As(t - 2\tau) + b(t), \quad (1.8)$$

où A représente l'atténuation qui varie en $1/d_2$, $b(t)$ est un bruit et τ représente le trajet aller-retour du signal, c'est-à-dire :

$$\tau \simeq \frac{2d}{c}, \quad (1.9)$$

où c représente la vitesse de la lumière dans l'air.

Le signal $s(t)$ étant connu, la solution consiste à filtrer le signal reçu $r(t)$ avec un filtre dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ a une forme adaptée au signal. On montre que (voir chapitre 7) la réponse impulsionnelle $h(t)$ doit être égale à :

$$h(t) = s(-t), \quad (1.10)$$

et que le filtre adapté s'apparente à une méthode de corrélation.

1.2.4 Filtrage de Widrow [11]

On mesure un signal $s(t)$ pollué par un bruit additif $b(t)$, non corrélé avec $s(t)$:

$$r(t) = s(t) + b(t), \quad (1.11)$$

On suppose que l'on dispose d'une référence $G[b(t)]$, version filtrée du bruit $b(t)$. Pour retrouver le signal $s(t)$, Widrow a proposé de procéder par soustraction, selon le schéma de la figure 1.6. On ajuste pour cela un filtre F qui permet d'estimer une approximation $\hat{b}(t)$ de sorte que l'erreur $e(t) = r(t) - \hat{b}(t)$ ne dépende plus de $b(t)$. En pratique, on ajuste les paramètres du filtre F de sorte que l'erreur $e(t)$ et le bruit $b(t)$ soient décorrélés, c'est-à-dire telle que :

$$R_{eb}(\tau) = E[e(t)b(t - \tau)] = 0, \quad \forall \tau. \quad (1.12)$$

Cette méthode a été inventée par Widrow pour extraire de façon non invasive le signal électrocardiographique (ECG) d'un fœtus dans le ventre de sa mère, à l'aide d'une électrode placée à la surface de l'abdomen et d'une autre placée sur la poitrine de la mère. Le capteur abdominal reçoit l'ECG du fœtus - très faible - pollué (notamment) par l'ECG de la mère et l'électrode sur la poitrine fournit un signal de référence de l'ECG de la mère.

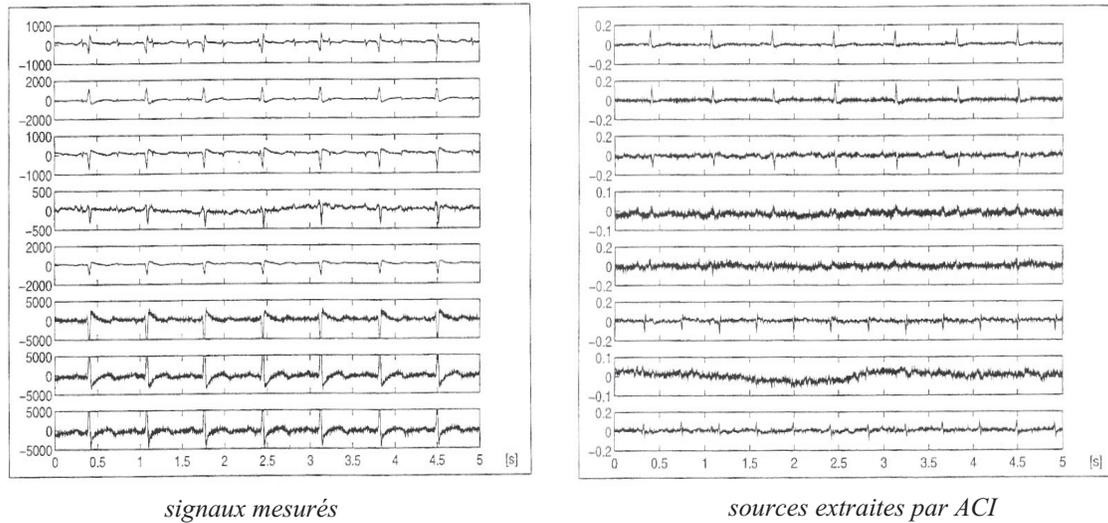


FIGURE 1.7 – Extraction non invasive de signaux électrocardiographiques du fœtus par ACI : signaux mesurés (à gauche), sources indépendantes extraites (à droite)

1.2.5 Séparation *aveugle* de sources [7, 3]

Dans le cas où il n'est pas possible de disposer d'une référence du bruit, la méthode de Widrow est impuissante. Au milieu des années 80, il a été montré que ce problème pouvait être résolu pourvu de disposer d'au moins autant d'observations (capteurs) que de sources et de supposer que les différents signaux à séparer sont statistiquement indépendants (et non plus simplement décorrélés). Cette méthode, connue sous le nom d'analyse en composantes indépendantes (ACI ou ICA pour *independent component analysis* [7, 2]), est très intéressante par son très large domaine d'applications : télécommunications, biomédical, réhaussement de parole, imagerie hyperspectrale en télédétection et astrophysique, réseaux de capteurs intelligents, etc.

Dans le cas le plus simple, on peut supposer que les mélanges sont linéaires et on observe :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t), \quad (1.13)$$

où \mathbf{x} est le vecteur de n observations (mélanges), \mathbf{s} est le vecteur de p sources (avec $p \leq n$, et au plus une source gaussienne) et \mathbf{A} est une matrice de mélange supposée de rang plein (régulière, dans le cas $n = p$). On montre alors qu'en ne connaissant que T échantillons des observations, $\mathbf{x}(t)$, $t = 1, \dots, T$, on peut estimer une matrice de séparation \mathbf{B} en minimisant un critère d'indépendance des sources estimées $\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$. En réalité, on montre que la matrice de séparation satisfait :

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{P}, \quad (1.14)$$

où \mathbf{D} et \mathbf{P} sont une matrice diagonale et une matrice de permutation, respectivement. Ce résultat indique que l'on peut séparer les sources, mais qu'on ne peut les retrouver qu'à une permutation près et qu'à un facteur d'échelle (un gain) près.

Sans entrer dans les détails, divers critères peuvent être utilisés pour exprimer l'indépendance mutuelle des sources estimées, par exemple l'information mutuelle du vecteur de sortie $I(\mathbf{y})$. De façon générale, la mise en oeuvre de ce critère exige l'utilisation de statistiques d'ordre supérieur à 2. Autrement dit, la décorrélation, suffisante dans la méthode de Widrow qui requiert une réf-



FIGURE 1.8 – Principe du filtrage homomorphique

rence, n'est plus suffisante dans ce cadre non informé, dit *aveugle*.

La figure 1.7 (à gauche) montre les 8 signaux recueillis par des électrodes placées sur l'abdomen d'une femme enceinte [5]. On voit que l'ECG (à une fréquence de l'ordre de 1 Hz) de la mère est très présent sur l'ensemble des traces; en revanche, il est difficile de voir l'ECG du fœtus. Après analyse en composantes indépendantes, on obtient les composantes indépendantes (à droite sur la figure 1.7) dont certaines sont faciles à interpréter. En effet, on remarque que l'ECG de la mère n'apparaît que sur les 3 premières sources, et que l'ECG du fœtus est très nettement présent dans les sources 6 et 8. Les autres composantes indépendantes sont plus difficiles à interpréter.

Au cours des 30 dernières années, de nombreux algorithmes de séparation de sources ont été développés et sont utilisés dans des domaines très divers [3] comme le traitement de signaux cérébraux, l'analyse de scènes acoustiques, l'imagerie hyperspectrale, les télécommunications, la conception de capteurs chimiques, etc.

1.2.6 Filtrage homomorphique

La luminance, $L_r(x, y)$, d'un point (x, y) d'un objet illuminé par une lumière incidente $L_i(x, y) \geq 0$, s'exprime comme le produit de deux quantités positives :

$$L_r(x, y) = \rho(x, y)L_i(x, y), \quad (1.15)$$

où $\rho(x, y) \geq 0$ est la réflectance du point de coordonnées (x, y) de l'objet. Fréquemment, la luminance de la lumière incidente n'est pas uniforme sur l'objet, et on observe un gradient de luminance dû à la position de la source. Pour isoler la réflectance, il faut donc éliminer la composante $L_i(x, y)$.

Considérons le logarithme de L_r :

$$\ln L_r(x, y) = \ln \rho(x, y) + \ln L_i(x, y). \quad (1.16)$$

En supposant que $L_i(x, y)$ varie lentement spatialement par rapport à la réflectance, on peut ensuite appliquer un filtre passe-haut spatial, F , sur le signal $\ln L_r(x, y)$. Après filtrage, on a alors :

$$F[\ln L_r(x, y)] = F[\ln \rho(x, y)] + F[\ln L_i(x, y)] \simeq F[\ln \rho(x, y)] \simeq \ln \rho(x, y). \quad (1.17)$$

Pour retrouver la réflectance, il suffit ensuite d'appliquer une transformation non linéaire exponentielle. Cette méthode, appelée filtrage homomorphique, est illustrée à la figure 1.8.

1.2.7 Vers un traitement multidimensionnel

Les signaux présentent une grande diversité, en particulier en ce qui concerne la dimension. Or, avec l'évolution des technologies (capteurs, calculateurs, etc.), le traitement de signal traite de plus en plus fréquemment de signaux multidimensionnels. Au-delà du signal 1D : signal audio, mesure électrique, signal reçu par une électrode en biomédical, on s'intéresse à des :

- signaux $2D$: image, représentation temps-fréquence des signaux,
- signaux $2D + t$: séquences vidéo,
- signaux $3D$: objets $3D$ (tomographie, etc.),
- signaux $3D + t$: séquence d'objets $3D$ (tomographie, etc.),
- signaux nD : qui peuvent recouvrir différentes formes, par exemple des :
 - signaux multi-capteurs (n capteurs) : réseaux d'antennes, signaux électroencéphalographique (EEG) ou magnétoencéphalographique (MEG) (jusqu'à 250 électrodes)
 - signaux multi-modaux, c'est-à-dire relatifs à plusieurs modalités physiques : signal audio/vidéo, association de signaux EEG, MEG et IRM (imagerie en résonance magnétique).

1.3 Organisation du document

Ce cours suppose des connaissances solides en mathématiques pour l'ingénieur : l'algèbre linéaire, l'intégration, l'opérateur de convolution, la transformée de Fourier et les probabilités sont les principaux outils qu'il convient de maîtriser.

1.3.1 Contenu

Consacré à la théorie du signal, ce cours décrit les outils mathématiques nécessaires pour manipuler des signaux déterministes ou aléatoires, c'est-à-dire les décrire, les caractériser et les comparer. Le chapitre 2 décrit les signaux et fonctions élémentaires. La classification des signaux est présentée au chapitre 3. Le chapitre 4 montre comment les signaux peuvent être décrits dans des espaces vectoriels, dits espaces de Hilbert. Le chapitre 5 est consacré à l'étude des signaux certains. Les outils pour la manipulation des signaux aléatoires sont l'objet du chapitre 6. Enfin, le chapitre 7, intitulé *Opérateurs fonctionnels*, présente quelques méthodes classiques de traitement du signal, comme applications des outils des chapitres précédents.

1.3.2 Références

Il existe de nombreux ouvrages de théorie du signal, en français comme en anglais. Ce cours s'est inspiré de plusieurs de ces ouvrages, et en particulier des livres suivants :

- F. De Coulon, Théorie et traitement des signaux, Dunod, 1984 [4]
- J. Max, J.-L. Lacoume, Méthodes et techniques de traitement du signal et application aux mesures physiques, Masson, Paris, 1996 [8]
- G. Blanchet, M. Charbit, Traitement numérique du signal, Hermès, Paris, 1998 [1]
- A. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, 1984 [9]
- L. Scharf, Statistical Signal Processing : detection, estimation and time series analysis, Addison-Wesley, 1991 [10]

L'ouvrage de De Coulon est d'accès facile. L'ouvrage d'A. Papoulis, bien qu'en anglais, est un ouvrage de référence, assez facile également. La plupart de ces ouvrages sont accessibles à la bibliothèque de Polytech Grenoble ou à la bibliothèque inter-universitaire. D'autres ouvrages correspondent aux méthodes de traitement du signal [10, 1]

Si vous voulez vous procurer ces ouvrages (dont certains sont épuisés), vous pouvez les rechercher chez les vendeurs de livres d'occasion ou sur les sites Internet spécialisés, généralement

à des tarifs très attractifs.

1.3.3 Avertissement

La théorie du signal comporte donc un grand nombre de définitions et d'outils nouveaux. A chaque cours, vous devrez parfaitement assimiler de nouvelles connaissances pour être capables de suivre la suite du cours. Pour cela, au risque d'être très vite dépassés, vous devez :

- apprendre très soigneusement les définitions,
- savoir vos formules, ou au moins savoir qu'elles existent. L'idéal est de les connaître par coeur, ce qui permet d'explorer plus vite des pistes dans la résolution de problèmes ; une solution pragmatique est de bien utiliser le formulaire fourni avec ce cours, et de le personnaliser régulièrement.

Chapitre 2

Signaux, fonctions et opérateurs de base

Ce chapitre présente la description mathématique de signaux élémentaires, souvent idéaux (en ce sens qu'il ne sont pas réalisables physiquement) mais très pratiques pour la description de modèles mathématiques. Tous ces modèles seront largement utilisés dans la suite de ce cours, et de façon plus générale en traitement du signal et des images.

2.1 Signaux usuels

2.1.1 Fonction *signe*

Définition 2.1.1 (Fonction Signe) La fonction signe, notée sgn est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$sgn(t) = \begin{cases} +1, & \text{si } t > 0, \\ -1, & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Par convention, on définit :

$$sgn(0) = c_0, \text{ avec } -1 \leq c_0 \leq +1. \quad (2.2)$$

Usuellement, on prend $sgn(0) = 0$ (figure 2.1 à gauche). Avec cette convention, la fonction sgn est une fonction impaire :

$$sgn(t) = -sgn(-t), \forall t. \quad (2.3)$$

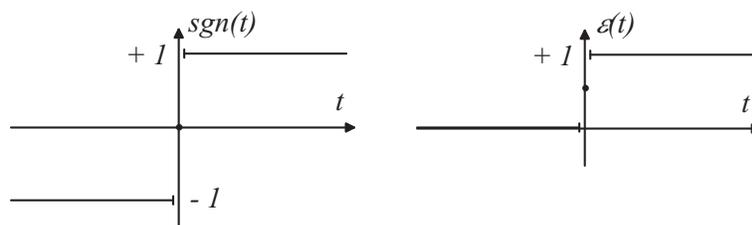


FIGURE 2.1 – Fonctions signe, $sgn(t)$, et échelon, $\epsilon(t)$

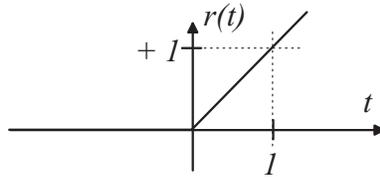


FIGURE 2.2 – Fonction rampe, $r(t)$

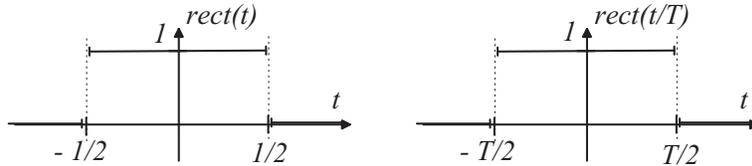


FIGURE 2.3 – Fonctions rectangle, de largeur unité (à gauche) et de largeur T (à droite)

2.1.2 Fonction échelon unité

Définition 2.1.2 (Fonction échelon unité) La fonction échelon unité, ou simplement échelon ou fonction de Heaviside, notée ϵ , est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$\epsilon(t) = \begin{cases} +1, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t < 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

avec, par convention, $\epsilon(0) = 1/2$.

Cette fonction est illustrée à la figure 2.1, à droite. On montre facilement les relations :

$$\begin{cases} \epsilon(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) + \frac{1}{2} \\ \operatorname{sgn}(t) = 2\epsilon(t) - 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

2.1.3 Fonction rampe

Définition 2.1.3 (Fonction rampe) La fonction rampe, notée r , est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$r(t) = \int_{-\infty}^t \epsilon(u) du. \quad (2.6)$$

2.1.4 Fonction rectangle ou porte

Définition 2.1.4 (Fonction rectangle unité) La fonction rectangle, ou fonction porte, de largeur 1, notée rect , est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$\operatorname{rect}(t) = \epsilon(t + 1/2) - \epsilon(t - 1/2). \quad (2.7)$$

On remarque que l'aire de la fonction rectangle de largeur unité vaut 1.

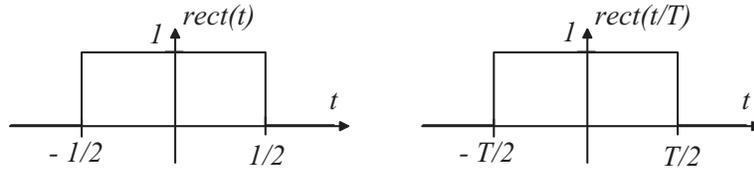


FIGURE 2.4 – Représentations simplifiées des fonctions rectangle de largeur unité et de largeur T

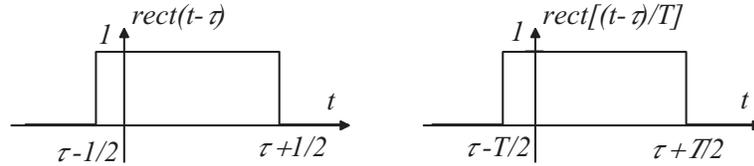


FIGURE 2.5 – Fonctions rectangle de largeur unité et de largeur T , translatées de τ

Définition 2.1.5 (Fonction rectangle de largeur T) La fonction rectangle, ou fonction porte, de largeur T , notée $rect_T$, est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$rect_T(t) = rect(t/T) = \epsilon(t/T + 1/2) - \epsilon(t/T - 1/2) = \epsilon(t + T/2) - \epsilon(t - T/2). \quad (2.8)$$

On remarque que l'aire de la fonction rectangle de largeur T vaut T . Ces deux fonctions sont illustrées à la figure 2.3. Pour simplifier la représentation, on représentera fréquemment ces fonctions sans tenir compte des discontinuités en $\pm 1/2$ ou $\pm T/2$ (figure 2.4).

Une fonction rectangle de largeur unité translatée de $+\tau$ s'écrit simplement $rect(t - \tau)$ (figure 2.5, à gauche). Elle vaut 1 sur l'intervalle $] \tau - 1/2, \tau + 1/2 [$ et 0 sur l'intervalle $] -\infty, \tau - 1/2 [\cup] \tau + 1/2, +\infty [$. De façon similaire, une fonction rectangle de largeur T , translatée de τ (figure 2.5, à droite) s'écrit :

$$rect\left(\frac{t - \tau}{T}\right). \quad (2.9)$$

La fonction rectangle est très utile pour exprimer mathématiquement une portion d'un signal de largeur T . Par exemple, on veut exprimer la portion du signal $x(t)$ dans l'intervalle $t \in [t_1, t_2]$ (Figure 2.6). La fonction rectangle sur cet intervalle a pour largeur $T = t_2 - t_1$ et est translatée de $\tau = (t_1 + t_2)/2$. On peut donc l'écrire :

$$rect\left(\frac{t - \tau}{T}\right) = rect\left(\frac{t - (t_1 + t_2)/2}{t_2 - t_1}\right). \quad (2.10)$$

Considérons maintenant le produit :

$$\tilde{x}(t) = x(t)rect\left(\frac{t - \tau}{T}\right). \quad (2.11)$$

Par définition de la fonction $rect$, cette fonction est égale à $x(t)$ sur l'intervalle $t \in [t_1, t_2]$ et nulle en dehors.

La fonction rectangle, utilisée dans le domaine fréquentiel, permettra aussi de définir des filtres idéaux, passe-bas, passe-haut ou passe-bande.

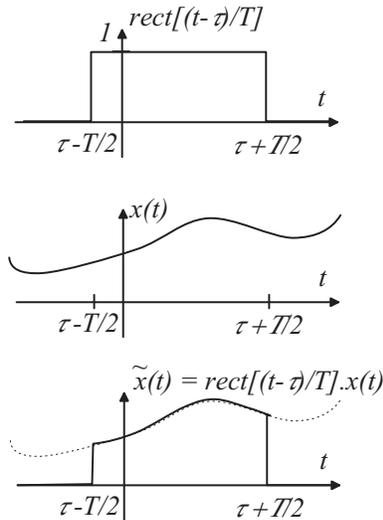


FIGURE 2.6 – Utilisation de la fonction rectangle pour prélever un morceau de signal

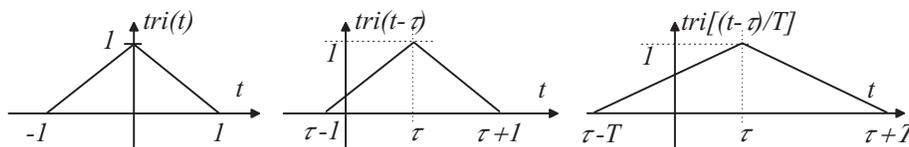


FIGURE 2.7 – Fonctions triangle unité (à gauche), triangle unité translatée de τ (au milieu) et triangle d'aire $2T$ translatée de τ (à droite)

2.1.5 Fonction triangle

Définition 2.1.6 (Fonction triangle) La fonction triangle unité, notée tri , est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Notons que l'aire de la fonction triangle unité vaut 1 et que la largeur de son support vaut 2. On peut également appliquer les opérateurs de translation et d'homotéthis à cette fonction :

- la fonction $tri(t - \tau)$ est une fonction triangle unité translatée de $+\tau$,
- la fonction $tri[(t - \tau)/T]$ est une fonction triangle de largeur $2T$ (ou d'aire égale à T) translatée de $+\tau$.

Cette fonction triangle est très usuelle. Nous verrons dans les chapitres suivants qu'elle intervient notamment dans le résultat du produit de convolution de deux fonctions rectangle, ou dans l'auto-corrélation d'un signal rectangle.

2.2 Impulsion de Dirac

La notion de distribution est un complément mathématique indispensable de la notion de fonction, notamment pour décrire des événements infiniment brefs mais de puissance finie non nulle ou

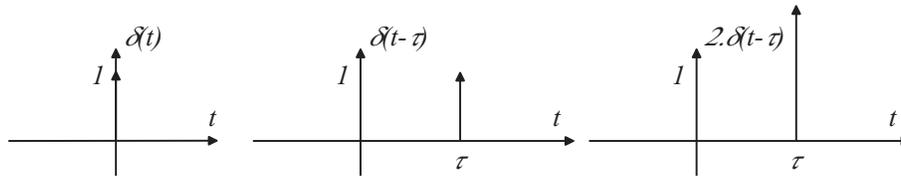


FIGURE 2.8 – Distributions de Dirac : unité (à gauche), translatée de τ (au milieu), translatée de τ et d’amplitude 2 (à droite)

le phénomène d’échantillonnage.

2.2.1 Distribution de Dirac

Définition 2.2.1 (Impulsion de Dirac) *La distribution ou impulsion de Dirac, notée $\delta(t)$, vérifie :*

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & \text{si } t \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) du = 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

On peut voir la distribution de Dirac comme la limite de fonctions, par exemple :

$$\begin{cases} \delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{tri}(t/T) \\ \delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}(t/T) \\ \delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{sinc}(t/T) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}. \end{cases} \quad (2.14)$$

2.2.2 Propriétés et règles opératoires

Représentation

La distribution de Dirac, $\delta(t)$, se représente par une flèche verticale d’amplitude 1 localisée en $t = 0$ (figure 2.8, à gauche). Sa version translatée de τ , notée $\delta(t - \tau)$, est représentée à la figure 2.8, au milieu.

Produit d’une fonction par un Dirac

Le produit d’une fonction $x(t)$ par une distribution de Dirac $\delta(t - t_0)$ s’écrit :

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0), \quad (2.15)$$

car la distribution $\delta(t - t_0)$ est nulle partout sauf en $t = t_0$.

Le produit d’une fonction $x(t)$ par la distribution de Dirac $\delta(t - t_0)$ permet donc de prélever une valeur (échantillon) de la fonction $x(t)$, plus précisément la valeur $x(t_0)$ en $t = t_0$.

Calcul de l’intégrale d’un produit avec un Dirac

En appliquant la règle du produit par une distribution de Dirac, on peut calculer facilement l’intégrale d’un produit d’une fonction par un Dirac :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt$$

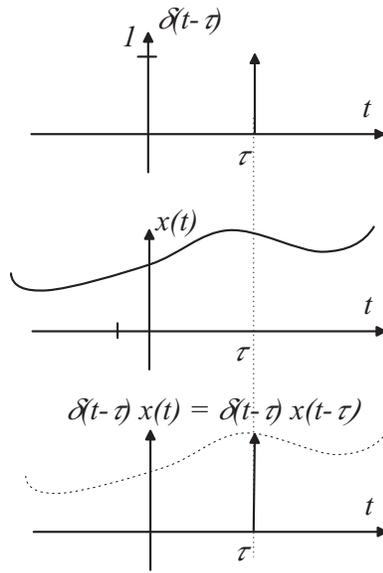


FIGURE 2.9 – Le produit d’une fonction $x(t)$ par $\delta(t - \tau)$ est égal à $x(t - \tau)$. Le produit par une distribution de Dirac permet de réaliser une opération élémentaire d’échantillonnage

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0)\delta(t - t_0)dt \\
 &= x(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt \\
 &= x(t_0).
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Peigne de Dirac

Pour échantillonner un signal avec une période d’échantillonnage régulière T , il est pratique de définir une suite d’impulsions de Dirac, périodique et de période T . Cette distribution, appelée *peigne de Dirac* et notée $\delta_T(t)$, est définie (figure 2.10) par :

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT). \tag{2.17}$$

Pour échantillonner une fonction $x(t)$, c’est-à-dire prélever des échantillons infiniment brefs, avec une période T , il suffit donc d’effectuer le produit de $x(t)$ par un peigne de Dirac :

$$\begin{aligned}
 x_e(t) &= x(t)\delta_T(t) \\
 &= x(t) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \right) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - kT)
 \end{aligned}$$

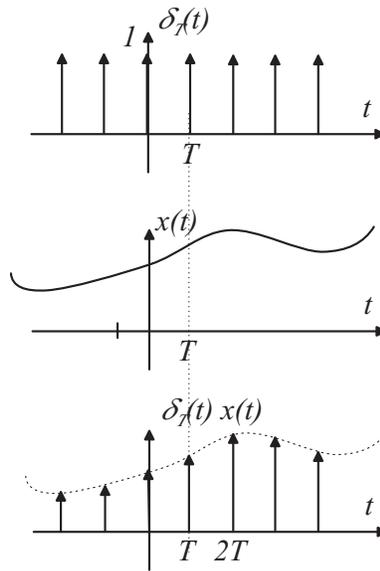


FIGURE 2.10 – Peigne de Dirac de période T (en haut). Cette distribution permet d’effectuer l’échantillonnage régulier (en bas) d’un signal $x(t)$ (au milieu) par simple produit $\delta(t)x(t)$

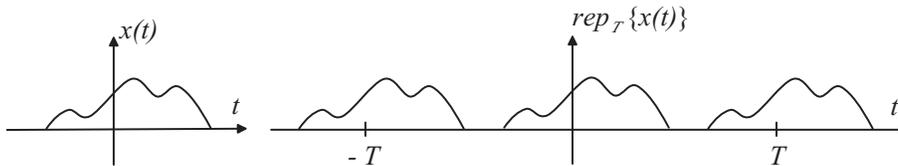


FIGURE 2.11 – Périodisation d’un signal avec l’opérateur $\text{rep}_T(t)$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\delta(t - kT). \quad (2.18)$$

Périodisation d’un signal

A partir d’un morceau de taille finie $x(t)$, on introduit aussi un opérateur de répétition, $\text{rep}_T\{x(t)\}$, qui permet de périodiser un signal avec une période de répétition T :

$$\text{rep}_T\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT) \quad (2.19)$$

Fonction *sinus cardinal*

Cette fonction est très courante en traitement du signal où elle intervient comme transformée de Fourier d’une fonction rectangle. Une fonction rectangle permet de représenter par exemple des opérateurs idéaux de filtrage. La fonction *sinus cardinal*, notée $\text{sinc}(u)$, est définie :

$$\text{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}. \quad (2.20)$$

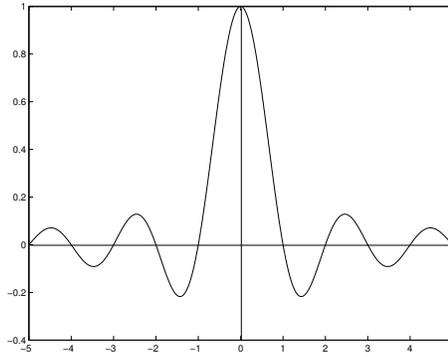


FIGURE 2.12 – Représentation graphique de la fonction $\text{sinc}(u)$

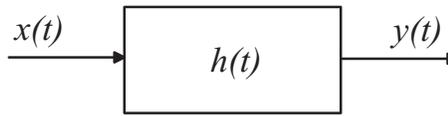


FIGURE 2.13 – Filtrage d'un signal $x(t)$

Sa représentation est donnée à la figure 2.12. On montre facilement les propriétés suivantes :

- la fonction *sinus cardinal* est paire : $\text{sinc}(u) = \text{sinc}(-u)$,
- $\text{sinc}(u) \rightarrow 1$ lorsque $u \rightarrow 0$,
- $\text{sinc}(u) = 0$ si $\sin(\pi u) = 0$, c'est-à-dire si $u = k \in \mathbb{Z}^*$.

Par ailleurs, on montre également¹ que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(u) du = 1, \quad (2.21)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(u) du = 1. \quad (2.22)$$

2.3 Produit de convolution

L'opérateur de convolution est aussi très courant. Il est associé à l'opération de filtrage d'un signal $x(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ (figure 2.13). La sortie du filtre, $y(t)$, vaut alors $y(t) = x(t) * h(t)$.

2.3.1 Définition

Définition 2.3.1 (Produit de convolution) *Le produit de convolution entre deux fonctions $x(t)$ et $h(t)$, noté par le symbole $*$, est défini par les intégrales :*

$$(x * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u) du \quad (2.23)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-v)h(v) dv \quad (2.24)$$

$$= (h * x)(t). \quad (2.25)$$

1. l'exercice est assez difficile par le théorème des résidus, mais très facile en utilisant les résultats du chapitre 5

On retiendra que le produit de convolution est commutatif. Souvent, en traitement du signal, on note de façon pratique la convolution de deux fonctions $x(t)$ et $h(t)$ sous la forme :

$$(x * h)(t) = x(t) * h(t). \quad (2.26)$$

On utilisera cette notation par la suite, malgré qu'elle soit parfois ambiguë comme on le verra plus loin.

Si $x(t)$ est la distribution de Dirac $\delta(t)$, on a simplement :

$$y(t) = \delta(t) * h(t) = h(t). \quad (2.27)$$

On remarque que $h(t)$ est la réponse du filtre excité par une impulsion de Dirac, d'où le nom de réponse impulsionnelle du filtre donné à $h(t)$.

2.3.2 La convolution en BD

A partir de la définition, on peut représenter l'opération de convolution de deux signaux de façon graphique simple, comme l'illustre la figure 2.14.

En effet, l'équation :

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du, \quad (2.28)$$

requiert la fonction $x(u)$, la fonction $h(t-u)$, et l'intégration du produit de ces deux fonctions sur \mathbb{R} pour chaque valeur de t .

Ainsi, $h(u)$ est la mémoire du système : le signal $x(u)$ est pondéré aux différents instants par $h(t-u)$. Dans la figure 2.14, la forme de $h(t)$ est exponentielle. Un filtre $h(u)$ à réponse impulsionnelle rectangulaire, de la forme $h(u) = \text{rect}(u - 1/2)$ aurait donné une pondération uniforme sur une fenêtre de durée 1.

2.3.3 Propriétés

A partir de la définition du produit de convolution, on montre facilement que le produit de convolution est

- commutatif : $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$,
 - associatif : $x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t)) = (x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t)$,
 - distributif par rapport à l'addition : $x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$.
- Ces démonstrations sont laissées au lecteur à titre d'exercice.

2.3.4 Commentaire sur les notations

En traitement du signal, la notation usuelle de la convolution de deux signaux, $x(t) * y(t)$, ne prête pas à confusion dans les cas simples. En revanche, pour des fonctions avec des arguments plus complexes, cette notation peut devenir ambiguë. Par exemple, le produit de convolution :

$$x(t-u) * y(u-2t) \quad (2.29)$$

est-il une fonction de u ou de t ? Autrement dit, l'intégration porte-t-elle sur t ou sur u ? Nul ne peut le dire !

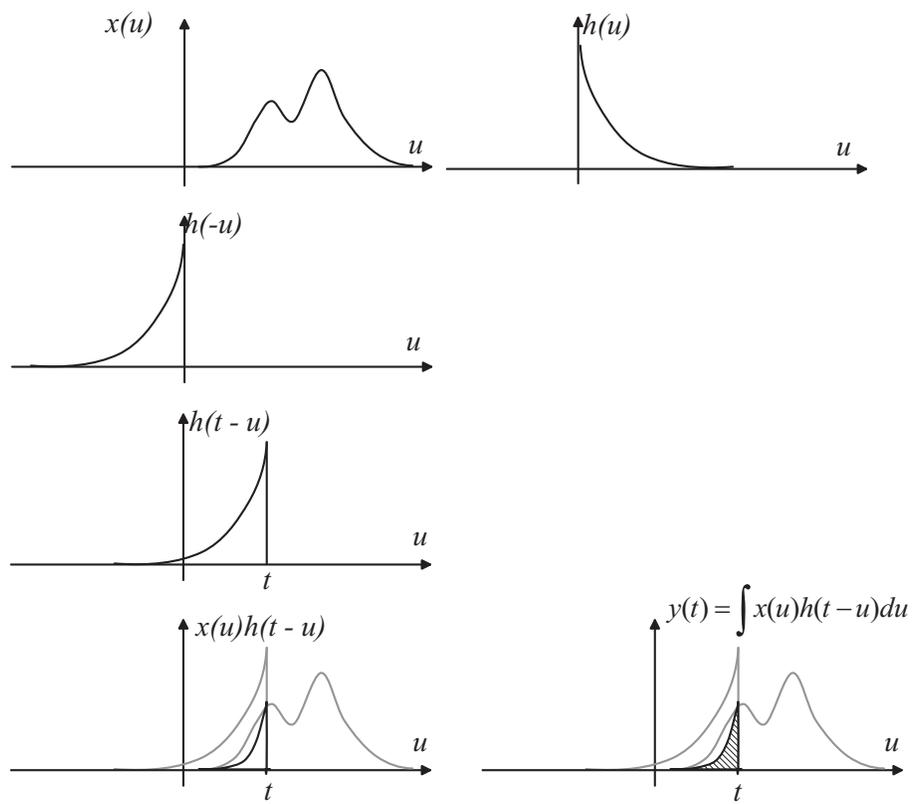


FIGURE 2.14 – Convolution en BD

Si ce produit est une fonction de t , u est donc un simple paramètre, et il faudrait de façon rigoureuse, définir les fonctions :

$$\begin{cases} x_1(t) &= x(t - u) \\ y_1(t) &= y(u - 2t) \end{cases} \quad (2.30)$$

On peut alors écrire, sans ambiguïté :

$$\begin{aligned} z(t) &= (x_1 * y_1)(t) \\ &= \int x_1(v)y_1(t - v)dv. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Or, d'après le changement de fonctions (2.30), on peut écrire :

$$\begin{aligned} x_1(v) &= x(v - u) \\ y_1(t - v) &= y(u - 2(t - v)), \end{aligned} \quad (2.32)$$

d'où le résultat :

$$z(t) = \int x(v - u)y(u - 2(t - v))dv. \quad (2.33)$$

Cette fonction est bien une fonction de t , dépendant du paramètre u .

De façon similaire, on pourrait aussi écrire, en utilisant la commutativité du produit de convolution :

$$\begin{aligned} z(t) &= (y_1 * x_1)(t) \\ &= \int y_1(v')x_1(t - v')dv' \\ &= \int y(u - 2v')x(t - v' - u)dv'. \end{aligned} \quad (2.34)$$

En posant $t - v' = v$, on vérifie facilement, après changement de variable, que les deux intégrales (2.33) et (2.34) sont identiques.

2.4 Valeurs caractéristiques d'un signal

Soit un signal $x(t)$ défini sur un intervalle $[t_1, t_2]$. On peut le caractériser par les grandeurs suivantes :

— Valeur moyenne :

$$\bar{x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt, \quad (2.35)$$

— Valeur quadratique, ou énergie :

$$W_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt, \quad (2.36)$$

— Valeur quadratique moyenne, ou puissance :

$$P_x = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt = \frac{W_x}{t_2 - t_1}, \quad (2.37)$$

— Valeur efficace :

$$x_{eff} = \sqrt{P_x}. \quad (2.38)$$

2.5 Exercices

2.5.1 Fonctions rectangle et triangle

Définitions de fonctions

- Donner l'équation d'une fonction rectangle d'amplitude A , de largeur $2T$ centrée au point $t = \tau$.
- Montrer que $\text{rect}(t) = \epsilon(t + 1/2) - \epsilon(t - 1/2)$.
- Montrer que $\text{rect}(t/T) = \epsilon(t + T/2) - \epsilon(t - T/2)$.
- Exprimer à l'aide de seules fonctions sgn la fonction $x(t) = A \text{rect}(\frac{t-t_0-T/2}{\Delta})$.

Calcul d'intégrales

- Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} A \text{rect}(\frac{t}{\Delta}) dt$.
- Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} A \text{tri}(\frac{t}{\Delta}) dt$.
- Calculer la valeur moyenne de $x(t) = \text{rep}_T(A \text{rect}(\frac{t}{\Delta}))$.
- Calculer la valeur moyenne de $y(t) = \text{rep}_T(A \text{tri}(\frac{t}{\Delta}))$.

Calculer la valeur moyenne \bar{x} , la valeur quadratique VQ_x , la valeur quadratique moyenne \bar{x}^2 et la valeur efficace VE_x de la fonction $x(t) = A \text{tri}(t/T)$ sur l'intervalle $[-T, +T]$.

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(u) du = 1$ où $\text{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$ (On utilisera la méthode de résidus. Cet exercice est assez long et difficile).

2.5.2 Propriétés des produits de convolution

Montrer les propriétés suivantes :

- $x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$,
- $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$,
- $x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_1 - t_2)$,
- $\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|}$.

Montrer les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité par rapport à l'addition de l'opérateur de convolution.

2.5.3 Calcul de produits de convolution

1. Calculer et tracer les produits de convolution des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ suivantes :
 - $x(t) = A[\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)]$ et $y(t) = B(\delta(t) + \frac{1}{2}[\delta(t + t_1) + \delta(t - t_1)])$
 - $x(t) = \cos(\frac{\pi t}{T}) \text{rect}(\frac{t}{T})$ et $y(t) = A \delta_T(t)$.
2. Calculer le produit de convolution de $x(t) = A \epsilon(t)$ avec le filtre $h(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau) \epsilon(t)$.
3. Calculer le produit de convolution $\text{rect}(t/T) * \text{rect}(t/T)$.
4. Calculer le produit de convolution $\text{rect}(t/T_1) * \text{rect}(t/T_2)$, avec $T_1 > T_2$.
5. Calculer le produit de convolution $x(t) = \sin(\frac{2\pi t}{T})$ et de $y(t) = \text{rect}(t/\theta)$.
6. Calculer le produit de convolution $x(t) = \text{tri}(\frac{t}{T})$ et de $y(t) = \text{rect}(t/T)$.

7. Calculer le produit de convolution des deux fonctions $x(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-i} \delta(t-iT)$ et $y(t) = \sum_{j=0}^2 b_j \delta(t-jT)$ avec $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ et $b_2 = 1$.
8. Calculer le produit de convolution des deux fonctions $x(t) = \sum_{i=0}^4 \delta(t-iT')$ et $y(t) = \delta_T(t)$, avec $5T = 4T'$.

Chapitre 3

Classification des signaux

Ce chapitre considère différentes propriétés des signaux. Ces propriétés seront très importantes pour la classification de signaux et, en conséquence, leur modélisation, les opérations possibles, la définition de mesures adaptées, etc.

3.1 Signaux physiques et modèles

3.1.1 Signaux réalisables

Un signal est le résultat d'un système physique réel, qui est donc réalisable, ce qui induit plusieurs propriétés :

- l'énergie du signal est bornée,
- l'amplitude du signal est bornée,
- l'amplitude du signal est une fonction continue, en raison de l'inertie du système,
- le spectre du signal est borné et tend vers 0 lorsque la fréquence tend vers l'infini.

3.1.2 Modèle

Les modèles de signaux sont des représentations mathématiques (fonctions réelles ou complexes, fonctionnelles, etc.) qui reposent fréquemment sur des hypothèses simplificatrices (parfois fausses !) mais permettant d'effectuer des calculs théoriques.

Par exemple :

- un échantillon d'énergie finie mais infiniment bref n'est pas réalisable ; il est cependant pratique d'utiliser une impulsion de Dirac pour représenter une impulsion de durée très brève,
- un signal sinusoïdal $x(t) = \sin \omega t$ n'est pas réalisable, car un signal produit par un système physique réel ne peut pas exister de $-\infty$ à $+\infty$; c'est cependant un modèle mathématique très usuel.

Le modèle est donc une approximation de la réalité, dans lequel on considère les propriétés importantes dans le contexte de l'étude. L'intérêt du modèle dépend donc de la qualité de l'approximation et de sa facilité d'emploi, dans un contexte donné.

3.1.3 Classes de signaux

On peut classer les signaux selon différentes approches, ce qui induit des recouvrements entre les classes ainsi définies.

Par exemple, on peut considérer :

- le caractère déterministe (ou certain) ou aléatoire des signaux,
- le caractère énergétique : signaux à énergie finie ou à puissance moyenne finie,
- le caractère continu ou discret du signal $x(t)$, c'est-à-dire de son argument t (échantillonnage) ou de sa valeur (quantification),
- le caractère spectral : signaux basse ou haute fréquence, large bande, bande étroite ; signaux blancs ou en $1/f$, etc.
- la dimension des signaux :
 - signaux 1D : $x(t)$ (signal reçu par un microphone monophonique),
 - signaux 2D : $I(x, y)$ (image, signal reçu par un microphone stéréophonique)
 - signaux 3D : $I(x, y, z)$ (image volumique en tomographie ou IRM, $I(x, y, f)$ (image hyperspectrale), $I(x, y, t)$ (séquence d'images 2D),
 - signaux 4D ou 3D + t (séquence d'images 3D, en IRM par exemple),
 - signaux N-D, typiquement reçus par un réseaux de capteurs (réseaux d'antennes, ou de microphones).

3.2 Signaux certains et aléatoires

3.2.1 Définitions

Définition 3.2.1 (Signal certain) *Un signal $x(t)$ est certain (ou déterministe) s'il peut être décrit par un modèle mathématique.*

Définition 3.2.2 (Signal aléatoire) *Un signal $x(t)$ est aléatoire si son évolution est imprévisible et ne peut être décrite que par des grandeurs et méthodes statistiques.*

Remarque 3.2.1 *La somme (ou le produit, ou toute autre opération) d'un signal déterministe et d'un signal aléatoire est donc un signal aléatoire.*

A l'intérieur de chacune de ces deux grandes classes, on peut définir d'autres propriétés.

Pour les signaux déterministes, on considère :

- les signaux périodiques ou non périodiques,
- les signaux périodiques peuvent être sinusoïdaux, composites ou pseudo-aléatoires,
- les signaux non-périodiques peuvent être quasi-périodiques ou transitoires

En ce qui concerne les signaux aléatoires, on peut définir :

- les signaux stationnaires ou non stationnaires,
- les signaux stationnaires peuvent être ergodiques ou non ergodiques,
- les signaux non stationnaires peuvent être cyclo-stationnaires ou quelconques.

L'objet de ce chapitre est de définir de façon précise ces principales propriétés.

3.2.2 Signaux déterministes

Comme nous l'avons déjà souligné, ces signaux peuvent être simplement modélisés par des fonctions mathématiques.

Signaux périodiques

Définition 3.2.3 (Signal périodique) Un signal $x(t)$ est périodique s'il existe un réel $T > 0$, tel que :

$$x(t) = x(t + kT), \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Si T est le plus petit réel satisfaisant à (3.1), T est appelée période du signal.

Quelques exemples de signaux périodiques : les signaux sinusoïdaux, la somme ou le produit de signaux sinusoïdaux dont le rapport des périodes est rationnel ($T_1/T_2 \in \mathbb{Q}$).

Signaux quasi-périodiques

Les signaux quasi-périodiques sont obtenus par la somme ou le produit de signaux sinusoïdaux de périodes incommensurables, c'est-à-dire dont le rapport n'est pas rationnel. Ainsi, le signal :

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T_1}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{T_2}\right), \quad (3.2)$$

avec $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$, est quasi-périodique.

Notations complexes

Il est souvent commode de représenter le signal réel sinusoïdal :

$$x(t) = A \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad (3.3)$$

par la partie imaginaire d'une fonction exponentielle complexe :

$$z(t) = A \exp\left(j \frac{2\pi}{T} t\right). \quad (3.4)$$

L'intérêt de cette notation réside dans les propriétés de calculs remarquables de la fonction exp.

De plus, en appliquant la formule d'Euler, on peut écrire (en notant z^* le complexe conjugué de z) :

$$\begin{aligned} jA \sin \frac{2\pi}{T} t &= \frac{1}{2}(z(t) - z^*(t)) \\ &= \frac{A}{2} \exp\left(j \frac{2\pi}{T} t\right) - \frac{A}{2} \exp\left(-j \frac{2\pi}{T} t\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

On peut donc voir le signal $x(t)$ comme la composition (somme) de deux *phaseurs* conjugués, l'un tournant dans le sens direct à la pulsation $\omega = 2\pi/T$ et l'autre à $-\omega = -2\pi/T$. Pour tenir compte de ces rotations de sens opposés, on parle de fréquences positives et négatives, mais il est clair que ce sont des notions purement formelles (liées au modèle complexe) qui n'ont aucune signification physique.

3.2.3 Signaux aléatoires

Définition 3.2.4 (Signal stationnaire) Un signal aléatoire $x(t)$ est stationnaire, si ses caractéristiques statistiques sont invariantes dans le temps.

Définition 3.2.5 (Signal stationnaire à l'ordre n) Un signal aléatoire $x(t)$ est stationnaire à l'ordre n , si ses caractéristiques statistiques sont invariantes dans le temps, jusqu'à l'ordre n inclus.

Exemple 3.2.1 Un signal aléatoire $x(t)$ est stationnaire à l'ordre 2, si sa moyenne, sa variance et sa fonction d'auto-corrélation ne dépendent pas du temps.

Définition 3.2.6 (Signal ergodique) Un signal aléatoire $x(t)$ est ergodique si les valeurs moyennes statistiques (moyennes d'ensemble) sont égales aux valeurs moyennes temporelles (sur une réalisation).

Cette propriété est très importante en pratique, car elle permet d'estimer la moyenne statistique par une moyenne temporelle sur une seule réalisation :

$$E[x(t)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt \quad (3.6)$$

Les caractéristiques des signaux aléatoires sont mesurées sur des temps d'observation finie. En pratique, la stationnarité ou l'ergodicité seront considérées sur la fenêtre d'observation.

3.3 Energie et puissance

3.3.1 Définitions

En électricité, on définit la puissance instantanée, $p(t)$, dans un dipôle, comme le produit de la tension $v(t)$ par le courant $i(t)$ circulant dans le dipôle :

$$p(t) = v(t)i(t). \quad (3.7)$$

Si le dipôle est une simple résistance R , à chaque instant t on a $v(t) = Ri(t)$, d'où l'expression :

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R}. \quad (3.8)$$

L'énergie dissipée dans le dipôle entre deux instants t_1 et t_2 vaut alors :

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2(t) dt, \quad (3.9)$$

et la puissance moyenne sur l'intervalle est égale à :

$$P(t_1, t_2) = \frac{W(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt. \quad (3.10)$$

Définition 3.3.1 (Energie et puissance moyenne sur un intervalle) Par analogie ¹, on appelle énergie (normalisée) ou puissance moyenne (normalisée) d'un signal réel $x(t)$ sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, les grandeurs suivantes :

$$W_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt, \quad (3.11)$$

et :

$$P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt. \quad (3.12)$$

La valeur efficace du signal $x(t)$ est égale à $\sqrt{P_x(t_1, t_2)}$.

1. car il y a un facteur qui dépend de la nature de x : courant, tension, etc.

Dans la définition précédente, l'adjectif *normalisé* est précisé pour souligner que l'énergie ou la puissance sont définies à un facteur près qui dépend de la nature du signal (courant ou tension, dans le cas d'un signal électrique).

Finalement, on peut définir l'énergie totale et la puissance moyenne totale d'un signal, c'est-à-dire sur \mathbb{R} .

Définition 3.3.2 (Energie et puissance moyenne totale d'un signal sur \mathbb{R}) On appelle énergie totale ou puissance moyenne totale d'un signal réel $x(t)$ les grandeurs suivantes, si elles existent :

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt, \quad (3.13)$$

et :

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt. \quad (3.14)$$

La valeur efficace du signal $x(t)$ est égale à $\sqrt{P_x}$.

Cas de signaux complexes. Dans le cas de signaux complexes, dans les intégrales, on remplace $x^2(t)$ par $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$.

Cas des signaux périodiques. Dans le cas de signaux périodiques, la puissance moyenne totale est égale à la puissance moyenne sur une période.

3.3.2 Signaux à énergie finie

Définition 3.3.3 (Signal à énergie finie) Un signal $x(t)$ est à énergie finie si l'intégrale suivante existe,

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \quad (3.15)$$

c'est-à-dire si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty. \quad (3.16)$$

Les signaux à énergie finie sont aussi appelés signaux de carré sommable ou de carré intégrable.

Exemple 3.3.1 Le signal $x(t) = \text{rect}(t/\Delta)$ est un signal à énergie finie. En effet, son énergie est égale à :

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} dt = \Delta. \quad (3.17)$$

Sa puissance moyenne P_x est donc nulle.

Conséquence. Un signal à énergie finie a une puissance moyenne nulle.

3.3.3 Signaux à puissance moyenne finie

Définition 3.3.4 (Signal à puissance moyenne finie) Un signal $x(t)$, définie sur \mathbb{R} , est à puissance moyenne finie sur cet intervalle si :

$$0 < P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty. \quad (3.18)$$

La définition exclut le cas de signaux à puissance moyenne nulle, qui correspond à des signaux à énergie finie.

Exemple 3.3.2 Le signal $x(t) = \sin(\omega t)$ est un signal à puissance moyenne finie sur \mathbb{R} . En effet, $|x(t)|^2 = \sin^2(\omega t) = (1 - \cos \omega t)/2$, et en intégrant :

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (1 - \cos \omega t) dt = \frac{1}{2} \quad (3.19)$$

En revanche, l'intégrale W_x diverge : le signal n'est donc pas à énergie finie.

3.4 Classification spectrale

L'analyse spectrale, par transformée de Fourier (TF), conduit à considérer le spectre des signaux, c'est-à-dire leur représentation dans le domaine fréquentiel, comme une représentation duale, équivalente d'un point de vue de l'information contenue.

On appelle largeur de bande, $B = f_2 - f_1$, le domaine des fréquences où le spectre a des valeurs non nulles.

Un signal dont le spectre est nul en dehors d'une bande de fréquence donnée est appelé signal à bande limitée, ou signal à spectre à support borné.

La figure 3.1 donne quelques exemple de signaux à bande limitée.

3.5 Autres propriétés

3.5.1 Variables continues ou discrètes

La nature continue ou discrète d'un signal $x(t)$ peut être considérée pour l'amplitude ou pour la variable t . Après conversion analogique/numérique, l'amplitude du signal est discrète : on parle de quantification (*quantization*). En raison de l'échantillonneur-bloqueur, le signal numérique est aussi discrétisé en t , on parle alors d'échantillonnage (*sampling*).

3.5.2 Parité

Un signal déterministe $x(t)$ est pair si $x(t) = x(-t)$; il est impair si $x(t) = -x(-t)$. On peut remarquer qu'il est toujours possible de décomposer un signal $x(t)$ en la somme d'un signal pair et d'un signal impair :

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t), \quad (3.20)$$

avec :

$$\begin{cases} x_p(t) &= \frac{x(t)+x(-t)}{2}, \\ x_i(t) &= \frac{x(t)-x(-t)}{2}. \end{cases} \quad (3.21)$$

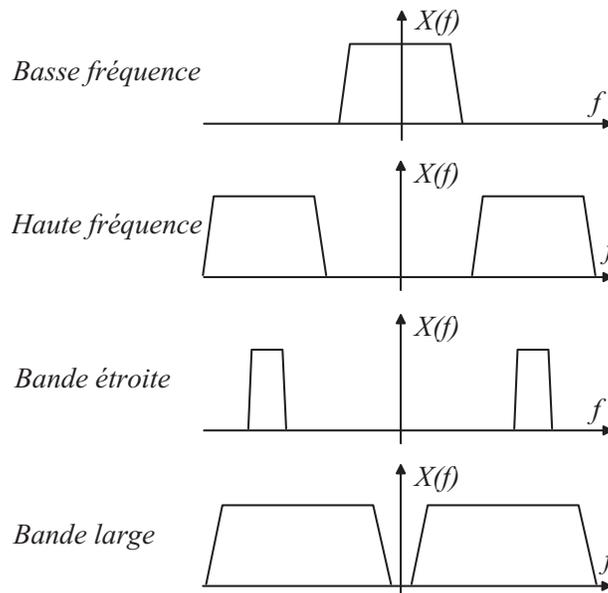


FIGURE 3.1 – Quelques exemples de spectres de signaux à bande limitée

3.5.3 Causalité

Définition 3.5.1 (Signal causal) *Un signal $x(t)$ est causal s'il est nul pour toute valeur négative de t .*

On peut montrer qu'un signal réel causal est donc tel que $x_i(t) = x_p(t)\text{sgn}(t)$.

Exemple 3.5.1 *Généralement, un filtre réalisable, de réponse impulsionnelle $h(t)$, est causal, c'est-à-dire que $h(t) = 0, \forall t < 0$.
En traitement d'images, les filtres sont non causaux car la valeur filtrée d'un pixel $I(x, y)$ dépend généralement de tous ses voisins.*

3.6 Exercices

3.6.1 Classification de signaux

Soient $x(t)$ un signal déterministe et $b(t)$ un signal aléatoire. Préciser la nature déterministe ou aléatoire des signaux suivants.

1. $x_1(t) = Ax(t)$, où A est un gain réel
2. $x_2(t) = x(t) \sin \omega t$,
3. $x_3(t) = x(-t)\epsilon(t)$,
4. $x_4(t) = x(t) + b(t)$,
5. $x_5(t) = |b(t)|$,
6. $x_6(t) = x(t)b(t)$,
7. $x_7(t) = x(t)b(t)/|b(t)|$.

3.6.2 Classification énergétique de signaux simples

Déterminer si les signaux suivants sont à énergie finie ou à puissance finie. Calculer pour chacun l'énergie et la puissance moyenne totale.

1. $x_1(t) = A \text{rect}(t)$,
2. $x_2(t) = A \sin \omega t$,
3. $x_3(t) = A \epsilon(t) \sin \omega t$,
4. $x_4(t) = \epsilon(t)$,
5. $x_5(t) = A \exp(-at) \epsilon(t)$, où $a > 0$,
6. $x_6(t) = A \exp(-at)$,
7. $x_7(t) = A \text{tri}(t/T)$.

3.6.3 Puissance moyenne d'un signal périodique

On considère le signal périodique $x(t) = A \sin(2\pi t/T_0)$.

1. Calculer la puissance moyenne, $P(t, T)$, du signal sur un intervalle de mesure T .
2. Montrer que la puissance moyenne, lorsque $T \rightarrow +\infty$, est égale à celle calculée sur une période T_0 .
3. Pour quelles autres valeurs de l'intervalle de mesure, obtient-on le même résultat ?

3.6.4 Classification spectrale des signaux

Soit $b(t)$ un bruit blanc à large bande. Indiquer si les signaux suivants sont des signaux à basses fréquences (BF), à hautes fréquences (HF), à large bande ou à bande étroite.

1. $x_1(t) = Ab(t)$, où A est un gain réel,
2. $x_2(t) = A \sin \omega t$.

Chapitre 4

Représentation vectorielle de signaux

4.1 Espace de signaux

4.1.1 Représentation discrète

On peut représenter un signal sur une base de signaux (fonctions) déterminés, $\psi_k(t)$, $k = 1, \dots, K$:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K a_k \psi_k(t). \quad (4.1)$$

Le vecteur $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_K)^T$ est une représentation du signal $x(t)$ dans la base $\Psi = \{\psi_1(t), \dots, \psi_K(t)\}$.

Remarque 4.1.1 — Dans le cas général, la base Ψ est de dimension infinie ;

- Pour certaines classes de signaux, on peut chercher des approximations comportant un nombre limité de signaux de base $\psi_k(t)$;
- La représentation discrète \mathbf{a} est l'unique moyen d'aborder le traitement numérique du signal.

4.1.2 Espace vectoriel de fonctions

Définition 4.1.1 (Espace vectoriel) Etant donné un corps commutatif \mathcal{C} d'élément neutre 0 et e , on dit qu'un ensemble \mathcal{E} muni d'une opération interne (notée \oplus) et d'une opération externe dont le domaine d'opérateurs est \mathcal{C} , a une structure d'espace vectoriel sur \mathcal{C} si :

- \mathcal{E} est un groupe commutatif pour son opération interne,
- l'opération externe est telle que, pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\lambda \in \mathcal{C}$ et $\mu \in \mathcal{C}$, on ait :

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \quad \text{et} \quad ex = x, \quad (4.2)$$

- L'opération externe est distributive par rapport à l'addition sur le corps \mathcal{C} et par rapport à l'opération interne dans \mathcal{E} :

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x \oplus \mu x \quad \text{et} \quad \lambda(x \oplus y) = \lambda x \oplus \lambda y. \quad (4.3)$$

Le nombre maximum de vecteurs de la base est appelé dimension de l'espace.

Un espace vectoriel \mathcal{E} est normé si on peut définir une norme, c'est-à-dire une application de \mathcal{E} dans \mathbb{R}^+ , qui à tout vecteur \vec{x} de \mathcal{E} associe $\|\vec{x}\|$. La norme possède les propriétés suivantes :

- $\forall \vec{x}, \|\vec{x}\| \geq 0,$
- $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0},$
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}), \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$

Un espace vectoriel est dit métrique si à tout couple de vecteurs (\vec{x}, \vec{y}) est associé un réel $d(\vec{x}, \vec{y})$ tel que :

- $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0,$
- $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$
- $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x}).$

La mesure $d(\vec{x}, \vec{y})$ est appelée distance. Une distance usuelle est obtenue à partir de la norme par :

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad (4.4)$$

Une suite infinie $\{\vec{x}_n\}$ d'éléments d'un espace vectoriel métrique converge vers un vecteur \vec{x} de cet espace si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\vec{x}_n, \vec{x}) = 0. \quad (4.5)$$

Un espace vectoriel normé dans lequel toute suite est convergente est dit complet. On l'appelle aussi espace de Banach.

Définition 4.1.2 (Espace de Hilbert) *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel normé complet (espace de Banach) dont la norme $\|\cdot\|$ découle d'un produit scalaire ou hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$, par la formule $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$.*

Un espace de Hilbert est la généralisation en dimension quelconque d'un espace vectoriel euclidien ou hermitien.

Les différentes métriques possibles (distances) définissent divers types de convergence.

4.1.3 Espace de signaux

Soit \mathcal{E}_K un espace de dimension K et $\mathcal{B} = \{\psi_1(t), \dots, \psi_K(t)\}$ une base de cet espace. Tout signal $x(t)$ a une représentation unique dans la base \mathcal{B} :

$$x(t) = \sum_{k=1}^K a_k \psi_k(t), \quad (4.6)$$

où les a_k sont éléments de \mathbb{R} ou de \mathbb{C} .

Les coefficients (a_1, \dots, a_K) définissent un point de coordonnées (a_1, \dots, a_K) par rapport à la base \mathcal{B} : (ψ_1, \dots, ψ_K) est donc une représentation du signal $x(t)$ par rapport à la base \mathcal{B} .

4.1.4 Distance entre deux signaux

La représentation vectorielle de signaux dans un espace vectoriel métrique permet de comparer des signaux en mesurant leur distance.

Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ dont les représentations (dans la même base \mathcal{B}) sont :

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow \vec{x} = (x_1, \dots, x_K)^T, \\ y(t) &\rightarrow \vec{y} = (y_1, \dots, y_K)^T, \end{aligned} \quad (4.7)$$

On peut alors définir la distance entre les signaux :

$$d(x(t), y(t)) = d(\vec{x}, \vec{y}). \quad (4.8)$$

Par exemple, si d est la distance euclidienne, on a simplement :

$$d(x(t), y(t)) = d(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_k |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (4.9)$$

Par analogie, on peut définir la distance entre deux signaux sur un intervalle T par :

$$d_2(x(t), y(t)) = \left(K \int_T |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (4.10)$$

où K est une constante de normalisation. Typiquement $K = 1$ ou $K = 1/T$. Cette distance est appelée distance en moyenne quadratique.

On peut bien sûr définir d'autres distances, par exemple :

$$\begin{aligned} d_1(x(t), y(t)) &= K \int_T |x(t) - y(t)| dt, \\ d_p(x(t), y(t)) &= \left(K \int_T |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p}, \\ d_\infty(x(t), y(t)) &= KT \sup\{|x(t) - y(t)|; t \in T\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pour des signaux binaires, on utilise la distance de Hamming :

$$d_H(x(t), y(t)) = \sum_{k=1}^K x_k \oplus y_k, \quad (4.12)$$

où x_k et y_k sont des éléments de $\{0, 1\}$ et \oplus représente l'opérateur OU exclusif. Cette distance mesure le nombre de bits différents entre x et y .

4.1.5 Espace L^2 des signaux à énergie finie

L'ensemble des signaux à énergie finie (ou de carré sommable) sur un intervalle $[t_1, t_2]$ forme un espace noté $L^2(t_1, t_2)$ dont la norme est définie par :

$$\|x\| = \left(\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (4.13)$$

Le carré de la norme, $\|x\|^2$, est donc égal à l'énergie du signal.

La distance entre deux signaux x et y est alors définie par la distance euclidienne :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\int_{t_1}^{t_2} |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (4.14)$$

Dans $L^2(t_1, t_2)$, on dit qu'un signal $x(t)$ converge en moyenne quadratique vers $y(t)$ si $d(x, y) \rightarrow 0$.

L'exposant 2 dans $L^2(t_1, t_2)$ indique la métrique utilisée et non pas la dimension.

4.2 Fonctions orthogonales

4.2.1 Produit scalaire de signaux dans $L^2(t_1, t_2)$

Soient deux vecteurs $\vec{x} = (x_1, \dots, x_K)^T$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_K)^T$ dans une base \mathcal{B} , on peut définir le produit scalaire des vecteurs :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{k=1}^K x_k y_k^*, \quad (4.15)$$

où * indique la conjugaison complexe.

Par analogie, soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, éléments de $L^2(t_1, t_2)$, on peut définir le produit scalaire par :

$$\langle x, y \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y(t)^* dt. \quad (4.16)$$

On remarque que $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$. En revanche, cette définition possède la symétrie hermitienne. On a en effet :

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*. \quad (4.17)$$

Par ailleurs, en raison de la définition ci-dessus et de la linéarité de l'intégrale, le produit scalaire de sommes de signaux se développe facilement selon la règle de calcul :

$$\langle a_1 x_1 + a_2 x_2, b_1 y_1 + b_2 y_2 \rangle = a_1 b_1^* \langle x_1, y_1 \rangle + a_1 b_2^* \langle x_1, y_2 \rangle + a_2 b_1^* \langle x_2, y_1 \rangle + a_2 b_2^* \langle x_2, y_2 \rangle, \quad (4.18)$$

où a_1, a_2, b_1, b_2 sont des scalaires.

4.2.2 Fonctions orthogonales

En géométrie euclidienne, deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Par analogie, on dira que deux signaux sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire si :

$$\langle x, y \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y(t)^* dt = 0. \quad (4.19)$$

★ Le choix de l'intervalle $[t_1, t_2]$ est important : $\langle x, y \rangle = 0$ dans $[t_1, t_2]$ n'entraîne pas l'orthogonalité dans tous les intervalles.

4.2.3 Produit scalaire et distance euclidienne

Le lien entre distance euclidienne et produit scalaire est évident dans l'espace $L^2(t_1, t_2)$. En effet :

$$\begin{aligned} d^2(x, y) &= \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - y(t)|^2 dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - y(t)] [x(t) - y(t)]^* dt, \\ &= \langle x - y, x - y \rangle, \\ &= \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle, \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - (\langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle^*), \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\Re(\langle x, y \rangle). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dans le cas particulier où les signaux sont orthogonaux, $\langle x, y \rangle = 0$, la relation (4.20) se simplifie et donne le théorème de Pythagore :

$$d^2(x, y) = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad (4.21)$$

4.2.4 Inégalité de Schwartz

Théorème 4.2.1 Deux signaux, $x(t)$ et $y(t)$ de $L^2(t_1, t_2)$ vérifient l'inégalité suivante, dite inégalité de Schwartz :

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \quad (4.22)$$

ou, sous forme intégrale :

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t)dt \right|^2 \leq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt. \quad (4.23)$$

L'égalité est obtenue si et seulement si $x(t) = ky(t)$.

Soient deux signaux, $x(t)$ et $y(t)$ de $L^2(t_1, t_2)$, et k un scalaire de \mathbb{R} ou de \mathbb{C} . Le carré de la distance entre x et ky est la quantité positive, $\forall k$:

$$d^2(x, ky) = \langle x, x \rangle + |k|^2 \langle y, y \rangle - k^* \langle x, y \rangle - k \langle x, y \rangle^* \geq 0. \quad (4.24)$$

Ceci est en particulier vrai pour :

$$k = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}. \quad (4.25)$$

En reportant dans (4.24), on a alors :

$$\begin{aligned} d^2(x, ky) &= \langle x, x \rangle + \left| \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \right|^2 \langle y, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle^*}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle^* \geq 0 \\ &= \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle \langle x, y \rangle^*}{\langle y, y \rangle} \geq 0 \\ &= \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

On en tire l'inégalité de Schwartz :

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \quad (4.27)$$

ou, sous forme intégrale :

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t)dt \right|^2 \leq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt. \quad (4.28)$$

On remarque que l'égalité est atteinte si et seulement si $d(x, ky) = 0$, c'est-à-dire si $x(t) = ky(t)$.

4.2.5 Approximation d'un signal dans $L^2(t_1, t_2)$

Soit un signal $x(t) \in L^2(t_1, t_2)$ de dimension K , et $\mathcal{B} = \{\psi_1(t), \dots, \psi_M(t)\}$, avec $M < K$, une base d'un sous-espace \mathcal{E}_M de $L^2(t_1, t_2)$. On peut définir dans \mathcal{E}_M une approximation d'ordre M de $x(t)$, notée $\hat{x}(t)$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{m=1}^M \alpha_m \psi_m(t). \quad (4.29)$$

L'erreur d'approximation est définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad (4.30)$$

et on appelle erreur quadratique la quantité :

$$\|e\|^2 = d^2(x, \hat{x}). \quad (4.31)$$

On peut donc définir la meilleure approximation \hat{x} dans ce sous-espace au sens des moindres carrés si les coefficients α_m sont choisis de façon à minimiser la distance $d(x, \hat{x})$.

4.2.6 Théorème de la projection

Théorème 4.2.2 (Théorème de la projection) *La distance $d(x, \hat{x})$ entre $x(t)$ et son approximation $\hat{x}(t)$ est minimale si l'erreur d'approximation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est orthogonale aux fonctions $\psi_m(t)$, c'est-à-dire à $\hat{x}(t)$ elle-même.*

On peut représenter graphiquement ce résultat par le schéma de la figure 4.1.

Démonstration. Soit l'approximation :

$$\hat{x}(t) = \sum_{m=1}^M \alpha_m \psi_m(t), \quad (4.32)$$

telle que l'erreur $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est orthogonale à $\psi_m(t)$, $\forall m = 1, \dots, M$. Considérons une autre approximation :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=1}^M \beta_m \psi_m(t), \quad (4.33)$$

et calculons :

$$\begin{aligned} d^2(x, \tilde{x}) &= d^2(x - \hat{x}, \tilde{x} - \hat{x}), \\ &= \|x - \hat{x}\|^2 + \|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 - 2\Re(\langle x - \hat{x}, \tilde{x} - \hat{x} \rangle). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Or, $\tilde{x}(t) - \hat{x}(t) = \sum_m (\beta_m - \alpha_m) \psi_m(t)$ et $\langle e, \psi_m \rangle = 0$, $\forall m = 1, \dots, M$. Par conséquent, on a :

$$\langle x - \hat{x}, \tilde{x} - \hat{x} \rangle = 0, \quad (4.35)$$

d'où, en reportant dans (4.34) :

$$d^2(x, \tilde{x}) = \|x - \hat{x}\|^2 + \|\tilde{x} - \hat{x}\|^2, \quad (4.36)$$

qui est minimale si et seulement si $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t)$.

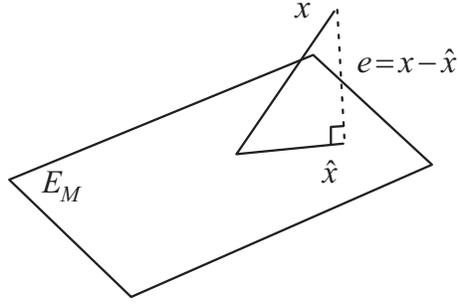


FIGURE 4.1 – Représentation graphique du théorème de la projection orthogonale

4.2.7 Calcul des coefficients α_k optimaux au sens des moindres carrés

Lorsque l'erreur $e = x - \hat{x}$ est minimale, compte tenu de son orthogonalité avec ψ_k , et compte tenu de l'expression de \hat{x} , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \forall k, \langle e, \psi_k \rangle &= 0, \\
 \langle x - \hat{x}, \hat{x} \rangle &= 0, \\
 \langle x, \hat{x} \rangle - \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle &= 0, \\
 \langle x, \hat{x} \rangle &= \|\hat{x}\|^2.
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

Pour chaque produit scalaire :

$$\langle x - \hat{x}, \psi_m \rangle = \langle e, \psi_m \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, \psi_m \rangle = \langle \hat{x}, \psi_m \rangle, \quad m = 1, \dots, K.
 \tag{4.38}$$

Or, en substituant dans (4.38) \hat{x} par son expression $\hat{x}(t) = \sum_k \alpha_k \psi_k(t)$, on a, $\forall m = 1, \dots, K$:

$$\begin{aligned}
 \langle x, \psi_m \rangle &= \langle \sum_k \alpha_k \psi_k, \psi_m \rangle \\
 &= \sum_k \alpha_k \langle \psi_k, \psi_m \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

En notant :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= (\alpha_1, \dots, \alpha_K)^T, \text{ et} \\
 \lambda_{km} &= \langle \psi_k, \psi_m \rangle \\
 \gamma_m &= \langle x, \psi_m \rangle
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

les termes généraux de la matrice $\mathbf{\Lambda}$ et du vecteur $\mathbf{\Gamma}$, les K équations s'écrivent $\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{a} = \mathbf{\Gamma}$, soit puisque $\mathbf{\Lambda}^T$ est inversible (car les ψ_k forment une base)

$$\mathbf{a} = \mathbf{\Lambda}^{-T} \mathbf{\Gamma}.
 \tag{4.41}$$

Cas d'une base orthogonale. Si les $\{\psi_k\}$ forment une base orthogonale, pour $k \neq m$, on a $\lambda_{km} = 0$ et la matrice $\mathbf{\Lambda}$ est diagonale. On a alors simplement $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^T$ d'où $\{\mathbf{\Lambda}^{-1}\}_{kk} = 1/\lambda_{kk}$, et les coefficients α_k s'expriment par l'équation :

$$\alpha_k = \frac{\gamma_k}{\lambda_{kk}} = \frac{\langle x, \psi_k \rangle}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle}, \quad k = 1, \dots, K.
 \tag{4.42}$$

4.2.8 Qualité de l'approximation

On mesure la qualité de l'approximation par l'erreur relative, que l'on exprime en dB. Cette mesure donne le rapport signal/erreur, R :

$$R = \frac{\|x\|^2}{\|e\|^2} = \frac{\|x\|^2}{\|x - \hat{x}\|^2} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2 - \|\hat{x}\|^2} = \frac{1}{1 - \frac{\|\hat{x}\|^2}{\|x\|^2}}, \quad (4.43)$$

où la troisième égalité est obtenue en appliquant le théorème de Pythagore, car $\|x\|^2 = \|e\|^2 + \|\hat{x}\|^2$. On peut aussi exprimer cette relation en dB :

$$R_{dB} = 10 \log R = -10 \log \left(1 - \frac{\|\hat{x}\|^2}{\|x\|^2} \right). \quad (4.44)$$

4.2.9 Cas d'une base orthogonale

Les coefficients α_k de l'approximation optimale au sens des moindres carrés sont donnés par (4.42).

L'erreur d'approximation s'exprime :

$$\begin{aligned} \|e\|^2 &= \|x\|^2 - \|\hat{x}\|^2 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=1}^K |\alpha_k|^2 \lambda_{kk}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

d'où (puisque $\|e\|^2 \geq 0$) :

$$\sum_{k=1}^K |\alpha_k|^2 \lambda_{kk} \leq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = \|x\|^2. \quad (4.46)$$

Puisque les coefficients $\lambda_{kk} = \langle \psi_k, \psi_k \rangle = \|\psi_k\|^2 > 0$, cette dernière expression montre que la qualité de l'approximation augmente avec K et on peut écrire :

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^K |\alpha_k|^2 \lambda_{kk} = \|x\|^2, \quad (4.47)$$

autrement dit, l'erreur d'approximation $\|e\|^2$ tend asymptotiquement vers 0.

Cette limite traduit l'égalité de Parseval :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \lambda_{kk} = \|x\|^2, \quad (4.48)$$

qui montre que l'énergie du signal est égale à la somme de l'énergie de ses composantes.

Cas de fonctions orthonormées. Si les fonctions ψ_k sont également normées, c'est-à-dire si $\langle \psi_k, \psi_k \rangle = \lambda_{kk} = 1$, on a simplement d'après l'équation (4.42) :

$$\alpha_k = \gamma_k = \langle x, \psi_k \rangle, \quad k = 1, \dots \quad (4.49)$$

L'approximation s'écrit alors :

$$\hat{x}(t) = \sum_k \langle x, \psi_k \rangle \psi_k(t) = \sum_k \alpha_k \psi_k(t). \quad (4.50)$$

L'égalité de Parseval devient simplement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 = \|x\|^2. \quad (4.51)$$

4.2.10 Construction d'une base orthonormale par la procédure de Gram-Schmidt

On suppose que l'on dispose d'une base non orthogonale $\{v_1, \dots, v_K\}$. On se propose de construire une base orthonormale $\{\psi_1, \dots, \psi_K\}$ en suivant la procédure suivante :

1. On pose $w_1(t) = v_1(t)$ puis on norme $\psi_1 = \frac{w_1(t)}{\|w_1\|}$. On initialise $k = 1$
2. On calcule :

$$k = k + 1, \quad (4.52)$$

puis :

$$w_k(t) = v_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, \psi_i \rangle \psi_i(t) \quad (4.53)$$

et on norme :

$$\psi_k = \frac{w_k(t)}{\|w_k\|} \quad (4.54)$$

3. On répète l'étape (2) jusqu'à $k = K$.

Dans la procédure ci-dessus, on remarque que w_k est la différence entre le vecteur v_k et sa projection orthogonale sur l'espace de dimension $k - 1$ engendré par les $k - 1$ premiers vecteurs $\{\psi_1, \dots, \psi_{k-1}\}$. Cette différence, en application du théorème de la projection, est donc orthogonale aux $k - 1$ vecteurs $\{\psi_1, \dots, \psi_{k-1}\}$ précédemment calculés. L'étape de normalisation permet ensuite d'obtenir des vecteurs normés.

4.3 Exemples de fonctions orthogonales

Il existe de nombreuses familles de fonctions orthogonales. Nous en donnons ici quelques exemples.

4.3.1 Fonctions rectangulaires décalées

Ce sont des fonctions de la forme [Fig. 4.2) :

$$\psi_k(t) = \text{rect}\left(\frac{t - k\Delta T}{\Delta T}\right). \quad (4.55)$$

4.3.2 Fonctions orthogonales de Rademacher et de Walsh

La figure (4.3) présente les trois premières fonctions de Rademacher.

La figure (4.4) présente les trois premières fonctions de Walsh.

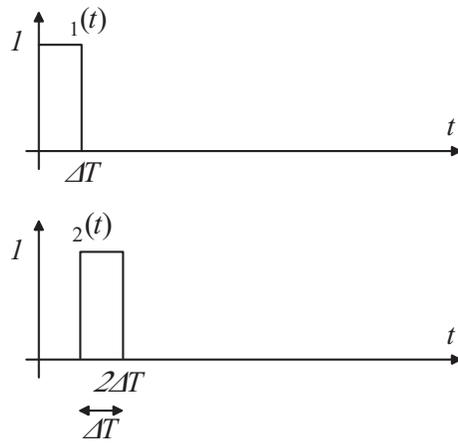


FIGURE 4.2 – Fonctions rectangulaires décalées

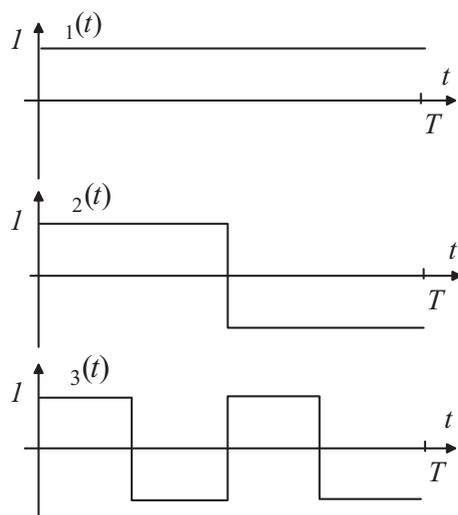


FIGURE 4.3 – Fonctions de Rademacher

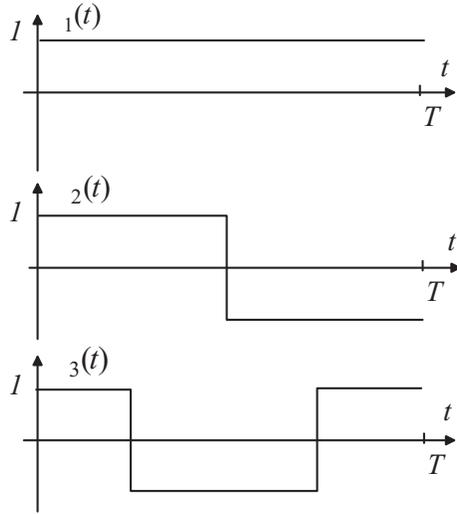


FIGURE 4.4 – Fonctions de Walsh

4.3.3 Séries de Fourier

Tout signal de $L^2(t_1, t_1 + T)$ peut être développé en séries de Fourier, à partir de signaux de base de forme exponentielle complexe :

$$\psi_k(t) = \exp\left(j2\pi k \frac{t}{T}\right), \quad (4.56)$$

telles que $\forall k \neq j, \langle \psi_k, \psi_j \rangle = 0$, et $\langle \psi_k, \psi_k \rangle = T$.

En notant X_k (au lieu de α_k) le k -ième coefficient, on a :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X_k \exp\left(j2\pi k \frac{t}{T}\right), \quad (4.57)$$

avec :

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \exp\left(-j2\pi k \frac{t}{T}\right) dt. \quad (4.58)$$

Cette dernière expression est obtenue en appliquant la formule (4.42) :

$$X_k = \frac{\langle x, \psi_k \rangle}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle} = \frac{\langle x, \psi_k \rangle}{\lambda_{kk}} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \psi_k^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \exp(-j2\pi k \frac{t}{T}) dt. \quad (4.59)$$

Les coefficients sont classés dans l'ordre croissant des harmoniques : ψ_k est de période T/k . La série est infinie et on peut écrire l'égalité de Parseval en puissance, car le signal est à puissance moyenne finie :

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |X_k|^2. \quad (4.60)$$

4.4 Exercices

4.4.1 Distance entre deux signaux

On considère les deux signaux :

$$x_n(t) = A \sin(2\pi nt/T) \text{rect}[(t - T/2)/T] \quad \text{et} \quad y_p(t) = A \cos(2\pi pt/T) \text{rect}[(t - T/2)/T], \quad (4.61)$$

où n et p sont des entiers positifs.

1. Calculer la distance euclidienne $d(x_n, y_p)$ avec $K = 1$, des deux signaux en fonction des entiers n et p .
2. Calculer les normes des signaux $x_n(t)$ et $y_p(t)$.
3. En déduire que $x_n(t)$ et $y_p(t)$ sont orthogonaux.

4.4.2 Produit scalaire de deux signaux

Soient les deux signaux réels $x_1(t) = \cos(2\pi t/T - \theta_1)$ et $x_2(t) = \sin(2\pi t/T - \theta_2)$, sur le domaine temporel $t_1 \leq t \leq t_1 + T$. On pose $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$. On rappelle que le produit scalaire de deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est noté $\langle x_1, x_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt$.

1. Calculer le produit scalaire des deux signaux sur le domaine temporel.
2. Pour quelles valeurs de $\Delta\theta$ ces deux fonctions sont-elles orthogonales sur le domaine temporel ? Ce résultat dépend-il de t_1 ? Pourquoi ?
3. Calculer la norme des deux signaux. En déduire leur énergie sur le domaine temporel.
4. En déduire la distance euclidienne entre les deux signaux. Que vaut cette distance dans le cas particulier où les signaux sont orthogonaux ?

4.4.3 Approximation d'un signal

On désire approximer le signal $x(t) = \text{rect}(t - 1/2)$ à l'aide de 3 fonctions de base $\psi_k(t) = \exp(-kt)$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$. On utilisera les résultats et les notations du cours. On rappelle que le produit scalaire de deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est noté $\langle x_1, x_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt$.

1. A partir du cours, donner la relation donnant l'approximation, en exprimant les paramètres λ_{kl} et λ_k en fonction des produits scalaires.
2. Calculer les coefficients λ_{kl} et λ_k .
3. En déduire la matrice Λ et le vecteur Γ .
4. Calculer la matrice Λ^{-1} et en déduire les coefficients α_k et l'approximation $\hat{x}(t)$.
5. Calculer l'erreur quadratique $\|e\|^2$, puis le rapport Signal/Erreur : $R = \|x\|^2/\|e\|^2$ en grandeur normale et en dB.

4.4.4 Développement en séries de Fourier

- Vérifier que pour les fonctions exponentielles complexes $\psi_k(t) = \exp(j2\pi kt/T)$, on a effectivement $\forall k \neq l, \langle \psi_k, \psi_l \rangle = 0$, et $\langle \psi_k, \psi_k \rangle = T$.
- Développer en série de Fourier le signal

$$x(t) = \frac{At}{T} \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right), \quad (4.62)$$

sur l'intervalle $[0, T]$.

Chapitre 5

Signaux certains

5.1 Transformée de Fourier

5.1.1 Définition et existence

Définition 5.1.1 (Transformée de Fourier) Soit un signal certain $x(t)$, sa transformée de Fourier (TF) est une fonction complexe de la variable réelle f définie par :

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \langle x, \exp(j2\pi ft) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt. \quad (5.1)$$

Définition 5.1.2 (Transformée de Fourier inverse) On appelle transformée de Fourier inverse la relation :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \langle X, \exp(-j2\pi ft) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df. \quad (5.2)$$

Remarques.

- La TF existe si l'intégrale (5.1) existe, c'est-à-dire si $x(t)$ est une fonction bornée et absolument intégrable donc si $\int |x(t)| dt$ existe.
- La dimension de la variable f est $[t]^{-1}$ si $x(t)$ est une fonction de t .
- On note $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ et $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$, ou de façon abrégée :

$$x(t) \rightleftharpoons X(f). \quad (5.3)$$

5.1.2 Propriétés de la transformée de Fourier

Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ admettant pour transformées de Fourier, $X(f)$ et $Y(f)$, respectivement, on peut facilement vérifier les propriétés suivantes (les démonstrations sont laissées à titre d'exercice).

Linéarité

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \rightleftharpoons \alpha X(f) + \beta Y(f). \quad (5.4)$$

Parité

$x(t)$	$X(f)$
réelle paire	réelle paire
réelle impaire	imaginaire impaire
imaginaire paire	imaginaire paire
imaginaire impaire	réelle impaire

On retiendra que la TF conserve la parité. Pour une fonction paire, la nature réelle ou imaginaire n'est pas changée. En revanche, pour une fonction impaire, la nature est modifiée.

Transformée d'un signal réel

- La transformée de Fourier d'un signal réel $x(t)$ est une fonction complexe $X(f)$ telle que :
- son module $|X(f)|$ est une fonction paire de f ,
 - sa phase $\phi(X(f))$ est une fonction impaire de f .

Complexe conjugué

$$x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-f). \quad (5.5)$$

Changement d'échelle sur t

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(f/a). \quad (5.6)$$

On peut noter le cas particulier :

$$x(-t) \Leftrightarrow X(-f). \quad (5.7)$$

Translation sur t

$$x(t - \theta) \Leftrightarrow X(f) \exp(-j2\pi f\theta). \quad (5.8)$$

Translation sur f ou modulation

$$x(t) \exp(j2\pi f_0 t) \Leftrightarrow X(f - f_0). \quad (5.9)$$

Dérivation par rapport à la variable t

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \Leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f). \quad (5.10)$$

Intégration de la variable t

$$\int_{-\infty}^t x(u)du \Rightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f), \text{ si } \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)du = 0. \quad (5.11)$$

Convolution (théorèmes de Plancherel)

$$x(t) * y(t) \Rightarrow X(f)Y(f). \quad (5.12)$$

$$x(t)y(t) \Rightarrow X(f) * Y(f). \quad (5.13)$$

5.1.3 Exemple 1 : impulsion à décroissance exponentielle

On considère le signal $x(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau)\epsilon(t)$. Ce signal représente la décharge d'un condensateur de capacité C dans une résistance R (telle que $RC = \tau$), mais aussi la réponse d'un filtre passe-bas du premier ordre (filtre $R-C$) à une impulsion de Dirac. Les spectres associés aux deux systèmes sont donc identiques.

Calcul de $X(f)$

Par définition, on écrit :

$$\begin{aligned} X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{+\infty} \exp(-t/\tau) \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(j2\pi ft + \frac{t}{\tau}\right)\right) dt \\ &= \frac{1}{\tau} \left[\frac{\exp\left(-\left(j2\pi ft + \frac{t}{\tau}\right)\right)}{-(j2\pi f + 1/\tau)} \right]_0^{+\infty}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

d'où finalement :

$$X(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f\tau}. \quad (5.15)$$

Représentation de $X(f)$

$X(f)$ est une fonction complexe que l'on peut représenter par son module et sa phase.

Le module est calculé selon sa définition :

$$|X(f)| = \sqrt{X(f)X^*(f)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}}. \quad (5.16)$$

C'est une fonction paire de f (Fig. 5.1, en haut).

L'argument, par définition, est égal à :

$$\phi(X(f)) = -\arctan(2\pi f\tau), \quad (5.17)$$

est une fonction impaire de f (Fig. 5.1, en bas). Au voisinage de 0, elle est équivalente à $-2\pi f\tau$, et les limites sont :

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow +\infty} \phi(X(f)) &= -\pi/2 \\ \lim_{f \rightarrow -\infty} \phi(X(f)) &= +\pi/2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

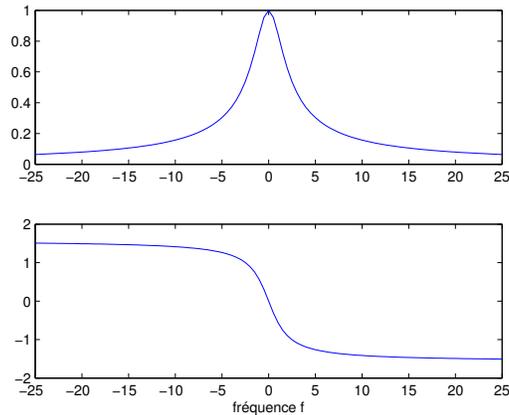


FIGURE 5.1 – Module (en haut) et argument (en bas) de la transformée de Fourier de $x(t)$ ($\tau = 0.1s$)

On retiendra que, pour un signal réel, $x(t)$, la transformée de Fourier, $X(f)$, est telle que :

- $|X(f)|$ est paire,
- $\phi(X(f))$ est impaire.

5.1.4 Exemple 2 : transformée de Fourier de $\text{rect}(t/T)$

On considère la fonction $x(t) = \text{rect}(t/T)$.

Calcul de la transformée de Fourier

Calculons sa transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \\
 &= \int_{-T/2}^{+T/2} \exp(-j2\pi ft) dt \\
 &= -\frac{1}{j2\pi f} \left[\exp(-j2\pi ft) \right]_{-T/2}^{+T/2} \\
 &= \frac{\exp(j\pi fT) - \exp(-j\pi fT)}{j2\pi f} \\
 &= \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \\
 &= T \text{sinc}(fT).
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

De façon abrégée, on a donc :

$$x(t) = \text{rect}(t/T) \Leftrightarrow X(f) = T \text{sinc}(fT). \tag{5.20}$$

Représentation graphique du module et de la phase de $X(f)$

La TF $X(f)$ étant réelle, le module n'est autre que la valeur absolue :

$$|X(f)| = T |\text{sinc}(fT)|. \tag{5.21}$$

En ce qui concerne la phase, rappelons que c'est une fonction impaire : elle vaut donc 0 lorsque $\text{sinc}(fT) \geq 0$, et $\pm\pi$ lorsque $\text{sinc}(fT) < 0$.

On obtient donc les tracés présentés à la figure 5.2.

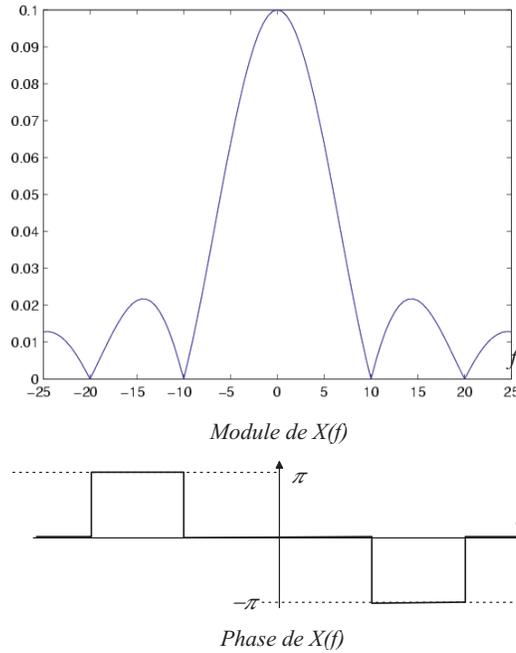


FIGURE 5.2 – Module et phase de la transformée de Fourier de la fonction $x(t) = \text{rect}(t/T)$ ($T = 0.1s$)

5.1.5 Théorèmes de Plancherel

Théorème 5.1.1 (Théorème de Plancherel - 1) Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux admettant pour transformées de Fourier $X(f)$ et $Y(f)$ respectivement, alors :

$$x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(f)Y(f). \quad (5.22)$$

Démonstration

On note $z(t) = x(t) * y(t)$. Par définition du produit de convolution, on a :

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du. \quad (5.23)$$

Calculons la transformée de Fourier de $z(t)$:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du \right] \exp(-j2\pi ft)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u) \exp(-j2\pi ft)dt \right]}_{\text{TF de } y(t-u)} du. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Or, l'intégrale entre crochets dans la dernière expression est la transformée de Fourier de $y(t-u)$, c'est-à-dire, en utilisant la règle de translation par rapport à la variable t , $Y(f) \exp(-j2\pi fu)$.

Donc on a :

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)Y(f) \exp(-j2\pi fu)du \\ &= Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \exp(-j2\pi fu)du \\ &= X(f)Y(f). \end{aligned} \quad (5.25)$$

De façon similaire, on montre le théorème suivant (la démonstration est laissée à titre d'exercice).

Théorème 5.1.2 (Théorème de Plancherel - 2) Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux admettant pour transformées de Fourier $X(f)$ et $Y(f)$ respectivement, alors :

$$x(t)y(t) \Rightarrow X(f) * Y(f). \quad (5.26)$$

Application du théorème de Plancherel en filtrage

Soit un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. La réponse au signal $x(t)$ est le signal $y(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t). \quad (5.27)$$

La transformée de Fourier $Y(f)$ peut donc être calculée, soit directement à partir de $y(t)$, soit par l'expression :

$$Y(f) = X(f)H(f). \quad (5.28)$$

Application du théorème de Plancherel au calcul de convolutions

On veut calculer le produit de convolution :

$$x(t) = \text{sinc}(t) * \text{sinc}(t). \quad (5.29)$$

Pour cela, on prend la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} X(f) &= (\mathcal{F}\{\text{sinc}(t)\})^2 \\ &= (\text{rect}(f))^2 \\ &= \text{rect}(f). \end{aligned} \quad (5.30)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient finalement $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\text{rect}(f)\} \\ &= \text{sinc}(t). \end{aligned} \quad (5.31)$$

5.1.6 Théorème de Parseval

Théorème 5.1.3 (Théorème de Parseval) Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux admettant pour transformées de Fourier $X(f)$ et $Y(f)$ respectivement, alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df, \quad (5.32)$$

et dans le cas particulier $y(t) = x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df. \quad (5.33)$$

Ce théorème indique que l'énergie est conservée dans les représentations en temps et en fréquence.

Démonstration

Calculons :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df. \quad (5.34)$$

Puisque $Y^*(f)$ est la transformée de Fourier de $y^*(-t)$, on peut écrire :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(-t) \exp(-j2\pi ft) dt \right] df. \quad (5.35)$$

On pose $-t = u$, puis en intervertissant les intégrales, on arrive à :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(u) \exp(j2\pi fu) du \right] df, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(u) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2\pi fu) df \right] du. \end{aligned} \quad (5.36)$$

On remarque que l'intégrale entre crochet dans la dernière expression est la transformée de Fourier inverse de $X(f)$ d'où le résultat :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(u)x(u)du. \quad (5.37)$$

Application du théorème de Parseval au calcul d'intégrales

On veut calculer les deux intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t)dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(t)dt. \quad (5.38)$$

Pour calculer I_1 , on utilise la relation (5.32), en posant :

$$\begin{aligned} x(t) = \text{sinc}(t) &\Leftrightarrow X(f) = \text{rect}(f), \\ y^*(t) = 1 = y(t) &\Leftrightarrow Y^*(f) = \delta(f). \end{aligned} \quad (5.39)$$

L'équation (5.32) devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(f)\delta(f)df = 1. \quad (5.40)$$

Pour calculer I_2 , on pose :

$$\begin{aligned} x(t) = \text{sinc}(t) &\Leftrightarrow X(f) = \text{rect}(f), \\ y^*(t) = \text{sinc}(t) &\Leftrightarrow Y^*(f) = \text{rect}(f). \end{aligned} \quad (5.41)$$

En reportant dans l'égalité de Parseval (5.32), on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}^2(f)df = 1. \quad (5.42)$$

5.2 Fonctions de corrélation des signaux à énergie finie

5.2.1 Définitions

Définition 5.2.1 (Intercorrélation) Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie, on appelle fonction d'intercorrélation entre $x(t)$ et $y(t)$ la fonction notée $\Gamma_{xy}(\tau)$ définie par :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt. \quad (5.43)$$

En notant $y(t - \tau) = y_\tau$, on peut remarquer que l'intercorrélation $\Gamma_{xy}(\tau)$ est égale au produit scalaire :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \langle x, y_\tau \rangle. \quad (5.44)$$

Par ailleurs, en raison de la symétrie hermitienne, on a $\langle x, y_\tau \rangle = \langle y_\tau, x \rangle^*$, d'où la relation :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \Gamma_{yx}^*(-\tau). \quad (5.45)$$

Définition 5.2.2 (Autocorrélation) Soient $x(t)$ un signal à énergie finie, on appelle fonction d'autocorrélation de $x(t)$ la fonction notée $\Gamma_{xx}(\tau)$ définie par :

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt. \quad (5.46)$$

En raison de la symétrie hermitienne, on a la relation :

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \Gamma_{xx}^*(-\tau). \quad (5.47)$$

Pour des signaux réels, $\Gamma_{xy}(\tau)$ et $\Gamma_{xx}(\tau)$ sont réels et satisfont :

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \Gamma_{xx}(-\tau) \text{ et } \Gamma_{xy}(\tau) = \Gamma_{yx}(-\tau). \quad (5.48)$$

On en déduit notamment que l'autocorrélation d'un signal réel est une fonction paire.

5.2.2 Propriétés

Autocorrélation

En utilisant l'égalité $\Gamma_{xx}(\tau) = \Gamma_{xx}^*(-\tau)$, et en notant la fonction d'autocorrélation sous la forme $\Gamma_{xx}(\tau) = R(\tau) + jI(\tau)$, l'égalité ci-dessus devient :

$$R(\tau) + jI(\tau) = R(-\tau) - jI(-\tau). \quad (5.49)$$

On en déduit donc que la partie réelle de Γ_{xx} est paire alors que sa partie imaginaire est impaire.

Pour $\tau = 0$, on a en particulier $\Gamma_{xx}(0) = \Gamma_{xx}^*(0)$, donc $\Gamma_{xx}(0) \in \mathbb{R}$ et vaut :

$$\Gamma_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt > 0. \quad (5.50)$$

On retiendra donc que, $\Gamma_{xx}(0)$, l'autocorrélation en $\tau = 0$ est égale à l'énergie du signal.

Inégalité de Schwartz

En appliquant l'inégalité de Schwartz sur l'intercorrrelation $\langle x, y_\tau \rangle$, on obtient :

$$|\langle x, y_\tau \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y_\tau, y_\tau \rangle, \quad (5.51)$$

que l'on peut écrire :

$$|\Gamma_{xy}(\tau)|^2 \leq \Gamma_{xx}(0)\Gamma_{yy}(0). \quad (5.52)$$

Dans le cas particulier où $x(t) = y(t)$, on a :

$$|\Gamma_{xx}(\tau)| \leq \Gamma_{xx}(0). \quad (5.53)$$

La fonction d'autocorrélation $\Gamma_{xx}(\tau)$ est donc bornée par l'énergie du signal $x(t)$ et son module est maximum en $\tau = 0$.

5.2.3 Relation entre corrélation et convolution

La similarité d'écriture entre corrélation et convolution (par exemple, ces deux quantités s'expriment sous forme d'un produit scalaire) ne doit pas tromper. Il faut faire attention aux variables d'intégration et aux variables des fonctions obtenues.

Dans la convolution, t reste la variable et une des fonctions est *renversée* ($y(t-u)$) par rapport à la variable d'intégration u . Dans la corrélation, le décalage τ est la variable de la fonction résultat.

La corrélation mesure la ressemblance entre les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ selon le décalage τ .

La convolution formalise l'interaction (filtrage) entre les fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

Mathématiquement, on peut écrire une relation qui permet d'exprimer la fonction de corrélation comme un produit de convolution (et réciproquement). En effet,

$$\begin{aligned} \Gamma_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y^*(u-\tau)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y^*(-(\tau-u))du \\ &= x(\tau) * y^*(-\tau). \end{aligned} \quad (5.54)$$

c'est-à-dire :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau). \quad (5.55)$$

Exemple

On considère les signaux :

$$x(t) = \exp(-at)\epsilon(t) \quad \text{et} \quad y(t) = \exp(-2at)\epsilon(t), \quad (5.56)$$

où a est un réel positif.

• Par définition, l'intercorrrelation s'écrit :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-at)\epsilon(t) \exp(-2a(t-\tau))\epsilon(t-\tau)dt. \quad (5.57)$$

En tenant compte des domaines où les fonctions échelon sont nulles, on peut expliciter Γ_{xy} selon le signe de τ :

— Pour $\tau > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma_{xy}(\tau) &= \int_{\tau}^{+\infty} \exp(-at) \exp(-2a(t-\tau)) dt \\ &= \exp(2a\tau) \left[\frac{\exp(-3at)}{-3a} \right]_{\tau}^{+\infty} \\ &= \exp(2a\tau) \frac{\exp(-3a\tau)}{3a},\end{aligned}\quad (5.58)$$

d'où le résultat :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{\exp(-a\tau)}{3a}, \quad (\text{pour } \tau > 0). \quad (5.59)$$

— Pour $\tau < 0$, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma_{xy}(\tau) &= \int_0^{+\infty} \exp(-at) \exp(-2a(t-\tau)) dt \\ &= \exp(2a\tau) \left[\frac{\exp(-3at)}{-3a} \right]_0^{+\infty} \\ &= \exp(2a\tau) \frac{1}{3a},\end{aligned}\quad (5.60)$$

d'où le résultat :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{\exp(2a\tau)}{3a}, \quad (\text{pour } \tau < 0). \quad (5.61)$$

Globalement, on peut écrire l'intercorrélacion sous la forme :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{\exp(2a\tau)}{3a} \epsilon(-\tau) + \frac{\exp(-a\tau)}{3a} \epsilon(\tau). \quad (5.62)$$

• La convolution entre $x(t)$ et $y(t)$ s'écrit :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) y(t-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-au) \epsilon(u) \exp(-2a(t-u)) \epsilon(t-u) du. \quad (5.63)$$

Compte tenu des domaines où les fonctions échelon sont nulles, on voit facilement que, pour $t < 0$, l'intégrale est nulle. Pour $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned}x(t) * y(t) &= \int_0^t \exp(-au) \exp(-2a(t-u)) du \\ &= \exp(-2at) \int_0^t \exp(+au) du \\ &= \exp(-2at) \frac{\exp(at) - 1}{a} \\ &= \frac{1}{a} (\exp(-at) - \exp(-2at)).\end{aligned}\quad (5.64)$$

Globalement, on peut donc écrire :

$$x(t) * y(t) = \frac{1}{a} (\exp(-at) - \exp(-2at)) \epsilon(t). \quad (5.65)$$

Les deux résultats sont présentés à la figure 5.3, avec la fonction d'intercorrélacion (en haut) et la convolution (en bas).

Contre-exemple

Si le signal $y(t)$ est réel et pair, alors $y^*(-\tau) = y(\tau)$ et l'intercorrélacion et la convolution sont des fonctions identiques. En effet :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau) = x(\tau) * y(\tau). \quad (5.66)$$

Cette identité sera vérifiée par exemple pour les fonctions :

$$x(t) = \text{rect}(t/T) \quad \text{et} \quad y(t) = \text{tri}(t/\Delta). \quad (5.67)$$

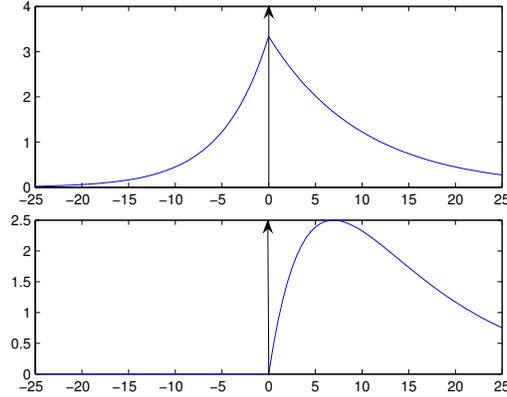


FIGURE 5.3 – L’intercorrélacion (en haut) et la convolution (en bas) de deux signaux sont en général des fonctions différentes

5.3 Densités spectrale et interspectrale d’énergie

5.3.1 Densité spectrale d’énergie

Définition 5.3.1 (Densité spectrale d’énergie) Soient $x(t)$ un signal à énergie finie et $\Gamma_{xx}(\tau)$ sa fonction d’autocorrélacion, on appelle densité spectrale d’énergie la fonction notée $S_{xx}(f)$, transformée de Fourier de $\Gamma_{xx}(\tau)$:

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (5.68)$$

En utilisant l’expression de l’autocorrélacion (5.55), on a :

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= \mathcal{F}\{x(\tau) * x^*(-\tau)\} \\ &= \mathcal{F}\{x(\tau)\} \mathcal{F}\{x^*(-\tau)\} \\ &= X(f) X^*(f) \end{aligned} \quad (5.69)$$

d’où le résultat :

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2. \quad (5.70)$$

Cette expression montre que $S_{xx}(f)$ est l’énergie du signal à la fréquence f , d’où le nom de densité spectrale d’énergie.

En utilisant le théorème de Parseval, on montre finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x. \quad (5.71)$$

5.3.2 Densité interspectrale d’énergie (DISE)

Définition 5.3.2 Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie et $\Gamma_{xy}(\tau)$ leur fonction d’autocorrélacion, on appelle densité interspectrale d’énergie la fonction notée $S_{xy}(f)$, transformée de

Fourier de $\Gamma_{xy}(\tau)$:

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xy}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = \mathcal{F}\{x(\tau) * y^*(-\tau)\} = X(f)Y^*(f). \quad (5.72)$$

De façon similaire et évidente, on a, en permutant les signaux :

$$S_{yx}(f) = Y(f)X^*(f) = S_{xy}^*(f). \quad (5.73)$$

• Pour $\tau = 0$, en prenant la transformée de Fourier inverse de la DISE, on a :

$$\Gamma_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f) \exp(j2\pi f0) df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f) df. \quad (5.74)$$

• A partir de cette dernière relation, on retrouve encore le théorème de Parseval sous sa forme générale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f) df, \quad (5.75)$$

qui indique la conservation des produits scalaires. En particulier, on remarque qu'une condition *suffisante* pour que $x(t)$ et $y(t)$ soient orthogonaux est qu'ils aient des supports fréquentiels (c'est-à-dire des spectres) disjoints.

5.3.3 Exemple

On considère la fonction $x(t) = \exp(-at)\epsilon(t)$.

Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation est égale à :

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-at)\epsilon(t) \exp(-a(t-\tau))\epsilon(t-\tau) dt. \quad (5.76)$$

Pour $\tau > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(\tau) &= \int_{\tau}^{+\infty} \exp(-at) \exp(-a(t-\tau)) dt \\ &= \exp(a\tau) \left[\frac{\exp(-2at)}{-2a} \right]_{\tau}^{+\infty} \\ &= \frac{\exp(-a\tau)}{2a}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Pour $\tau < 0$, on a :

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(\tau) &= \int_0^{+\infty} \exp(-at) \exp(-a(t-\tau)) dt \\ &= \exp(a\tau) \left[\frac{\exp(-2at)}{-2a} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\exp(a\tau)}{2a}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

D'où finalement l'expression :

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \frac{1}{2a} \exp(-a|\tau|). \quad (5.79)$$

Densité spectrale d'énergie

La densité spectrale d'énergie, par définition, est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= \mathcal{F}\{\Gamma_{xx}(\tau)\} \\ &= \frac{1}{2a} \mathcal{F}\{\exp(-a|\tau|)\} \\ &= \frac{1}{a^2 + (2\pi f)^2}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Vérification de l'égalité de Parseval

On doit donc vérifier que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (5.81)$$

Puisque $|X(f)|^2 = S_{xx}(f)$, la première intégrale vaut :

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{a^2 + (2\pi f)^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{1 + (2\pi f/a)^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \left[\arctan(u) \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2a}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

La seconde intégrale vaut :

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_0^{+\infty} [\exp(-at)]^2 dt \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-2at) dt \\ &= \left[\frac{\exp(-2at)}{-2a} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2a}. \end{aligned} \quad (5.83)$$

On vérifie donc bien l'égalité de Parseval, c'est-à-dire la conservation de l'énergie dans les représentations du signal en temps et en fréquence.

5.3.4 Dérivation de la fonction de corrélation

A partir du résultat :

$$\Gamma_{xy}(\tau) \rightleftharpoons X(f)Y^*(f), \quad (5.84)$$

et en utilisant les propriétés de dérivation de la TF par rapport à la variable temporelle, on a :

$$\frac{d\Gamma_{xy}(\tau)}{d\tau} \rightleftharpoons X(f)Y^*(f)(j2\pi f). \quad (5.85)$$

En associant le terme $(j2\pi f)$ à l'une ou l'autre des TF, on peut donc écrire :

$$\frac{d\Gamma_{xy}(\tau)}{d\tau} = \frac{dx(\tau)}{d\tau} * y^*(-\tau) = x'(\tau) * y^*(-\tau) = \Gamma_{x'y}(\tau), \quad (5.86)$$

ou

$$\frac{d\Gamma_{xy}(\tau)}{d\tau} = x(\tau) * \left(\frac{dy^*(-\tau)}{d\tau} \right) = x(\tau) * \left(- \frac{dy^*(-\tau)}{d(-\tau)} \frac{d(-\tau)}{d\tau} \right) = x(\tau) * y'^*(-\tau) = -\Gamma_{xy'}(\tau). \quad (5.87)$$

On peut généraliser ces deux expressions à des dérivées d'ordre quelconque.

5.4 Signaux à puissance moyenne finie

On s'intéresse dans ce paragraphe aux signaux à puissance moyenne finie (non nulle), c'est-à-dire vérifiant :

$$0 < P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty. \quad (5.88)$$

Quoique ces signaux soient physiquement non réalisables (car ils ont une énergie infinie!) leur représentation mathématique est simple et utile dans de nombreux domaines. Par exemple, en télécommunications, une porteuse sinusoïdale de fréquence f sera modélisée simplement par $x(t) = A \sin(2\pi ft)$.

5.4.1 Extension de la transformée de Fourier

Les signaux à puissance moyenne finie ne satisfont pas aux critères simples de convergence de la transformée de Fourier. Pour une analyse rigoureuse (qui ne sera pas faite ici, voir le cours de mathématiques), il faut utiliser la notion de distribution et d'intégrale au sens de Lebesgue. Nous rappelons ci-dessous les principaux résultats que nous utiliserons couramment par la suite.

Impulsion de Dirac

$$\begin{aligned} \delta(t) &\equiv 1 \\ \delta(t - t_0) &\equiv \exp(-j2\pi ft_0) \\ \exp(j2\pi f_0 t) &\equiv \delta(f - f_0) \\ k &\equiv k\delta(f) \end{aligned} \quad (5.89)$$

Signaux à valeur moyenne nulle

Tout signal $x(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = \bar{x} + x_0(t), \quad (5.90)$$

où \bar{x} est la valeur moyenne du signal $x(t)$ et $x_0(t)$ est un signal de moyenne nulle. En dérivant $x(t)$, on obtient :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx_0(t)}{dt} = x'_0(t), \quad (5.91)$$

d'où l'écriture :

$$x(t) = \int_{-\infty}^t x'_0(u) du + \bar{x}, \quad (5.92)$$

où \bar{x} joue le rôle d'une constante d'intégration.

En utilisant les propriétés de dérivation de la TF, on peut écrire :

$$\mathcal{F}\{x'_0(t)\} = j2\pi f X_0(f), \forall \bar{x}, \quad (5.93)$$

d'où :

$$X_0(f) = \frac{1}{j2\pi f} \mathcal{F}\{x'_0(t)\}. \quad (5.94)$$

A partir de ces deux résultats, en prenant la TF de (5.90), on peut écrire :

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{j2\pi f} \mathcal{F}\{x'_0(t)\} + \bar{x}\delta(f). \quad (5.95)$$

Exemple 1 : calcul de la TF d'un échelon

Soit $x(t) = \epsilon(t)$. On peut écrire cette fonction sous la forme $\bar{x} + x_0(t)$. En effet,

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t). \quad (5.96)$$

Or, $x'_0(t) = \delta(t)$, donc en appliquant le résultat (5.95), on arrive à :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\epsilon(t)\} &= \frac{1}{j2\pi f} \mathcal{F}\{\delta(t)\} + \frac{1}{2}\delta(f) \\ &= \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f). \end{aligned} \quad (5.97)$$

Exemple 2 : calcul de la TF de la fonction sgn(t)

Soit la fonction $x(t) = \text{sgn}(t)$. Cette fonction est à moyenne nulle ($\bar{x} = 0$) et $x(t) = x_0(t)$. On calcule la dérivée $x'_0(t) = 2\delta(t)$ (saut d'amplitude 2 en $t = 0$) d'où le résultat :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} &= \frac{1}{j2\pi f} \mathcal{F}\{2\delta(t)\} \\ &= \frac{1}{j\pi f}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

5.4.2 Corrélation des signaux à puissance moyenne finie

Le produit scalaire, défini pour les signaux à énergie finie, n'est pas applicable pour les signaux à puissance moyenne finie, car l'intégrale ne converge pas ! Pour les signaux à puissance moyenne finie, on définit donc la corrélation de façon un peu différente :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y^*(t-\tau)dt. \quad (5.99)$$

La moyenne ($\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2}$) reste une mesure de la similarité en forme et en position des deux signaux. Elle n'altère pas les propriétés montrées pour les signaux à énergie finie :

$$\begin{aligned} \Gamma_{xy}(\tau) &= \Gamma_{yx}^*(-\tau) \\ |\Gamma_{xy}(\tau)|^2 &\leq \Gamma_{xx}(0)\Gamma_{yy}(0) \\ |\Gamma_{xx}(\tau)| &\leq \Gamma_{xx}(0) \\ |\Gamma_{xy}'(\tau)| &= \Gamma_{x'y}(\tau) = -\Gamma_{xy}'(\tau) \end{aligned} \quad (5.100)$$

Attention, dans les équations précédentes, $x(t)$ étant à puissance moyenne finie, $\Gamma_{xx}(0)$ est maintenant égale à la puissance moyenne du signal $x(t)$.

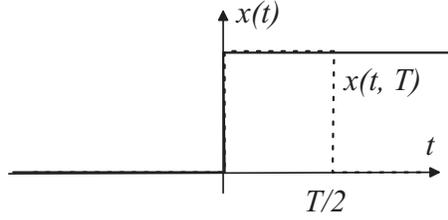


FIGURE 5.4 – La fonction $x(t) = \epsilon(t)$ (plein) et sa restriction $x(t, T)$ (tirets)

5.4.3 Densités spectrale et interspectrale de puissance

Définition 5.4.1 (Densité spectrale de puissance) Soit $x(t)$ un signal à puissance moyenne finie, on appelle densité spectrale de puissance (DSP) la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation :

$$S_{xx}(f) = \mathcal{F}\{\Gamma_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (5.101)$$

Relation entre DSP et $X(f)$

Pour les signaux $x(t)$ à puissance moyenne finie, la DSP n'est pas égale au carré du module de la transformée de Fourier $X(f)$. On peut cependant trouver une relation asymptotique.

En effet, soit $x(t)$ un signal à puissance moyenne finie, on note $x(t, T) = x(t)\text{rect}(t/T)$ la portion du signal de largeur T centrée sur l'origine et $x(t, T) \Leftrightarrow X(f, T)$. Ainsi $x(t, T)$ est un signal à énergie finie dont on peut calculer la DSE :

$$S_{xx}(f, T) = |X(f, T)|^2. \quad (5.102)$$

En utilisant le théorème de Parseval, on a :

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df, \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t, T)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f, T)|^2 df. \end{aligned} \quad (5.103)$$

En identifiant les intégrandes des derniers termes, on a donc :

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2. \quad (5.104)$$

Exemple : échelon unité

On considère le signal à puissance moyenne finie $x(t) = \epsilon(t)$ dont la transformée de Fourier est $X(f) = 1/(j2\pi f) + \delta(f)/2$.

Calculons la DSP de $x(t)$, à partir du signal d'énergie finie $x(t, T) = \text{rect}((t - T/4)/(T/2))$ (Fig. 5.4). Commençons par calculer la TF de $x(t, T)$:

$$\begin{aligned} X(f, T) &= \exp(-j2\pi fT/4) \int_{-T/4}^{+T/4} \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \exp(-j2\pi fT/4) \frac{\exp(j2\pi fT/4) - \exp(-j2\pi fT/4)}{j2\pi f} \\ &= \exp(-j2\pi fT/4) \frac{\sin(2\pi fT/4)}{\pi f} \\ &= \exp(-j2\pi fT/4) \text{sinc}(fT/2) \frac{T}{2}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

On peut alors calculer la DSP de $x(t)$ comme la limite :

$$\begin{aligned}
 S_{xx}(f) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \frac{T^2}{4} \text{sinc}^2(fT/2) \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T}{4} \text{sinc}^2(fT/2) \\
 &= \frac{\delta(f)}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.106}$$

Le calcul de la dernière limite repose sur le fait que le lobe principal de sinc décroît lorsque T augmente (sa largeur vaut $1/(\pi T)$) et sur l'identité $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(u) du = 1$. On voit que le résultat, $S_{xx}(f) = \delta(f)/2$ n'a rien à voir avec le carré du module de la TF de $x(t)$:

$$|X(f)|^2 = \left| \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \right|^2. \tag{5.107}$$

Calculons directement la fonction d'autocorrélation de $x(t)$:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{xx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \epsilon(t) \epsilon(t - \tau) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{+T/2} dt \text{ (pour } \tau > 0) \\
 &= 1/2.
 \end{aligned} \tag{5.108}$$

Compte tenu de la parité de $\Gamma_{xx}(\tau)$, on a donc $\Gamma_{xx}(\tau) = 1/2$, d'où la DSP :

$$S_{xx}(f) = \mathcal{F}\{\Gamma_{xx}(\tau)\} = \frac{\delta(f)}{2}. \tag{5.109}$$

On retrouve bien le même résultat que par le calcul précédent (5.106).

Densité interspectrale de puissance

Définition 5.4.2 (Densité spectrale de puissance) Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à puissance moyenne finie, on appelle densité interspectrale de puissance (DSP) la transformée de Fourier de leur fonction d'intercorrélation :

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F}\{\Gamma_{xy}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xy}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \tag{5.110}$$

5.5 Signaux périodiques

5.5.1 Transformée de Fourier d'un signal périodique

Soit $x(t)$ un signal périodique de période T . S'il satisfait les conditions de Diriclet, on peut le développer en séries de Fourier :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \exp\left(j2\pi \frac{n}{T} t\right), \tag{5.111}$$

dont la transformée de Fourier s'écrit :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f - f_n), \tag{5.112}$$

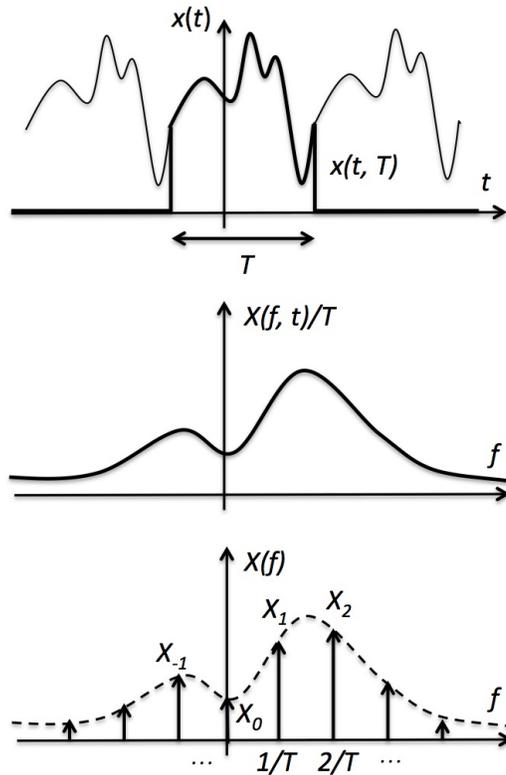


FIGURE 5.5 – La fonction périodique $x(t)$ (en haut), l’enveloppe spectrale, c’est-à-dire le spectre d’une période $X(f, T)$ divisé par T (au milieu) et le spectre $X(f)$ (en bas)

avec $f_n = n/T$, et :

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \exp\left(-j2\pi \frac{n}{T}t\right) dt = \frac{1}{T} X(n/T, T). \quad (5.113)$$

On remarque que le coefficient X_n n’est autre que la transformée de Fourier d’une période du signal à la fréquence $f_n = n/T$.

D’après la relation (5.112), le spectre d’un signal périodique de période T est donc un spectre de raies, localisées aux fréquences $f_n = n/T$ et d’amplitude $X_n = X(f)\delta(f - f_n)/T$. Ceci est illustré à la figure 5.5.

Transformée de Fourier d’un signal modulé

Soit $z(t) = x(t)y(t)$ le produit d’une fonction périodique $y(t)$, de période T , par un signal à énergie finie $x(t)$ (modulation). En utilisant le théorème de Plancherel, sa transformée de Fourier s’écrit :

$$Z(f) = X(f) * Y(f). \quad (5.114)$$

Puisque $y(t)$ est périodique de période T , sa transformée de Fourier $Y(f)$ s'écrit également :

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \delta(f - f_n), \quad (5.115)$$

avec $f_n = n/T$. En utilisant les propriétés du produit de convolution par un Dirac, on peut alors développer $Z(f)$:

$$\begin{aligned} Z(f) &= X(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \delta(f - f_n), \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n X(f - f_n). \end{aligned} \quad (5.116)$$

Le spectre résultant est donc un spectre périodisé, obtenu comme la somme des spectres $X(f)$ décalés de $f_n = n/T$ et pondérés par Y_n

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac (opérateur d'échantillonnage)

Soit $\delta_T(t)$ le peigne de Dirac de période T :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (5.117)$$

Cette fonction est périodique et son développement en séries de Fourier (complexes) s'écrit :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta_n \exp(j2\pi f_n t), \quad (5.118)$$

avec $f_n = n/T$ et :

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \delta_T(t) \exp(-j2\pi f_n t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \delta_T(t) \exp(0) dt \\ &= \frac{1}{T}, \end{aligned} \quad (5.119)$$

car $\delta_T(t)$ ne possède qu'une seule impulsion (en $f_0 = 0$) dans l'intervalle $[-T/2, +T/2]$. On a donc :

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi f_n t). \quad (5.120)$$

La transformée de Fourier est alors simplement :

$$\mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/T) = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f). \quad (5.121)$$

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac $\delta_T(t)$ de période T est un peigne de Dirac $\frac{1}{T} \delta_{1/T}(f)$ de période $1/T$ (Fig. 5.6).

5.5.2 Enveloppe spectrale

On peut formaliser un signal périodique de période T comme la répétition d'un signal $x(t, T)$ (à énergie finie) avec un décalage temporel de T , que l'on peut écrire :

$$x(t) = \text{rep}_T\{x(t, T)\} = x(t, T) * \delta_T(t). \quad (5.122)$$

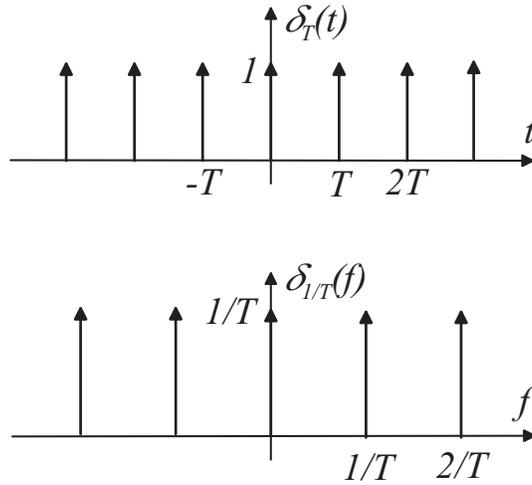


FIGURE 5.6 – Peigne de Dirac $\delta_T(t)$ de période T (en haut) et sa transformée de Fourier (en bas), qui est un peigne de Dirac de période $1/T$

D'après cette formalisation, on en déduit la TF :

$$\begin{aligned} X(f) &= X(f, T) \cdot \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(f_n, T) \delta(f - f_n), \end{aligned} \quad (5.123)$$

où $f_n = n/T$.

$X(f)$ est un spectre de raies, dont l'amplitude aux fréquences $f_n = n/T$ est donnée par $\frac{1}{T} X(f_n, T)$. La fonction $\frac{1}{T} X(f, T)$ est une fonction continue de f , appelée enveloppe spectrale de $X(f)$.

Exemple

On considère le signal carré périodique, illustré à la figure 5.7 :

$$x(t) = \text{rep}_T\{\text{Arect}(t/\theta)\} = \text{Arect}(t/\theta) * \delta_T(t). \quad (5.124)$$

La transformée de Fourier de $x(t)$ est donc :

$$X(f) = A\theta \text{sinc}(\theta f) \cdot \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f). \quad (5.125)$$

L'enveloppe spectrale est donc la fonction continue :

$$\frac{A\theta}{T} \text{sinc}(\theta f), \quad (5.126)$$

et la transformée de Fourier est le spectre de raies aux fréquences $f_n = n/T$ dont les amplitudes sont données par l'enveloppe spectrale.

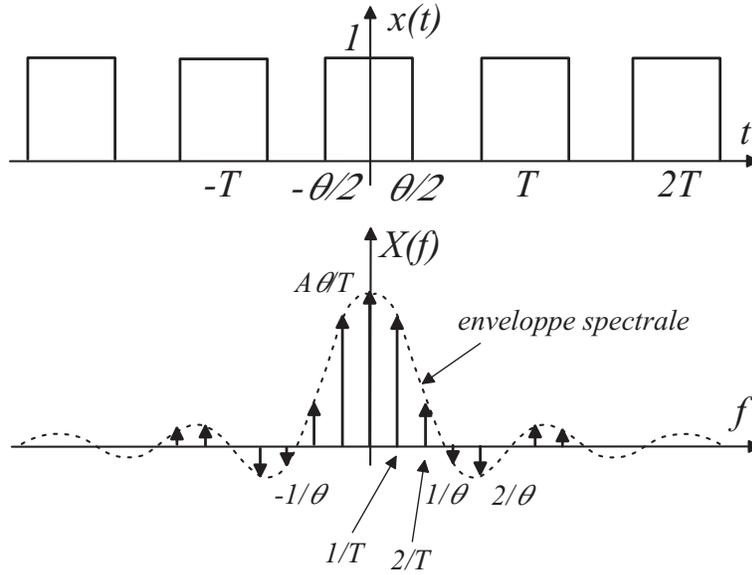


FIGURE 5.7 – Transformée de Fourier d’un signal périodique : signal carré périodique $x(t)$ (en haut) ; l’enveloppe spectrale du signal est un sinc (en tiret en bas), sa transformée de Fourier $X(f)$ est un spectre de raies (en bas) dont les amplitudes suivent l’enveloppe spectrale

5.5.3 Fonction de corrélation de signaux périodiques de même période

On rappelle que pour des signaux à puissance moyenne finie, $x(t)$ et $y(t)$, la fonction d’inter-corrélation est définie par :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} x(t)y^*(t - \tau)dt. \quad (5.127)$$

Pour des signaux périodiques de période T , le calcul de la limite est inutile. Il suffit d’intégrer sur une seule période :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y^*(t - \tau)dt, \quad (5.128)$$

ou plus généralement :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)y^*(t - \tau)dt. \quad (5.129)$$

Puisque les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques de période T , on peut les développer en séries de Fourier :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \exp\left(j2\pi \frac{k}{T}t\right), \\ \text{avec } X_k &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \exp\left(-j2\pi \frac{k}{T}t\right)dt, \end{aligned} \quad (5.130)$$

et :

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l \exp\left(j2\pi \frac{l}{T}t\right), \\ \text{avec } Y_l &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) \exp\left(-j2\pi \frac{l}{T}t\right)dt. \end{aligned} \quad (5.131)$$

Fonction d'intercorrélation

La fonction d'intercorrélation s'exprime alors :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k \exp\left(j2\pi \frac{k}{T} t\right) Y_l^* \exp\left(-j2\pi \frac{l}{T} (t - \tau)\right) dt, \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k Y_l^* \exp\left(j2\pi \frac{l}{T} \tau\right) \int_{-T/2}^{+T/2} \exp\left(j2\pi \frac{k-l}{T} t\right) dt, \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k Y_l^* \exp\left(j2\pi \frac{l}{T} \tau\right) T \operatorname{sinc}(k - l).
 \end{aligned} \tag{5.132}$$

Or,

$$\operatorname{sinc}(k - l) = \frac{\sin \pi(k - l)}{\pi(k - l)} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l, \end{cases} \tag{5.133}$$

d'où le résultat :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n Y_n^* \exp\left(j2\pi \frac{n}{T} \tau\right). \tag{5.134}$$

La fonction d'intercorrélation est donc une fonction périodique de période T comme le montre l'expression (5.134) qui a la forme d'un développement en séries de Fourier d'un signal de période T .

Fonction d'autocorrélation

De façon similaire, on peut calculer la fonction d'autocorrélation :

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n X_n^* \exp\left(j2\pi \frac{n}{T} \tau\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \exp\left(j2\pi \frac{n}{T} \tau\right), \tag{5.135}$$

qui est aussi (et pour les mêmes raisons) une fonction périodique de période T .

5.5.4 Densité spectrale de puissance

Par définition, on rappelle que la densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Or, selon (5.134), cette dernière s'écrit :

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \exp\left(j2\pi \frac{n}{T} \tau\right). \tag{5.136}$$

En prenant la transformée de Fourier, on a donc :

$$S_{xx}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right). \tag{5.137}$$

Or, les coefficients X_n sont calculés selon la relation :

$$X_n = \frac{1}{T} \mathcal{F}\{x(t, T)\}_{f=n/T} = \frac{1}{T} X(f, T) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right). \tag{5.138}$$

L'expression (5.137) devient :

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X(f, T)|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right), \tag{5.139}$$

que l'on peut écrire à l'aide d'un peigne de Dirac :

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{T^2} |X(f, T)|^2 \delta_{1/T}(f). \quad (5.140)$$

Pour un signal périodique de période T , la densité spectrale de puissance est donc un spectre de raies situées aux fréquences $f_n = n/T$ et d'enveloppe $|X(f, T)|^2/T^2$.

5.5.5 Densité interspectrale de puissance

Par définition, c'est la transformée de Fourier de $\Gamma_{xy}(\tau)$. Par des calculs similaires à ceux réalisés pour le DSP, on trouve :

$$S_{xy}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n Y_n^* \delta\left(f - \frac{n}{T}\right), \quad (5.141)$$

que l'on peut écrire à l'aide d'un peigne de Dirac :

$$S_{xy}(f) = \frac{1}{T^2} X(f, T) Y^*(f, T) \delta_{1/T}(f). \quad (5.142)$$

5.6 Exercices

5.6.1 Propriétés de la transformée de Fourier (TF)

Parité

On veut montrer les propriétés de parité de la transformée de Fourier (TF). On considère un signal complexe $x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$ dont on note la transformée de Fourier $X(f) = R(f) + jI(f)$.

1. Exprimer $R(f)$ et $I(f)$ sous forme d'intégrales fonction de $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\sin(2\pi ft)$ et $\cos(2\pi ft)$.
2. Cas d'un signal $x(t)$ réel. Ecrire les formes simplifiées de $R(f)$ et $I(f)$. Calculer ensuite $R(-f)$ et $I(-f)$. Montrer alors que $X(-f) = X(f)^*$.
3. Discuter ensuite le cas particulier d'un signal réel pair et d'un signal réel impair.
4. Cas d'un signal $x(t)$ imaginaire pur. Ecrire les formes simplifiées de $R(f)$ et $I(f)$. Calculer ensuite $R(-f)$ et $I(-f)$. Montrer alors que $X(-f) = -X(f)^*$.
5. Discuter ensuite le cas particulier d'un signal imaginaire pair et d'un signal réel impair.

Propriétés des spectres d'amplitude et de phase d'un signal réel

On considère un signal réel $x(t)$ que l'on décompose sous la forme d'une somme d'un signal pair et d'un signal impair : $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$, et on notera les TF : $X(f) = X_p(f) + X_i(f)$.

1. En décomposant l'exponentielle complexe, montrer que la transformée de Fourier $X(f)$ est une somme de deux intégrales.
2. Sachant que la transformée de Fourier d'une fonction réelle paire est une fonction réelle paire, et que celle d'une fonction réelle impaire est une fonction imaginaire impaire, en déduire que $X_p(f) = \text{Re}(X(f))$ et $X_i(f) = j\text{Im}(X(f))$.
3. Montrer alors que le spectre d'amplitude $|X(f)|$ est pair et que le spectre de phase $\arg(X(f))$ est impair.

Propriétés diverses

On considère le signal $x(t)$ dont la transformée de Fourier (TF) est notée $X(f)$.

1. Montrer que $x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-f)$.
2. Montrer que $x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(\frac{f}{a})$
3. Montrer que $x(t - \theta) \Leftrightarrow X(f) \exp(-j2\pi f\theta)$.
4. Montrer que $x(t) \exp(-j2\pi f_0 t) \Leftrightarrow X(f - f_0)$.
5. Montrer que $x(-t) \Leftrightarrow X(-f)$.
6. Montrer que $\frac{d^n x}{dt^n}(t) \Leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$.
7. Montrer que $\int_{-\infty}^t x(u) du \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f)$.
8. Montrer que $x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(f)Y(f)$ et que $x(t)y(t) \Leftrightarrow X(f) * Y(f)$.

5.6.2 Calcul de transformées de Fourier

Transformées de Fourier par calcul direct

1. Montrer que :

$$\exp(-\alpha t)\epsilon(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j2\pi f}, \text{ pour } \alpha > 0. \quad (5.143)$$

2. Montrer que :

$$\text{rect}(t/T) \Leftrightarrow T \text{sinc}(fT). \quad (5.144)$$

En déduire la transformée de Fourier de $\text{rect}[(t - t_0)/T]$.

Calculs utilisant les propriétés de base de la TF

TF du signal impair $x(t) = 1/t$

On veut calculer la transformée de Fourier de $x(t) = 1/t$.

1. Montrer que $X(f) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{t} dt$.
2. En utilisant l'identité $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(u) du = 1$, montrer que :

$$X(f) = \begin{cases} j\pi & \text{si } f < 0, \\ -j\pi & \text{si } f > 0. \end{cases} \quad (5.145)$$

3. En déduire la transformée de Fourier de la fonction sgn .

TF du signal pair $x(t) = \exp(-\alpha|t|)$, pour $\alpha > 0$

On veut calculer la transformée de Fourier de $x(t) = \exp(-\alpha|t|)$.

1. Montrer que la fonction $2 \exp(-\alpha t)\epsilon(t)$ est la somme d'une partie paire $x_p(t) = \exp(-\alpha|t|)$ et d'une partie impaire $x_i(t)$ que l'on déterminera.
2. En utilisant les propriétés de parité de la transformée de Fourier d'un signal réel, et le résultat $\exp(-\alpha t)\epsilon(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$, montrer alors que :

$$\exp(-\alpha|t|) \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}. \quad (5.146)$$

TF de $x(t) = \text{rect}(t/T) \cos(2\pi f_0 t)$

On veut calculer la transformée de Fourier de $x(t) = \text{rect}(t/T) \cos(2\pi f_0 t)$, à partir du résultat $\text{rect}(t/T) \Leftrightarrow T \text{sinc}(fT)$.

1. Exprimer le \cos sous forme d'une somme de termes exponentiels complexes.
2. En utilisant les propriétés de translation de la variable f , montrer alors que :

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{T}{2} \left[\text{sinc}(T(f - f_0)) + \text{sinc}(T(f + f_0)) \right]. \quad (5.147)$$

3. Tracer $\text{rect}(t/T)$ et sa transformée de Fourier, puis $\text{rect}(t/T) \cos(2\pi f_0 t)$ et sa transformée de Fourier.

TF d'une impulsion à décroissance exponentielle modulée

On considère le signal réel $x(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau) \epsilon(t) \cos(2\pi f_0 t)$, qui correspond à une impulsion à décroissance exponentielle modulée. On calculera la TF de deux manières différentes :

1. En écrivant le \cos sous forme exponentielle complexe et en utilisant les propriétés de la TF, montrer que :

$$x(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[X(f - f_0) + X(f + f_0) \right]. \quad (5.148)$$

2. Montrer ce résultat en exprimant la transformée de Fourier de $x(t)$ sous forme d'un produit de convolution dans le domaine des fréquences.

5.6.3 Calcul de TF et tracés de leur spectres d'amplitude et de phase

Fonction rect non décalée

On veut calculer la transformée de Fourier de la fonction rect avec ou sans décalage, et tracer ses spectres d'amplitude et de phase. On utilisera sans le montrer le résultat : $\text{rect}(t/T) \Leftrightarrow T \text{sinc}(fT)$.

1. Tracer approximativement la fonction $X(f)$. Calculer les spectres d'amplitude et de phase ;
2. En tenant compte des propriétés de parités des spectres d'amplitude (pair) et de phase (impair), tracer approximativement les spectres d'amplitude et de phase.

Fonction rect décalée de t_0

A partir du résultat : $\text{rect}(t/T) \Leftrightarrow T \text{sinc}(fT)$ et des propriétés de la TF, calculer la transformée de Fourier de : $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$.

1. Calculer le spectre d'amplitude $X(f)$. Le tracer.
2. Calculer ensuite la phase de $X(f)$ et la tracer dans les trois cas : $t_0 < T/2$, $t_0 = T/2$ et $t_0 > T/2$. On tiendra compte que le spectre de phase d'un signal réel est une fonction impaire.

Fonction tri

1. Montrer que $\text{tri}(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t)$.
2. En déduire que la transformée de Fourier de $\text{tri}(t)$ est $X(f) = \text{sinc}^2(f)$.
3. Calculer le module et la phase de $X(f)$ et les tracer.

5.6.4 Convolution et corrélation

On considère les signaux $x(t) = \exp(-at)\epsilon(t)$ et $y(t) = \exp(-2at)\epsilon(t)$.

1. Calculer le produit de convolution $z(t) = (x * y)(t)$.
2. Calculer la fonction d'intercorrélation $\Gamma_{xy}(\tau)$.
3. Tracer les deux fonctions $z(t)$ et $\Gamma_{xy}(\tau)$.
4. En utilisant la relation montrée dans le cours entre la convolution et le corrélation, indiquer à quelle condition convolution et corrélation coïncident.

5.6.5 Applications des transformées de Fourier

Calcul d'une intégrale

Calculer l'intégrale :

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3\tau}{\tau} \frac{\sin(t-\tau)}{t-\tau} d\tau. \quad (5.149)$$

Calcul d'intégrale de la fonction sinc

1. Montrer que $\text{sinc}(t) * \text{sinc}(t) = \text{sinc}(t)$.
2. En utilisant la relation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)Y(f)df, \quad (5.150)$$

calculer les trois intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(f)df = 1, \quad (5.151)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(f)df = 1, \quad (5.152)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^3(f)df = 3/4. \quad (5.153)$$

Calcul d'énergie

Calculer l'énergie totale du signal réel $x(t) = t \exp(-t)\epsilon(t)$:

1. en opérant sur la représentation temporelle,
2. en opérant dans le domaine fréquentiel, par application du théorème de Parseval.

Indications : dans la seconde méthode, on posera :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^2}, \quad (5.154)$$

et on montrera la relation de récurrence : $2I_2 = I_1$. On rappelle également que :

$$(\arctan(u))' = \frac{1}{1+u^2}. \quad (5.155)$$

5.6.6 Auto-corrélation, densités spectrales d'énergie et de puissance

Exponentielle décroissante

Soit le signal $x(t) = \exp(-at)\epsilon(t)$.

1. Calculer la fonction d'auto-corrélation $\Gamma_{xx}(\tau)$ de $x(t)$.
2. Calculer ensuite la densité spectrale d'énergie $S_{xx}(f)$ de $x(t)$.
3. Vérifier ensuite l'égalité : $S_{xx}(f) = |X(f)|^2$.
4. Tracer $\Gamma_{xx}(\tau)$ et $S_{xx}(f)$.

Signal rectangle

Soit le signal $x(t) = A \text{rect}(t/T)$.

1. Calculer et tracer la fonction d'auto-corrélation $\Gamma_{xx}(\tau)$ de $x(t)$.
2. Calculer ensuite la densité spectrale d'énergie $S_{xx}(f)$ de $x(t)$, soit en appliquant la définition, soit en utilisant la formule de Parseval.

Signal sinusoïdal

Soit le signal $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \alpha)$.

1. Calculer la transformée de Fourier $X(f)$ de $x(t)$.
2. Représenter le spectre d'amplitude et de phase de $X(f)$, pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$.
3. Calculer la fonction d'auto-corrélation $\Gamma_{xx}(\tau)$.
4. Calculer ensuite la densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ de $x(t)$ en appliquant la définition.
5. Calculer ensuite la puissance moyenne totale P_x à partir de la fonction d'auto-corrélation et à partir de la densité spectrale de puissance.

Auto-corrélation et inter-corrélation

On considère les deux signaux $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ et $y(t) = \frac{A}{2} \cos(2f_0 t + \pi/4)$.

1. Calculer la fonction d'inter-corrélation $\Gamma_{xy}(\tau)$.
2. Soit $z(t) = x(t) + y(t)$. Calculer l'auto-corrélation $\Gamma_{zz}(\tau)$ du signal $z(t)$.
3. Calculer ensuite la densité spectrale de puissance $S_{zz}(f)$.
4. Par application de la formule de Parseval, calculer la puissance totale P_z du signal $z(t)$.

Suite d'impulsions périodiques

On considère le signal $x(t) = \text{rep}_T\{A \text{rect}(t/\Delta)\}$.

1. Calculer la fonction d'auto-corrélation $\Gamma_{xx}(\tau)$ de $x(t)$.
2. Tracer $\Gamma_{xx}(\tau)$ pour $\Delta < T/2$ et pour $\Delta > T/2$.
3. Calculer la densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ du signal $x(t)$.
4. Tracer $S_{xx}(f)$.

Répétition d'impulsions de signes contraires

On considère le signal :

$$x(t) = A \operatorname{rep}_T \left\{ \operatorname{rect} \left(\frac{t + T/4}{\Delta} \right) - \operatorname{rect} \left(\frac{t - T/4}{\Delta} \right) \right\}. \quad (5.156)$$

1. Calculer la fonction d'autocorrélation $\Gamma_{xx}(\tau)$ de $x(t)$.
2. Tracer $\Gamma_{xx}(\tau)$ pour pour $\Delta < T/4$ et $T/4 < \Delta < T/2$.
3. Calculer la densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ du signal $x(t)$.
4. Tracer $S_{xx}(f)$.

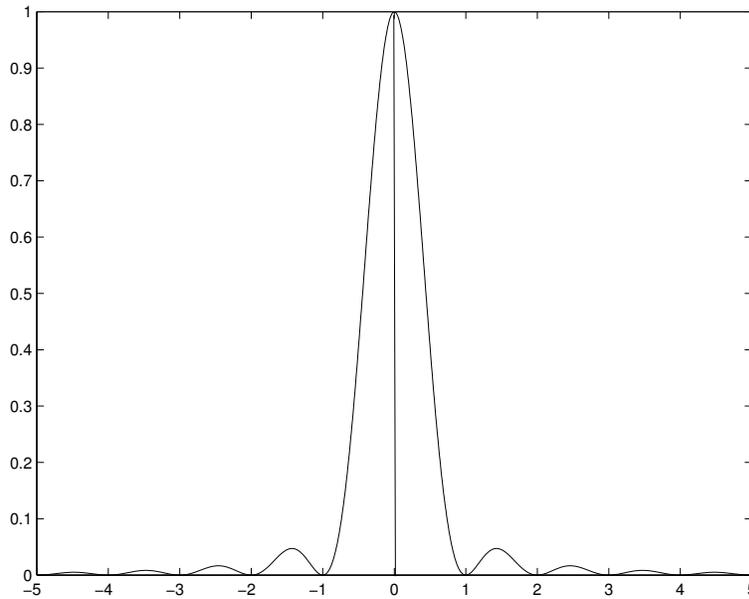


FIGURE 5.8 – Fonction $\operatorname{sinc}^2(u)$

5.6.7 Filtrage

1. On considère le signal $x(t) = \exp t$ et le filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = (3 \exp(-2t) - 1)\epsilon(t)$. Calculer la sortie du filtre $y(t) = (x * h)(t)$.
2. La réponse impulsionnelle d'un système linéaire vaut $h(t) = \delta(t) + 2 \exp(-3t)\epsilon(t)$. Calculer $H(f)$ et la réponse au signal $x(t) = 4 \cos^2(2t)$.
3. On considère le système de la figure 5.9, constitué d'un bloc $H(f) = \exp(-j2\pi fT)$ et d'un amplificateur de gain a , avec $|a| < 1$. L'entrée du filtre est le signal $x(t)$, la sortie est le signal $y(t)$.
 - Exprimer, dans le domaine temporel, le signal en sortie de l'amplificateur, puis celui à la sortie du bloc $H(f)$.
 - Exprimer ensuite $y(t)$ en fonction de $x(t)$ et de $y(t - T)$.
 - Calculer $Y(f)$, transformée de Fourier de $y(t)$. En déduire la fonction de transfert $H_r(f)$ du filtre récursif dont l'entrée est $X(f)$ et la sortie $Y(f)$.
 - Montrer enfin que $h_r(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \delta(t - nT)$.

4. Autre approche pour le filtre récursif : calculer directement la relation entre $Y(f)$ et $X(f)$. En déduire la fonction de transfert du filtre récursif, $H_r(f)$, puis la réponse impulsionnelle $h_r(t)$.

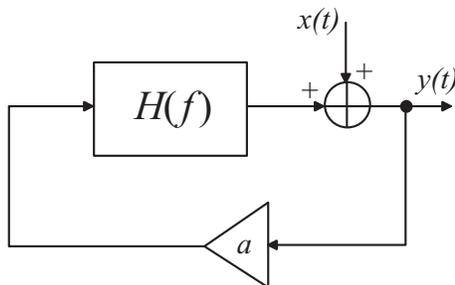


FIGURE 5.9 – Filtre récursif.

Chapitre 6

Signaux aléatoires

Par définition, un signal aléatoire ne peut pas être décrit par une loi mathématique qui prédit sa valeur à chaque instant, car cette valeur n'est pas prédictible analytiquement. En revanche, on peut décrire ses propriétés à l'aide de probabilités et de statistiques.

Mathématiquement, un signal aléatoire sera considéré comme la réalisation d'un processus aléatoire (*random process*), et la valeur prise à un instant t_i comme une variable aléatoire (VA).

L'intérêt de la notion de signal aléatoire est de permettre la modélisation de nombreux phénomènes, par exemple :

- l'arrivée de particules γ ,
- le bruit thermique dû à l'agitation thermique dans un conducteur,
- les perturbations liées aux astres sans intérêt pour l'astrophysiciens,
- les perturbations liées à l'action du soleil ou de brouilleurs en télécommunications,
- etc.

6.1 Processus, signal et variable aléatoires

6.1.1 Exemple

Considérons une diode Zéner polarisée par un courant I en régime d'avalanche à une température T_0 (Fig. 6.1 à gauche). La tension aux bornes du composant est une tension avec de fortes fluctuations que l'on peut modéliser par :

$$V(t) = V_Z + B(t). \quad (6.1)$$

A l'aide d'un oscilloscope (en AC) et en choisissant le facteur d'amplification maximum, on peut observer le bruit $B(t)$ (Fig. 6.1 à droite).

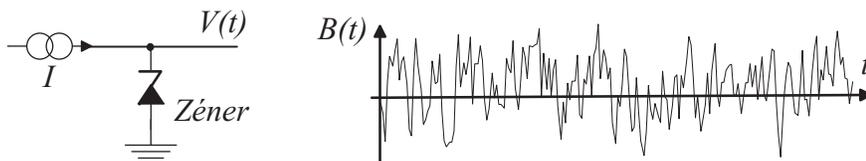


FIGURE 6.1 – Dispositif de génération de bruit (à gauche) et tension de bruit observée (à droite)

Supposons que l'on effectue la même expérience sur N dispositifs similaires, on obtient N réalisations, notées $B(t, \zeta_j)$ du processus aléatoire $B(t, \zeta)$. Par ailleurs, l'ensemble des valeurs prises par les différentes épreuves à un instant t_i , correspond aux réalisations de la variable aléatoire $B(t_i)$. Une réalisation (une épreuve) est un signal aléatoire de dimension infinie; une réalisation échantillonnée est un vecteur aléatoire (de dimension finie ou infinie). La figure 6.2 représente quelques réalisations de ce processus aléatoire.

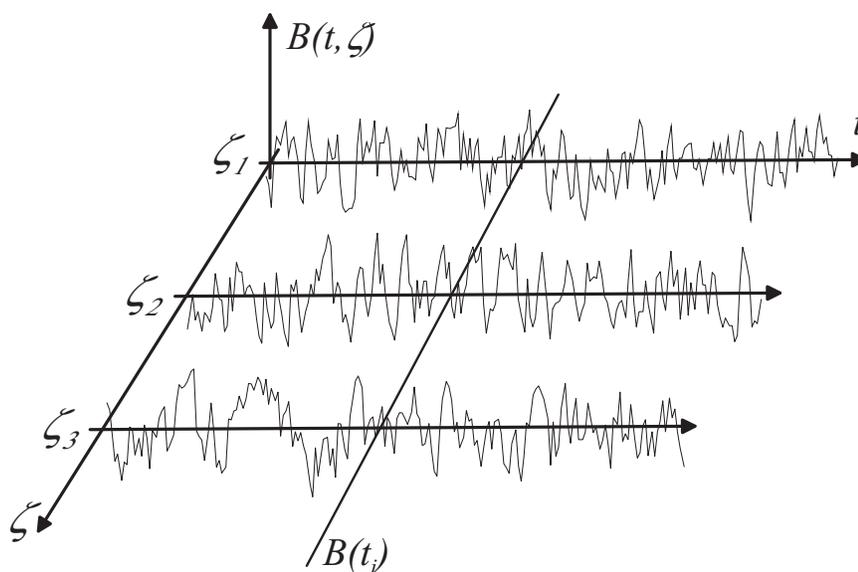


FIGURE 6.2 – Du processus aléatoire $B(t, \zeta)$, au signal aléatoire $B(t, \zeta_j)$, au vecteur aléatoire $B(t_k, \zeta_j)$, $t_k = kT_e$, et à la variable aléatoire $B(t_i)$

Processus aléatoire

Définition 6.1.1 (Processus aléatoire) *Un processus aléatoire (ou stochastique) est une famille de fonctions $X(t)$, réelles ou complexes, définies dans un espace de probabilité, c'est-à-dire dépendant de deux variables, dont l'une est le temps t (usuellement, mais cela peut être l'espace pour des images), et dont l'autre est la variable ζ de l'espace des épreuves Ω .*

Selon que les variables sont continues ou discrètes, on parle de processus aléatoires continus ou discrets.

Si le temps est discret en raison d'un échantillonnage, on a une suite aléatoire. Si le temps est discontinu et que le signal apparaît à des instants aléatoires, on parle de processus ponctuel.

Exemples

- processus gaussiens : processus continus,
- processus de Poisson : processus ponctuels,
- processus échantillonnés : processus discrets.

6.1.2 Signaux aléatoires

Pour une réalisation ζ_i donnée, le processus aléatoire $X(t, \zeta)$ se réduit à une fonction $x(t, \zeta_i)$ que l'on notera simplement $x_i(t)$: c'est un signal aléatoire.

Par convention, un signal aléatoire $x(t)$ est considéré comme un signal à puissance moyenne finie, dont la puissance est calculée par l'équation :

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt. \quad (6.2)$$

A partir de $x(t)$, on peut définir la moyenne temporelle du signal :

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt, \quad (6.3)$$

ou de toute fonction de celui-ci :

$$\overline{f(x)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(x(t)) dt. \quad (6.4)$$

6.1.3 Variables aléatoires

Par ailleurs, à chaque instant t_i , le processus aléatoire $X(t, \zeta)$ se réduit à une variable aléatoire $X(t_i, \zeta)$, notée simplement $X(t_i)$ ou X_i , dont le comportement nécessite la connaissance de sa fonction de répartition :

$$F_{X_i}(u) = F_X(u, t_i) = \text{Prob}(X_i \leq u), \quad (6.5)$$

ou de sa densité de probabilité :

$$p_{X_i}(u) = p_X(u, t_i) = \frac{d}{du} F_{X_i}(u). \quad (6.6)$$

Pour évaluer la moyenne \bar{X} de la variable aléatoire X , on peut calculer la moyenne de N épreuves :

$$\bar{X} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n, \quad (6.7)$$

ou, si l'on connaît la loi de probabilité de X , l'espérance mathématique :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} up_X(u) du. \quad (6.8)$$

De même, on peut définir la variable aléatoire $Y = f(X)$ et sa moyenne :

$$E[Y] = E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)p_X(u) du. \quad (6.9)$$

6.1.4 Vecteurs aléatoires

Soient k dates arbitraires, t_1, t_2, \dots, t_k , les variables aléatoires (VA) associées, X_1, X_2, \dots, X_k , forment un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$. Ce vecteur est caractérisé par sa fonction de répartition, qui est une fonction multivariable, de k variables :

$$F_{\mathbf{X}}(u_1, \dots, u_k) = \text{Prob}(X_1 \leq u_1, \dots, X_k \leq u_k). \quad (6.10)$$

Cette fonction caractérise les statistiques d'ordre k du processus aléatoire $X(t, \zeta)$.

De façon générale, on s'intéresse à des statistiques :

- d'ordre 1 : variable aléatoire à une date donnée t_i ,
- d'ordre 2 : vecteur aléatoire à 2 dimensions, pour étudier les statistiques jointes de deux VA à deux dates différentes.

6.1.5 Statistique d'ordre 1

Soit X_i la VA réelle correspondant aux valeurs du processus aléatoire $X(t, \zeta)$ à l'instant t_i . Sa fonction de répartition est notée :

$$F_{X_i}(u) = F_X(u, t_i) = \text{Prob}(X_i \leq u), \quad (6.11)$$

et sa densité de probabilité :

$$p_{X_i}(u) = p_X(u, t_i) = \frac{d}{du} F_{X_i}(u). \quad (6.12)$$

On peut alors définir les différents moments statistiques.

Moyenne, ou moment d'ordre 1

$$\mu_{X_i,1} = \mu_{X,1}(t_i) = E[X_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} u p_{X_i}(u) du. \quad (6.13)$$

Moment de degré ou d'ordre n

$$\mu_{X_i,n} = \mu_{X,n}(t_i) = E[X_i^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n p_{X_i}(u) du. \quad (6.14)$$

Moment centré de degré ou d'ordre n

$$\mu'_{X_i,n} = \mu'_{X,n}(t_i) = E[(X_i - E[X_i])^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - E[X_i])^n p_{X_i}(u) du. \quad (6.15)$$

Moment centré de degré ou d'ordre 2

Ce moment s'appelle la variance. Définie comme :

$$\mu'_{X_i,2} = \mu'_{X,2}(t_i) = E[(X_i - E[X_i])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - E[X_i])^2 p_{X_i}(u) du, \quad (6.16)$$

la variance s'exprime aussi de façon générale à partir de la moyenne et du moment (non centré) d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \mu'_{X_i,2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u - E[X_i])^2 p_{X_i}(u) du, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 - 2uE[X_i] + E[X_i]^2) p_{X_i}(u) du, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 p_{X_i}(u) du - 2E[X_i] \int_{-\infty}^{+\infty} u p_{X_i}(u) du + E[X_i]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_i}(u) du \\ &= E[X_i^2] - E[X_i]^2. \end{aligned} \quad (6.17)$$

La variance est une mesure de la dispersion de la VA autour de sa moyenne. Sa racine carrée est appelée écart-type (*standard deviation*).

Loi gaussienne

Si la variable X suit une loi gaussienne (ou normale), de moyenne nulle et de variance σ^2 , sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right). \quad (6.18)$$

De façon abrégée, on notera $X \sim N(0, \sigma^2)$. On remarque que la densité de probabilité en $u = \pm\sigma$ vaut :

$$p_X(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\right). \quad (6.19)$$

De plus, la probabilité d'observer une valeur $|u| \leq \sigma$ vaut :

$$\text{Prob}(|u| \leq \sigma) = \int_{-\sigma}^{+\sigma} p_X(u) du = 0,667. \quad (6.20)$$

Loi uniforme dans l'intervalle $[-1/2, +1/2]$

Soit X une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[-1/2, +1/2]$. La densité est donc égale à 1 sur cet intervalle et 0 en dehors :

$$p_X(u) = \text{rect}(u). \quad (6.21)$$

Cette variable est centrée, ce que l'on vérifie en calculant sa moyenne :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} u p_X(u) du = \int_{-1/2}^{+1/2} u du = 0. \quad (6.22)$$

Le moment d'ordre deux se calcule aisément :

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 p_X(u) du = \int_{-1/2}^{+1/2} u^2 du = \frac{1}{12}. \quad (6.23)$$

Puisque la VA est centrée, la variance est aussi égale au moment d'ordre 2 :

$$\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] = \frac{1}{12}. \quad (6.24)$$

6.1.6 Statistiques d'ordre 2

Soit le couple de VA, $X_1 = X(t_1)$ et $X_2 = X(t_2)$, dont la fonction de répartition est :

$$F_{\mathbf{X}}(u_1, u_2) = \text{Prob}(X_1 \leq u_1, X_2 \leq u_2), \quad (6.25)$$

et la densité de probabilité :

$$p_{\mathbf{X}}(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 F_{\mathbf{X}}(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}. \quad (6.26)$$

On peut alors définir les différents moments du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$:

$$\mu_{m,n} = E[X_1^m X_2^n]. \quad (6.27)$$

En particulier, pour comparer les variables aléatoires, on utilise la fonction d'autocorrélation statistique :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[X_1 X_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 u_2 p_{\mathbf{X}}(u_1, u_2) du_1 du_2, \quad (6.28)$$

ainsi que la fonction d'autocovariance, qui n'est autre que la fonction d'autocorrélation des variables centrées :

$$\begin{aligned} C_{xx}(t_1, t_2) &= E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_1 - E[X_1])(u_2 - E[X_2]) p_{\mathbf{X}}(u_1, u_2) du_1 du_2. \end{aligned} \quad (6.29)$$

En utilisant les propriétés de linéarité de l'intégration, on peut écrire :

$$\begin{aligned} C_{xx}(t_1, t_2) &= E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])] \\ &= E[X_1 X_2 - E[X_1] X_2 - X_1 E[X_2] + E[X_1] E[X_2]] \\ &= E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2] \\ &= R_{xx}(t_1, t_2) - E[X_1] E[X_2]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Si $t_1 = t_2$, on a évidemment $C_{xx}(t_1, t_1) = \sigma_{X_1}^2$.

6.2 Stationnarité et ergodisme

6.2.1 Stationnarité

Définition 6.2.1 (Stationnarité au sens strict) *Un processus aléatoire est dit stationnaire au sens strict (strict sense) si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes à un changement d'origine du temps.*

Définition 6.2.2 (Stationnarité au sens large) *Un processus aléatoire est dit stationnaire au sens large (large sense) si toutes ses propriétés statistiques d'ordre 1 et 2 sont invariantes à un changement d'origine du temps.*

Pour un processus aléatoire stationnaire au sens strict, on a donc $p_{X_i}(u) = p_{X_j}(u) = p_X(u)$, $\forall i, j$. Par conséquent, à l'ordre 1, on a :

$$\begin{aligned} E[X_i] &= E[X] \\ \sigma_{X_i}^2 &= \sigma_X^2. \end{aligned} \quad (6.31)$$

A l'ordre 2, la fonction de répartition $F_{X_1, X_2}(u_1, u_2)$ ne dépend que de la différence $t_2 - t_1 = \tau$, et par conséquent on peut définir les fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance comme :

$$\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= R_{xx}(\tau) \\ C_{xx}(t_1, t_2) &= C_{xx}(\tau). \end{aligned} \quad (6.32)$$

A partir (6.30) et de (6.31), on vérifie que l'autocovariance et l'autocorrélation sont liées par la relation :

$$C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - E[X]^2. \quad (6.33)$$

6.2.2 Ergodisme

Définition 6.2.3 (Ergodicité) *Un processus aléatoire est dit ergodique (ergodic) si les valeurs moyennes statistiques (d'ensemble sur ζ) sont égales aux valeurs moyennes temporelles (sur une seule réalisation) :*

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)p_X(u)du = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f[x(t)]dt = \overline{f(x)}. \quad (6.34)$$

La conséquence de cette hypothèse est très importante en pratique. Elle permet de remplacer les calculs de moments statistiques (qui supposent connues les densités de probabilité ou les fonctions de répartition) par les moyennes temporelles sur une seule réalisation (observation). En pratique, faire une estimation de la moyenne temporelle sur une fenêtre de taille infinie est impossible. Il faut se contenter d'une approximation calculée sur une fenêtre de taille finie, qui tendra asymptotiquement, avec la taille de la fenêtre, vers la moyenne temporelle.

Cette hypothèse d'ergodicité est cependant difficile à vérifier. On admettra fréquemment que les processus aléatoires usuels sont ergodiques.

Contre-exemple

Soit un processus aléatoire $X(t, \zeta)$ tel que chaque réalisation (pour ζ_i) $X_i(t) = a$, où a est une valeur tirée au hasard comme réalisation d'une variable aléatoire A de densité $p_A(u)$.

De façon évidente, la moyenne temporelle sur une réalisation est égale à :

$$\overline{X_i(t)} = a, \quad (6.35)$$

alors que la moyenne d'ensemble vaut :

$$E[X_i(t)] = E[A] = \mu_A. \quad (6.36)$$

A priori, $\mu_A \neq a$ et par conséquent le processus ainsi défini n'est généralement pas ergodique.

6.3 Autocorrélation et autocovariance des processus aléatoires stationnaires

6.3.1 Autocorrélation

Pour un processus stationnaire, l'autocorrélation statistique est définie par :

$$R_{xx}(\tau) = E[X(t)X(t - \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 u_2 p_{X_1, X_2}(u_1, u_2) du_1 du_2, \quad (6.37)$$

où u_1 et u_2 sont les valeurs prises par $X(t_1)$ et $X(t_2)$, avec $t_2 - t_1 = \tau$, respectivement.

On définit aussi l'autocorrélation temporelle¹ :

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t-\tau)dt. \quad (6.38)$$

Sous l'hypothèse d'ergodicité, on a donc :

$$R_{xx}(\tau) = \Gamma_{xx}(\tau). \quad (6.39)$$

En pratique,

- calculer $R_{xx}(\tau)$ demande la connaissance de la densité de probabilité, c'est-à-dire un modèle statistique du signal et souvent un calcul théorique ;
- calculer $\Gamma_{xx}(\tau)$ est impossible rigoureusement, car la réalisation $x(t)$ n'est pas connue sur \mathbb{R} ; on ne peut donc qu'en faire une estimation (approximation) sur une fenêtre temporelle finie :

$$\widehat{\Gamma}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t-\tau)dt, \quad (6.40)$$

qui vérifie $\lim_{T \rightarrow +\infty} \widehat{\Gamma}_{xx}(\tau) = \Gamma_{xx}(\tau)$.

6.3.2 Autocovariance

C'est l'autocorrélation du processus centré. Si celui-ci est stationnaire, on a :

$$C_{xx}(\tau) = E[(X(t) - E[X])(X(t-\tau) - E[X])] = R_{xx}(\tau) - E[X]^2. \quad (6.41)$$

Définition 6.3.1 (Coefficient d'autocorrélation) On appelle coefficient de corrélation l'autocovariance normalisée :

$$\rho_X(\tau) = \frac{C_{xx}(\tau)}{\sigma_X^2} = \frac{C_{xx}(\tau)}{C_{xx}(0)}. \quad (6.42)$$

De façon évidente, on a $\rho_X(0) = 1$.

6.3.3 Propriétés

Dans ce paragraphe et dans la suite, on considère des processus, signaux et variables aléatoires réels. Dans le cas complexe, dans les définitions de l'autocorrélation (6.40), le second terme, $x(t-\tau)$, doit être simplement conjugué.

Parité

Les fonction d'autocorrélation et d'autocovariance sont paires pour des processus réels :

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau) \quad \text{et} \quad C_{xx}(\tau) = C_{xx}(-\tau). \quad (6.43)$$

1. on note que la définition suppose implicitement que le signal est à puissance moyenne finie

Valeur en $\tau = 0$

En $\tau = 0$, on a

$$C_{xx}(0) = \sigma_X^2 \quad \text{et} \quad R_{xx}(0) = \sigma_X^2 + \mu_X^2. \quad (6.44)$$

La quantité $C_{xx}(0)$ correspond à la puissance moyenne des fluctuations du signal, alors que $R_{xx}(0)$ correspond à la puissance moyenne totale.

Inégalités

Comme pour les signaux déterministes, on a les inégalités suivantes :

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0) \quad \text{et} \quad |C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0). \quad (6.45)$$

Pour montrer la première inégalité, on écrit :

$$\begin{aligned} E[(X(t) \pm X(t - \tau))^2] &= E[X^2(t) + X^2(t - \tau) \pm 2X(t)X(t - \tau)], \\ &= 2[R_{xx}(0) \pm R_{xx}(\tau)] \geq 0, \end{aligned} \quad (6.46)$$

d'où l'encadrement :

$$-R_{xx}(0) \leq R_{xx}(\tau) \leq +R_{xx}(0) \quad (6.47)$$

L'autre inégalité peut être démontrée de façon similaire.

Coefficient de corrélation

A partir des inégalités précédentes, il est facile de montrer que le coefficient de corrélation vérifie :

$$-1 \leq \rho_X(\tau) = \frac{C_{xx}(\tau)}{C_{xx}(0)} \leq +1. \quad (6.48)$$

Comportement pour $\tau \rightarrow \infty$

Pour un processus aléatoire sans composante périodique, on peut montrer que la dépendance entre $X(t)$ et $X(t - \tau)$ diminue lorsque τ augmente. On a alors :

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} C_{xx}(\tau) = 0, \quad (6.49)$$

et

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} C_{xx}(\tau) + \mu_X^2 = \mu_X^2. \quad (6.50)$$

La fonction d'autocorrélation suit donc l'allure de la figure 6.3.

Matrice de corrélation

Pour le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$ on peut définir une matrice de corrélation dont les éléments sont les fonctions de corrélation des composantes deux à deux :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T]. \quad (6.51)$$

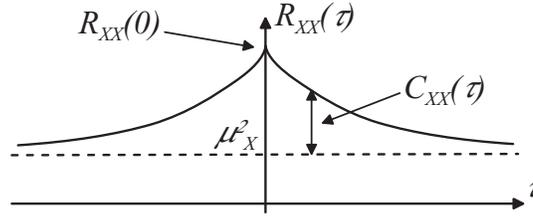


FIGURE 6.3 – Allure typique de la fonction d'autocorrélation statistique d'un processus aléatoire sans composante périodique

Si les instants d'échantillonnage t_i sont réguliers, de la forme $t_i = t_1 + (i - 1)T_e$, où T_e est la période d'échantillonnage, on a :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(T_e) & \cdots & R_{xx}((k-1)T_e) \\ R_{xx}(T_e) & R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}((k-2)T_e) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}((k-1)T_e) & \cdots & R_{xx}(T_e) & R_{xx}(0) \end{pmatrix}. \quad (6.52)$$

Cette matrice est symétrique et chaque diagonale est constituée d'éléments identiques.

Dans le cas complexe, la définition est $\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^H]$, où \mathbf{X}^H est le transposé conjugué de \mathbf{X} . La matrice de corrélation n'est plus symétrique, mais hermitienne (on parle de symétrie hermitienne), c'est-à-dire : $(\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}})_{ij} = [(\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}})_{ji}]^*$.

Une matrice dont chaque diagonale est constituée d'éléments identiques s'appelle matrice de Toeplitz. C'est donc le cas de la matrice de corrélation, dans le cas de variable réelle comme complexe.

Matrice de covariance

On définit également une matrice de covariance à partir du vecteur aléatoire centré :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} C_{xx}(0) & C_{xx}(T_e) & \cdots & C_{xx}((k-1)T_e) \\ C_{xx}(T_e) & C_{xx}(0) & \cdots & C_{xx}((k-2)T_e) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ C_{xx}((k-1)T_e) & \cdots & C_{xx}(T_e) & C_{xx}(0) \end{pmatrix}. \quad (6.53)$$

Les éléments de la diagonale principale sont égaux à $C_{xx}(0) = \sigma_X^2$, c'est-à-dire à la variance de $X(t)$. Pour cette raison, cette matrice est parfois appelée matrice de variance-covariance.

Interprétation des fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance

Les fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance peuvent être interprétées de façon similaire à celle présentée pour les signaux déterministes, c'est-à-dire comme une mesure de ressemblance entre signaux.

En effet, les espérances mathématiques peuvent être considérées comme des produits scalaires associés à des variables aléatoires.

De plus, la valeur quadratique moyenne statistique de $X(t) - X(t - \tau)$ s'interprète en termes d'orthogonalité. Pour un processus centré ($\mu_X = 0$), en notant $X(t) = X$ et $X(t - \tau) = X_\tau$, on

a :

$$\begin{aligned}
E[(X(t) - X(t - \tau))^2] &= d^2(X, X_\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_1 - u_2)^2 p_{X_1 X_2}(u_1, u_2; \tau) du_1 du_2 \\
&= 2[\sigma_X^2 - C_{xx}(\tau)] \\
&= 2\sigma_X^2[1 - \rho_X(\tau)].
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Cette distance s'annule si et seulement si $\rho_X(\tau) = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\tau = 0$. Les variables $X(t)$ et $X(t - \tau)$ sont non corrélées pour les valeurs de τ telles que $C_{xx}(\tau) = 0$, le carré de la distance vaut alors $2\sigma_X^2$. Les variables $X(t)$ et $X(t - \tau)$ sont orthogonales si $R_{xx}(\tau) = 0$.

6.4 Densité spectrale de puissance

6.4.1 Définition

Comme pour les signaux certains à puissance moyenne finie, la transformée de Fourier d'une réalisation $x_i(t)$ d'un processus aléatoire n'existe pas, car l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x_i(t)| dt \tag{6.55}$$

ne converge pas.

On peut définir la densité spectrale de puissance (DSP) comme la limite de la DSP sur une fenêtre de largeur T , lorsque $T \rightarrow +\infty$, si la limite existe. Soit $x_i(t)$ une réalisation d'un processus aléatoire $X(t, \zeta)$, notons :

$$x_i(t, T) = x_i(t) \text{rect}(t/T), \tag{6.56}$$

sa restriction sur une fenêtre de largeur T centrée sur l'origine (Fig. 6.4), qui vérifie évidemment : $\lim_{T \rightarrow +\infty} x_i(t, T) = x_i(t)$.

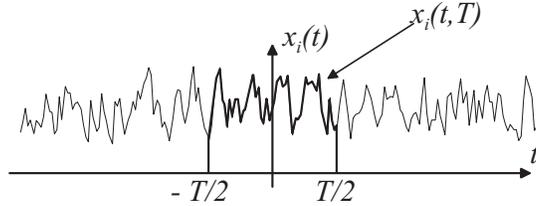


FIGURE 6.4 – Restriction $x_i(t, T)$ d'une réalisation $x_i(t)$ d'un processus aléatoire

La fonction $x_i(t, T)$ (à énergie finie) admet en général une transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}
x_i(t, T) \Leftrightarrow X_i(f, T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(t, T) \exp(-j2\pi ft) dt \\
&= \int_{-T/2}^{+T/2} x_i(t) \exp(-j2\pi ft) dt.
\end{aligned} \tag{6.57}$$

La puissance moyenne de $x_i(t, T)$ est donnée par :

$$P_{x_i, T} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_i(f, T)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_i x_i}(f, T) df, \tag{6.58}$$

où $S_{x_i x_i}(f, T) = |X_i(f, T)|^2 / T$ est la DSP de $x_i(t, T)$. Cette DSP est une grandeur aléatoire car elle change pour chaque nouvelle réalisation de $x_i(t)$: on l'appelle aussi périodogramme.

Les propriétés spectrales du processus (restreint sur T) sont donc contenues dans la moyenne statistique (sur l'ensemble des réalisations) des $S_{x_i x_i}(f, T)$, c'est-à-dire :

$$S_{xx}(f, T) = E_{x_i}[S_{x_i x_i}(f, T)] = E_{x_i}[|X_i(f, T)|^2/T] \quad (6.59)$$

La DSP du processus aléatoire complet est alors définie comme la limite :

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} E_{x_i} \left[\frac{|X_i(f, T)|^2}{T} \right]. \quad (6.60)$$

En pratique, $S_{xx}(f)$ ne peut pas être calculée. C'est une quantité purement théorique. Cependant, si le signal est stationnaire et ergodique, on peut approximer la DSP par des périodogrammes moyennés :

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_{x_n x_n}(f, T) = \frac{1}{NT} \sum_{n=1}^N |X_n(f, T)|^2. \quad (6.61)$$

6.4.2 Théorème de Wiener-Khintchine

Théorème 6.4.1 (Théorème de Wiener-Khintchine) *La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire au sens large est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation :*

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (6.62)$$

Démonstration

Partons du périodogramme d'un signal réel $x_i(t, T)$ défini au paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} S_{x_i x_i}(f, T) &= \frac{1}{T} X_i^*(f, T) X_i(f, T), \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(t) x_i(t') \text{rect}(t/T) \text{rect}(t'/T) \exp(-j2\pi f(t-t')) dt dt' \end{aligned} \quad (6.63)$$

Dans le terme exponentiel, t' apparaît avec le signe $-$ pour obtenir la TF $X_i^*(f, T)$. Puisque le processus est stationnaire, seule la différence $\tau = t - t'$ compte. On pose donc le changement de variables :

$$\begin{cases} t' &= t - \tau \\ t &= t \end{cases} \Rightarrow dt dt' = d\tau dt, \quad (6.64)$$

car le Jacobien de la transformation vaut $|J| = 1$. En prenant l'espérance mathématique et en intervertissant les opérateurs d'intégration et d'espérance, on arrive à :

$$\begin{aligned} S_{xx}(f, T) &= E[S_{x_i x_i}(f, T)], \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[x_i(t) x_i(t - \tau)] \text{rect}(t/T) \text{rect}[(t - \tau)/T] \exp(-j2\pi f\tau) dt d\tau, \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(t/T) \text{rect}[(t - \tau)/T] dt \right] \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Or, le terme entre crochets est la fonction d'autocorrélation de $\text{rect}(t/T)$ qui vaut $T \text{tri}(\tau/T)$. D'où finalement :

$$S_{xx}(f, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \text{tri}(\tau/T) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (6.66)$$

En passant à la limite quand $T \rightarrow +\infty$, on aboutit à :

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} S_{xx}(f, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau, \quad (6.67)$$

car $\text{tri}(\tau/T) \rightarrow 1$ lorsque $T \rightarrow +\infty$ (Fig. 6.5).

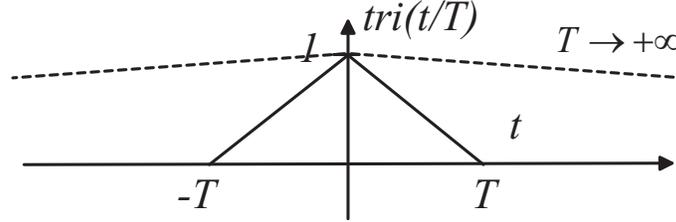


FIGURE 6.5 – Allure de la fonction $\text{tri}(t/T)$ lorsque $T \rightarrow +\infty$

Remarques

1. Ce théorème donne une définition unique de la DSP, valide pour des signaux certains et aléatoires.
2. Pour des signaux aléatoires, ce théorème fournit une méthode pratique de calcul de la DSP.
3. Si la DSP d'un signal aléatoire, $S_{xx}(f)$, est connue, on peut en déduire la fonction d'auto-corrélation $R_{xx}(\tau)$ par transformée de Fourier inverse :

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) \exp(j2\pi f\tau) df. \quad (6.68)$$

4. Pour $\tau = 0$, on a :

$$R_{xx}(0) = P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df, \quad (6.69)$$

et si le signal est ergodique, on a :

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt. \quad (6.70)$$

De plus, à partir de la relation entre autocorrélation et autocovariance :

$$R_{xx}(\tau) = C_{xx}(\tau) + \mu_x^2, \quad (6.71)$$

on déduit :

$$S_{xx}(f) = \mathcal{F}\{C_{xx}(\tau)\} + \mu_x^2 \delta(f). \quad (6.72)$$

6.4.3 Notion de bruit blanc

Définition 6.4.1 (Bruit blanc) On appelle bruit blanc un processus aléatoire W dont la densité spectrale de puissance est constante, $\forall f$:

$$S_{WW}(f) = \frac{1}{2} \eta = cte. \quad (6.73)$$

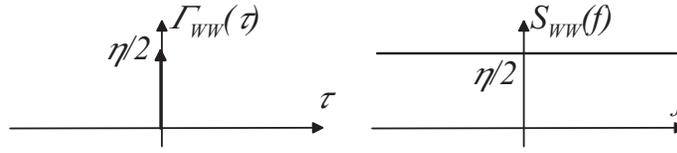


FIGURE 6.6 – Fonction d’autocorrélation (à gauche) et densité spectrale de puissance (à droite) d’un bruit blanc

Le bruit à DSP constante est dit blanc par analogie avec la lumière blanche qui contient toutes les longueurs d’onde de la lumière visible.

Le bruit blanc correspond à un modèle purement théorique. En effet, il est physiquement irréalisable car il contient des fréquences infinies et sa puissance moyenne est infinie. C’est cependant un modèle très pratique et utile pour représenter des signaux dont le spectre est constant, au moins sur une large bande de fréquence.

La fonction d’autocorrélation d’un bruit blanc est une impulsion de Dirac (Fig. 6.6). En effet, par transformée de Fourier inverse, on a :

$$S_{WW}(f) = \frac{1}{2}\eta \Leftrightarrow R_{WW}(\tau) = \frac{1}{2}\eta\delta(\tau). \quad (6.74)$$

Si ce bruit blanc est filtré par un filtre passe-bas idéal de largeur de bande B , sa densité spectrale de puissance est donnée à la Fig. 6.7 (à gauche). Ce signal aléatoire filtré a donc une puissance moyenne totale égale à :

$$P = R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{WW}(f)df = \eta B. \quad (6.75)$$

Ceci reste valable si la bruit blanc est filtré par un filtre passe-bande idéal de largeur de bande B . La densité spectrale du bruit filtré est représentée à la Fig. 6.7 (à droite), et la puissance vaut encore $P = \eta B$.

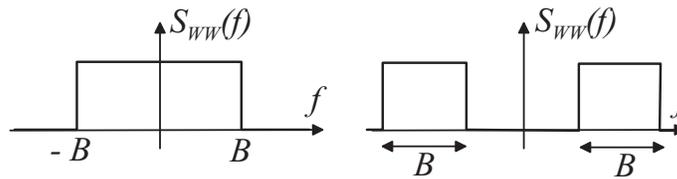


FIGURE 6.7 – Densités spectrales d’un bruit blanc filtré par des filtres idéaux de largeur de bande B , passe-bas à gauche et passe-bande à droite

Remarque

La tension de bruit thermique dans une résistance, selon le modèle de Nyquist, est un bruit blanc dont la DSP et la puissance moyenne, sur une largeur de bande B , sont :

$$\bar{e}^2(f) = 4kTR \quad \text{et} \quad P = \int (\bar{e}^2(f)/R)df = 4kTB. \quad (6.76)$$

6.5 Intercorrélation et densité interspectrale de puissance

6.5.1 Intercorrélation

Soient 2 processus aléatoires différents $x(t)$ et $y(t)$. Posons :

$$\begin{aligned}x_1 &= x(t_1), & x_2 &= x(t_2), \\y_1 &= y(t_1), & y_2 &= y(t_2).\end{aligned}\tag{6.77}$$

Si les processus sont stationnaires et réels, leur statistique d'ordre 2 ne dépend que de $\tau = t_1 - t_2$. On peut définir l'intercorrélation statistique par :

$$R_{xy}(\tau) = E[X_1 Y_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 y_2 p(x_1, y_2; \tau) dx_1 dy_2.\tag{6.78}$$

Si les processus sont ergodiques, on a aussi :

$$R_{xy}(\tau) = \Gamma_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y(t - \tau) dt.\tag{6.79}$$

6.5.2 Densité interspectrale de puissance

On définit la densité interspectrale de puissance (DISP) comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation statistique :

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E[X(f, T)Y(f, T)].\tag{6.80}$$

6.5.3 Intercovariance

La fonction d'intercovariance est la fonction d'intercorrélation des processus centrés :

$$C_{xy}(\tau) = E[(X_1 - \mu_X)(Y_2 - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) p(x_1, y_2; \tau) dx_1 dy_2.\tag{6.81}$$

En développant l'espérance selon les règles de linéarité de cet opérateur, on montre facilement :

$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \mu_X \mu_Y.\tag{6.82}$$

Si les processus $x(t)$ et $y(t)$ sont statistiquement indépendants, ou simplement non corrélés, on a :

$$C_{xy}(\tau) = 0.\tag{6.83}$$

On appelle fonction d'intercovariance normalisée, ou coefficient d'intercorrélation, le rapport :

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}.\tag{6.84}$$

Ce coefficient vérifie $|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1$. Il mesure le degré de dépendance linéaire entre les variables aléatoires X_1 et Y_2 .

6.5.4 Fonction de cohérence

Définition 6.5.1 (Fonction de cohérence) On appelle fonction de cohérence le rapport :

$$\gamma_{xy}(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}. \quad (6.85)$$

Les processus $x(t)$ et $y(t)$ sont dits incohérents à la fréquence f_0 si $\gamma_{xy}(f_0) = 0$.

Si $\gamma_{xy}(f_0) = 1$, $x(t)$ et $y(t)$ sont dits parfaitement cohérents à la fréquence f_0 .

Une fonction de cohérence inférieure à 1 indique soit la présence d'un bruit, soit une relation non linéaire entre $x(t)$ et $y(t)$.

6.6 Combinaison de signaux aléatoires

6.6.1 Transformation d'un vecteur aléatoire

Soient un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$, et \mathbf{Y} le vecteur aléatoire obtenue par application d'une transformation f sur \mathbf{X} : $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$. Les propriétés statistiques (densité de probabilité, etc.) du vecteur \mathbf{Y} sont différentes de celles du vecteur \mathbf{X} , mais peuvent s'en déduire.

En effet, considérons la transformation :

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_k), \\ \vdots \\ y_k = f_k(x_1, \dots, x_k), \end{cases} \quad (6.86)$$

et soit g la transformation inverse, c'est-à-dire telle que $\mathbf{X} = g(\mathbf{Y})$. On a alors :

$$p_{\mathbf{Y}}(y_1, \dots, y_k) = |\mathbf{J}| p_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k), \quad (6.87)$$

où $|\mathbf{J}|$ est le Jacobien de la transformation g , c'est-à-dire le déterminant de la matrice Jacobienne, de terme général $\{\mathbf{J}\}_{ij} = \partial x_i / \partial y_j$:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_k}{\partial y_k} \end{vmatrix}. \quad (6.88)$$

Exemple 1

Soit la transformation scalaire $Y = aX + b$, avec $a \neq 0$. On en déduit la transformation inverse $X = Y/a - b/a$. Le Jacobien de la transformation inverse est donc :

$$|\mathbf{J}| = \left| \frac{1}{a} \right|, \quad (6.89)$$

d'où :

$$p_Y(y) = \left| \frac{1}{a} \right| p_X\left(\frac{y-b}{a}\right). \quad (6.90)$$

Exemple 2

Soit la transformation vectorielle $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, avec \mathbf{A} est une matrice régulière. On note la transformation inverse $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}$. Le Jacobien de la transformation inverse est alors :

$$|J| = |\det \mathbf{A}^{-1}| = 1/|\det \mathbf{A}|, \quad (6.91)$$

d'où :

$$p_Y(\mathbf{y}) = |\det \mathbf{A}^{-1}| p_X(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}). \quad (6.92)$$

6.6.2 Somme de signaux aléatoires

Soit $Z = X + Y$ la somme de deux variables aléatoires. On se propose de déterminer la densité de probabilité de Z , en supposant connue la densité de probabilité jointe, p_{XY} , de X et Y .

Densité de probabilité

Pour cela, on définit la transformation linéaire \mathbf{A} suivante :

$$\begin{cases} x &= x \\ z &= x + y \end{cases} \quad (6.93)$$

On a donc :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.94)$$

On a donc $|J| = |\det \mathbf{A}^{-1}| = 1$ et par conséquent :

$$p_{XZ}(x, z) = p_{XY}(x, z - x). \quad (6.95)$$

En intégrant par rapport à x , on obtient la densité de probabilité marginale de Z :

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XZ}(x, z) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, z - x) dx. \quad (6.96)$$

Dans le cas particulier où les variables X et Y sont indépendantes, la densité jointe est le produit des densités marginales : $p_{XY}(x, z - x) = p_X(x)p_Y(z - x)$, et on a la relation simplifiée :

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(z - x) dx = (p_X * p_Y)(z). \quad (6.97)$$

On retiendra que pour des variables aléatoires indépendantes, la ddp de la somme est égale à la convolution des ddp marginales. Cette relation peut se généraliser pour une somme de plus de 2 VA.

Fonction caractéristique

La première fonction caractéristique $\phi_X(\nu)$ d'une VA X est la transformée de Fourier inverse de sa densité de probabilité $p_X(u)$:

$$\phi_X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(u) \exp(j2\pi\nu u) du. \quad (6.98)$$

Dans le cas d'une somme de n variables aléatoires indépendantes : $Z = \sum_i X_i$, la densité de probabilité s'écrit :

$$p_Z(u) = (p_{X_1} * \dots * p_{X_n})(u), \quad (6.99)$$

et la fonction caractéristique de la somme est simplement le produit des fonctions caractéristiques :

$$\phi_Z(\nu) = \phi_{X_1}(\nu) \dots \phi_{X_n}(\nu). \quad (6.100)$$

6.6.3 Théorème de la limite centrale

Théorème 6.6.1 (Théorème de la limite centrale) *La distribution statistique d'une somme de n variables aléatoires indépendantes, possédant la même loi de probabilité, tend asymptotiquement (lorsque $n \rightarrow +\infty$) vers une distribution gaussienne, quelle que soit la distribution des variables individuelles.*

Ce théorème joue un rôle important en théorie du signal, car il justifie que de nombreux phénomènes aléatoires, résultant de la superposition de très nombreux phénomènes aléatoires individuels indépendants, soient modélisés par une loi gaussienne.

Dans le cas particulier de la somme de n signaux gaussiens X_i de moyenne μ_{X_i} et de même variance σ_X^2 , on a rigoureusement pour la loi $Z = \sum_i X_i$:

$$p_S(u) \sim N\left(\sum_i \mu_{X_i}, n\sigma_X^2\right). \quad (6.101)$$

6.6.4 Fonction d'intercorrélation d'une somme de variables aléatoires

Soit le signal aléatoire $Z(t) = aX(t) + bY(t)$.

Fonction d'autocorrélation

Par définition, la fonction d'autocorrélation de Z s'écrit :

$$\begin{aligned} R_{zz}(\tau) &= E[Z(t)Z(t-\tau)], \\ &= E\left[\left(aX(t) + bY(t)\right)\left(aX(t-\tau) + bY(t-\tau)\right)\right] \\ &= a^2E[X(t)X(t-\tau)] + abE[X(t)Y(t-\tau)] + baE[Y(t)X(t-\tau)] + b^2E[Y(t)Y(t-\tau)], \\ &= a^2R_{xx}(\tau) + b^2R_{yy}(\tau) + ab\left(R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)\right). \end{aligned} \quad (6.102)$$

Si les VA sont indépendantes les intercovariances sont nulles et les intercorrélations se réduisent au produit des moyennes, d'où le résultat :

$$R_{zz}(\tau) = a^2R_{xx}(\tau) + b^2R_{yy}(\tau) + 2ab\mu_X\mu_Y. \quad (6.103)$$

De plus, si les VA ont des moyennes nulles, l'équation précédente se simplifie encore :

$$R_{zz}(\tau) = a^2R_{xx}(\tau) + b^2R_{yy}(\tau). \quad (6.104)$$

6.6.5 Densité spectrale de puissance d'une somme de variables aléatoires

C'est la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation, c'est-à-dire :

$$S_{zz}(f) = \mathcal{F}\{R_{zz}(\tau)\} = a^2 S_{xx}(f) + b^2 S_{yy}(f) + ab(S_{xy}(f) + S_{yx}(f)). \quad (6.105)$$

Si les VA sont indépendantes, à partir de la transformée de Fourier de (6.103) les intercovariances sont nulles et les intercorrélations se réduisent au produit des moyennes, d'où le résultat :

$$S_{zz}(f) = a^2 S_{xx}(f) + b^2 S_{yy}(f) + 2ab\mu_X\mu_Y\delta(f). \quad (6.106)$$

De plus, si les VA ont des moyennes nulles, à partir de la transformée de Fourier de l'équation (6.104), on obtient :

$$S_{zz}(f) = a^2 S_{xx}(f) + b^2 S_{yy}(f). \quad (6.107)$$

Conséquences

La variance (c'est-à-dire $R_{zz}(0)$) de la somme de 2 signaux centrés statistiquement indépendants, $Z(t) = aX(t) + bY(t)$, est égale à la somme des variances de chaque terme. En effet, d'après (6.103), au point $\tau = 0$, on a :

$$R_{zz}(0) = a^2 R_{xx}(0) + b^2 R_{yy}(0). \quad (6.108)$$

La VA somme de n VA de même moyenne et de même variance, $Z(t) = \sum_i X_i(t)$ est telle que :

$$\begin{array}{ll} \mu & \text{croît proportionnellement à } n \\ \sigma^2 & \text{croît proportionnellement à } n, \end{array} \quad (6.109)$$

d'où un rapport signal/fluctuations qui varie proportionnellement à n :

$$\text{RSB} \propto \frac{\mu^2}{\sigma^2} \propto n. \quad (6.110)$$

6.7 Exercices

6.7.1 Rappels de probabilité

Moyennes et variances, indépendance

1. Soient deux signaux aléatoires $x(t)$ et $y(t)$ de densités de probabilité $p_X(u) = \text{arect}[(u - 2)/2]$ et $p_Y(v) = b(2 - v)\text{rect}[(v - 1)/2]$. Calculer a et b . Calculer ensuite la valeur moyenne, le moment d'ordre deux et la variance de chaque signal.
2. Soit une variable aléatoire discrète X telle que $\text{Prob}(X = -2) = 0.3$, $\text{Prob}(X = 0) = 0.1$, $\text{Prob}(X = 1) = 0.2$ et $\text{Prob}(X = 4) = 0.4$. Calculer la moyenne, le moment d'ordre deux et la variance.
3. Soient deux variables aléatoires X et Y de densité de probabilité conjointe :

$$p_{XY}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq u \leq \sqrt{2} \text{ et } 0 \leq v \leq u, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (6.111)$$

Sont-elles indépendantes ?

Calcul de densités de probabilité

1. Soit X une variable aléatoire connue de densité $p_X(u)$. Exprimer la densité de $Y = 1/X$.
2. Un signal aléatoire $x(t)$ de densité de probabilité connue $p_X(u)$ est amplifié par un amplificateur idéal de gain A . Calculer la densité de probabilité $p_Y(v)$ du signal amplifié $y(t) = Ax(t)$.
3. Un signal aléatoire $x(t)$ de densité de probabilité connue $p_X(u)$ est passé dans un redresseur idéal. Calculer la densité de probabilité $p_Y(v)$ du signal redressé $y(t) = |x(t)|$.
4. Un signal aléatoire $x(t)$ de densité de probabilité connue $p_X(u)$ est appliqué à l'entrée d'un système non linéaire qui délivre $y(t) = x^2(t)$.
5. Soient deux signaux aléatoires indépendants, $x(t)$ et $y(t)$, de densités de probabilité marginales respectives $p_X(u)$ et $p_Y(v)$. Calculer la densité de probabilité de $z(t) = ax(t) + by(t) + c$ où a , b et c sont trois constantes réelles.
6. Une tension aléatoire $x(t)$ est uniformément distribuée dans l'intervalle $[0, A]$. Représenter sa densité de probabilité, sa fonction de répartition. Calculer la probabilité pour que sa puissance instantanée soit supérieure à $A^2/4$ et à $A^2/2$.

6.7.2 Stationnarité

1. Soit le processus aléatoire $X(t) = Y \cos \omega t + Z \sin \omega t$ où Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes à moyenne nulle et de même fonction de répartition. Montrer que $X(t)$ est stationnaire au sens large mais pas au sens strict.
2. Soit le signal aléatoire stationnaire $x(t)$ et ω une constante. Montrer que :
 - $y(t) = x(t) \cos \omega t$ n'est pas stationnaire au sens large,
 - si α est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$, alors $z(t) = x(t) \cos(\omega t + \alpha)$ est stationnaire au sens large.

6.7.3 Somme de deux signaux aléatoires

On considère le signal aléatoire $x(t) = s(t) + n(t)$, où $s(t)$ et $n(t)$ sont deux signaux aléatoires de densités de probabilité connues, notées $p_S(u)$ et $p_N(v)$, et de densité jointe $p_{SN}(u, v)$.

Densité de probabilité

On calculera la densité de probabilité de deux façons différentes.

Méthode 1 :

1. Calculer la fonction de répartition, $F_X(u)$ de $x(t)$ en fonction de $p_{SN}(u, v)$. En déduire la densité de probabilité, $p_X(u)$.
2. Sachant que les variables S et N sont indépendantes, montrer que la densité s'exprime sous la forme d'un produit de convolution.

Méthode 2 :

1. On pose $y(t) = n(t)$. On associe le vecteur $(x(t), y(t))^T$ au vecteur $(s(t), n(t))^T$ par une transformation linéaire inversible, représentée par une matrice \mathbf{A} que l'on déterminera. Calculer la transformation inverse \mathbf{A}^{-1} .

2. En utilisant les résultats du cours sur les densités de fonctions de vecteurs aléatoires, calculer la densité jointe $p_{XY}(u, v)$.
3. En déduire, par marginalisation, la densité $p_X(u)$.
4. Donner le résultats sous l'hypothèse d'indépendance de S et N .

Auto-corrélation

1. Calculer l'auto-corrélation statistique $R_{XX}(\tau)$ en fonction de $R_{SS}(\tau)$, $R_{NN}(\tau)$, $E[N]$ et $E[S]$.
2. Que devient cette expression si S et N sont indépendants ?
3. Que devient cette expression si l'une des variables, S ou N , est en plus centrée ?

Puissance du signal

Sous l'hypothèse d'indépendance de S et N , calculer la puissance moyenne du signal, P_X , et exprimer la en fonction des moments statistiques de S et de N , dans le cas où ces variables sont centrées ou non.

6.7.4 Signal binaire cadencé

On considère un signal binaire cadencé, $x(t)$, qui émet un nouveau symbole toutes les T secondes. Ce signal prend deux valeurs, $x_0(t)$ et $x_1(t)$, avec les probabilités p_0 et p_1 . Les symboles successifs sont supposés indépendants.

Distribution et moments de $x(t)$

1. Donner la distribution $p_X(u)$ du signal $x(t)$.
2. Calculer l'espérance $E[X]$ du signal $x(t)$.
3. Calculer $E[X^2]$.

Auto-corrélation

1. Calculer $R_{XX}(\tau)$ pour $|\tau| > T$
2. Pour $|\tau| < T$, sachant que deux évènements exclusifs, $x(t) = x(t - \tau)$ ou $x(t) \neq x(t - \tau)$, peuvent se produire, écrire $R_{XX}(\tau)$ en fonction de σ_X^2 et μ_X^2 et des probabilités $\text{Prob}(x(t) = x(t - \tau))$ et $\text{Prob}(x(t) \neq x(t - \tau))$.
3. Sachant que, dans un intervalle de durée T , les transitions sont équiprobables avec une densité $1/T$, calculer $\text{Prob}(x(t) \neq x(t - \tau))$. En déduire alors $\text{Prob}(x(t) = x(t - \tau))$.
4. Montrer que la fonction d'auto-corrélation statistique s'écrit alors $R_{XX}(\tau) = \sigma_X^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) + \mu_X^2$. En déduire la fonction d'auto-covariance $C_{XX}(\tau)$. Tracer ces fonctions.
5. Calculer et tracer la densité spectrale de puissance (DSP), $S_{XX}(\tau)$.

Cas d'un signal $x(t)$ symétrique $x_0 = -1$ et $x_1 = 1$, à symboles équiprobables $p_0 = p_1 = 1/2$

1. Pour ce signal particulier, calculer la distribution de probabilité, la moyenne et le moment d'ordre 2, la fonction d'auto-corrélation et la densité spectrale de puissance.

Chapitre 7

Opérateurs fonctionnels et techniques de corrélation

Un système de traitement du signal est un dispositif qui effectue sur un signal un ensemble d'opérations de base, associées à des blocs fonctionnels : amplification, filtrage, modulation, etc.

Le modèle théorique s'appelle opérateur fonctionnel (Fig. 7.1). On peut distinguer différents types d'opérateurs :

- des opérateurs linéaires invariants (en temps) : ils ont la propriété d'additivité et d'homogénéité (linéaire) et de stationnarité (invariant), par exemple un filtre ;
- des opérateurs paramétriques : ce sont des opérateurs qui dépendent du temps en fonction d'une grandeur ou d'un signal auxiliaire (par exemple, un modulateur) ;
- des opérateurs non linéaires : c'est une très vaste classe sans représentation particulière, car la non-linéarité est une non propriété !



FIGURE 7.1 – Opérateur fonctionnel S . L'entrée est $x(t)$, la sortie $y(t) = S\{x(t)\}$

7.1 Opérateurs linéaires invariants

7.1.1 Propriétés

Soient S un opérateur linéaire invariant et $x(t)$ un signal de la forme :

$$x(t) = \sum_i a_i x_i(t). \quad (7.1)$$

Si l'opérateur S est linéaire, on a :

$$y(t) = S\{x(t)\} = \sum_i a_i S\{x_i(t)\}. \quad (7.2)$$

Si l'opérateur S est invariant, on a :

$$y(t - \tau) = S\{x(t - \tau)\}. \quad (7.3)$$

Dans cette classe d'opérateurs, on a en particulier :

- des opérateurs de transformation orthogonale, avec des variables d'entrée et de sortie différentes : par exemple, l'opérateur de transformation de Fourier avec les variables t en entrée et f en sortie ;
- des opérateurs de convolution, pour lesquels les variables d'entrée et de sortie sont fonction d'une même variable indépendante : par exemple, un filtre temporel (la variable est le temps) ou spatial (pour une image, avec la variable qui est la coordonnée spatiale).

7.1.2 Systèmes linéaires invariants à coefficients constants

Soient S un système linéaire invariant à coefficients constants, et $x(t)$ et $y(t) = S\{x(t)\}$ les signaux d'entrée et de sortie de cet opérateur. Le système S est alors caractérisé par une relation de la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t), \quad (7.4)$$

qui correspond à une équation différentielle à coefficients constants. On peut résoudre cette équation dans l'espace de Fourier en utilisant la règle de dérivation :

$$\frac{d^k}{dt^k} x(t) \Leftrightarrow (j2\pi f)^k X(f). \quad (7.5)$$

L'équation (7.4) devient alors :

$$\left[\sum_{i=0}^n a_i (j2\pi f)^i \right] Y(f) = \left[\sum_{k=0}^m b_k (j2\pi f)^k \right] X(f). \quad (7.6)$$

La réponse fréquentielle du système S s'exprime alors, si c'est possible (pas de division par 0), par :

$$G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (j2\pi f)^k}{\sum_{i=0}^n a_i (j2\pi f)^i}. \quad (7.7)$$

Le numérateur et le dénominateur de cette expression sont des polynômes de la variable $(j2\pi f)$, de degré m et n , respectivement. On peut donc factoriser le rapport $G(f)$ sous la forme :

$$G(f) = \frac{\prod_{k=1}^m (j2\pi f - z_k)}{\prod_{i=1}^n (j2\pi f - p_i)}, \quad (7.8)$$

qui fait apparaître m zéros z_k et n pôles p_i , qui sont les racines des polynômes du numérateur et du dénominateur de $G(f)$.

Relation entrée/sortie

Pour un signal d'entrée $x(t)$ quelconque, on a :

$$Y(f) = G(f)X(f), \quad (7.9)$$

c'est-à-dire, par transformée de Fourier inverse :

$$y(t) = (g * x)(t). \quad (7.10)$$

Si le signal d'entrée est une impulsion de Dirac : $x(t) = \delta(t)$, alors on a $X(f) = 1$ et $G(f) = Y(f)$, ou bien $g(t) = y(t)$ dans le domaine temporel.

Cascade d'opérateurs de convolution

La sortie d'un système constitué de la mise en cascade de p opérateurs de convolution, $g_1(t), \dots, g_p(t)$ s'écrit très simplement :

$$y(t) = g_1(t) * g_2(t) * \dots * g_p(t) * x(t) = g(t) * x(t), \quad (7.11)$$

avec $g(t) = g_1(t) * g_2(t) * \dots * g_p(t)$, ou dans le domaine fréquentiel :

$$Y(f) = G_1(f)G_2(f) \dots G_p(f)X(f) = G(f)X(f), \quad (7.12)$$

avec $G(f) = G_1(f)G_2(f) \dots G_p(f)$.

Stabilité

Définition 7.1.1 (Stabilité d'un filtre) Un filtre $G(f)$ est stable si pour toute entrée bornée, la sortie est bornée, c'est-à-dire si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)| du < \infty. \quad (7.13)$$

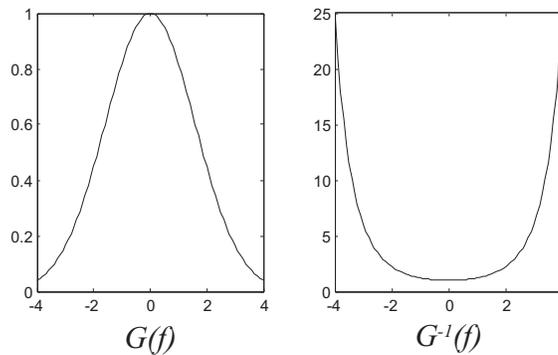


FIGURE 7.2 – Filtre $G(f)$ et son inverse. Les hautes fréquences sont très fortement amplifiées par le filtre $G^{-1}(f)$ ce qui entraîne une très grande sensibilité au bruit en hautes fréquences.

7.1.3 Déconvolution

Si $x(t)$ est l'entrée d'un capteur linéaire, de fonction de transfert $G(f)$, la sortie du capteur est un signal $y(t) = g(t) * x(t)$ et l'information initiale est généralement altérée. On peut chercher à compenser cet effet en réalisant l'opération inverse de la convolution, que l'on appelle déconvolution. Puisque :

$$Y(f) = G(f)X(f), \quad (7.14)$$

on propose de compenser le filtrage par filtrage inverse :

$$X(f) = G^{-1}(f)Y(f). \quad (7.15)$$

Cette idée peut s'avérer délicate en pratique, car $G^{-1}(f)$ n'est pas nécessairement un filtre stable. Ce filtre peut amplifier très fortement le bruit dans des bandes de fréquences où $G(f) \approx 0$, comme l'illustre la figure 7.2. En particulier si le capteur fournit un signal avec bruit additif (Fig. 7.3), la sortie du filtre de déconvolution peut diverger.

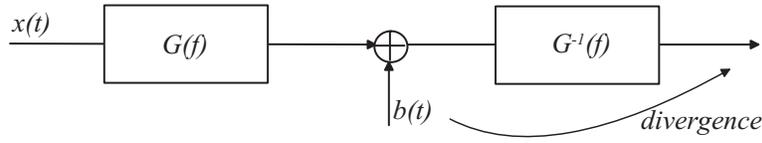


FIGURE 7.3 – Si le capteur est bruité, la sortie du filtre de déconvolution risque de diverger

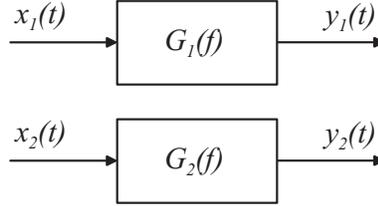


FIGURE 7.4 – Les deux filtres, et leurs signaux d'entrée et de sortie

7.1.4 Formule des interférences

Théorème 7.1.1 (Formule des interférences) Soient deux filtres de réponses impulsionnelles $G_1(f)$ et $G_2(f)$ dont les signaux d'entrées à puissance moyenne finie sont respectivement $x_1(t)$ et $x_2(t)$, et les signaux de sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$, alors on a :

$$S_{y_1 y_2}(f) = S_{x_1 x_2}(f) G_1(f) G_2^*(f) \quad (7.16)$$

La formule des interférences est donnée pour des signaux à valeurs complexes. Pour des signaux réels, il suffit d'ignorer les opérateurs de conjugaison.

Démonstration

Calculons la fonction d'intercorrélacion statistique :

$$\begin{aligned} R_{Y_1, Y_2}(\tau) &= E[y_1(t) y_2^*(t - \tau)], \\ &= E[(x_1 * g_1)(t) (x_2^* * g_2^*)(t - \tau)], \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \theta_1) g_1(\theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^*(t - \tau - \theta_2) g_2^*(\theta_2) d\theta_2\right], \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[x_1(t - \theta_1) x_2^*(t - \tau - \theta_2)] g_1(\theta_1) g_2^*(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{X_1, X_2}(\tau + \theta_2 - \theta_1) g_1(\theta_1) g_2^*(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (R_{X_1, X_2} * g_1)(\tau + \theta_2) g_2^*(\theta_2) d\theta_2. \end{aligned} \quad (7.17)$$

En posant le changement de variable $\theta_2 = -\theta$, d'où $d\theta_2 = -d\theta$, on a :

$$R_{Y_1, Y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} (R_{X_1, X_2} * g_1)(\tau - \theta) g_2^*(-\theta) d\theta. \quad (7.18)$$

En posant maintenant $g_2^\#(\theta) = g_2^*(-\theta)$, la dernière expression s'écrit encore comme :

$$R_{Y_1, Y_2}(\tau) = (R_{X_1, X_2} * g_1 * g_2^\#)(\tau) = R_{X_1, X_2}(\tau) * g_1(\tau) * g_2^*(-\tau). \quad (7.19)$$

En prenant la transformée de Fourier, on obtient la formule des interférences :

$$S_{Y_1, Y_2}(f) = S_{X_1, X_2}(f) \cdot G_1(f) \cdot G_2^*(f). \quad (7.20)$$

Cette formule montre que les filtres linéaires invariants ne mélangent pas les fréquences : la DSP des sorties à la fréquence f ne dépend que de la DSP des entrées à la fréquence f et des gains des filtres à cette fréquence.

Cette formule reste valable pour des signaux déterministes à puissance moyenne finie.

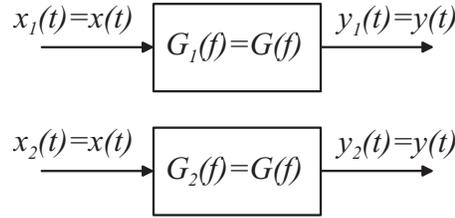


FIGURE 7.5 – Avec deux filtres identiques, et mêmes signaux d’entrée et de sortie

Conséquences

Pour des filtres identiques : $G_1(f) = G_2(f) = G(f)$ avec des entrées et des sorties identiques (Fig. 7.5) : $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$ et $y_1(t) = y_2(t) = y(t)$, la formule des interférences (7.20) devient :

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) \cdot |G(f)|^2, \quad (7.21)$$

et dans le domaine temporel :

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * \Gamma_{gg}(\tau), \quad (7.22)$$

avec $\Gamma_{gg}(0) = g(\tau) * g^*(-\tau)$ soit en prenant la transformée de Fourier, $G(f)G^*(f) = |G(f)|^2$.

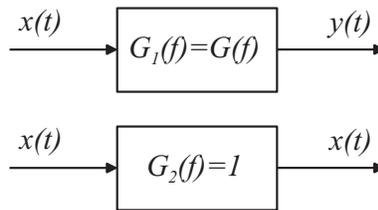


FIGURE 7.6 – Deux filtres différents, dont un est le filtre identité

Si $G_1(f) = G(f)$ et $G_2(f) = 1$ (Fig. 7.6), la formule des interférences (7.20) devient :

$$S_{yx}(f) = S_{xx}(f) \cdot G(f), \quad (7.23)$$

et dans le domaine temporel (par transformée de Fourier inverse de (7.23)) :

$$R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau) * g(\tau). \quad (7.24)$$

Cas de signaux déterministes à puissance moyenne finie ou à énergie finie

On peut écrire des relations similaires pour des signaux déterministes à puissance moyenne finie, en remplaçant les fonctions d’autocorrélation ou d’intercorrrelation statistiques par les moyennes temporelles $\Gamma_{xx}(\tau)$ et $\Gamma_{yx}(\tau)$:

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x^*(t-\tau)dt \quad \text{et} \quad \Gamma_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} y(t)x^*(t-\tau)dt. \quad (7.25)$$

Dans le cas de signaux à énergie finie, on peut aussi écrire des relations similaires, mais avec les densités spectrale et interspectrale d'énergie au lieu des DSP et DISP.

7.1.5 Corrélation entrée/sortie d'un opérateur de convolution

Soit un système de réponse impulsionnelle $g(t)$, attaqué par une signal d'entrée $x(t)$, la sortie est un signal $y(t)$ tel que :

$$y(t) = g(t) * x(t). \quad (7.26)$$

Selon la nature (à énergie ou puissance finie, certaine ou déterministe) des signaux, l'autocorrélation ou l'intercorrrelation sont définies de façons différentes mais les relations ci-dessous restent valables.

Autocorrélation

On se propose de trouver les relations entre les autocorrélations de la sortie et de l'entrée. Calculons l'autocorrélation de la sortie, en supposant un signal déterministe :

$$\begin{aligned} \Gamma_{yy}(\tau) &= y(\tau) * y^*(-\tau), \\ &= [g(\tau) * x(\tau)] * [g^*(-\tau) * x^*(-\tau)], \\ &= [g(\tau) * g^*(-\tau)] * [x(\tau) * x^*(-\tau)], \end{aligned} \quad (7.27)$$

d'où la relation :

$$\Gamma_{yy}(\tau) = \Gamma_{gg}(\tau) * \Gamma_{xx}(\tau). \quad (7.28)$$

Intercorrélation

On calcule maintenant l'intercorrrelation entre l'entrée et la sortie du filtre :

$$\begin{aligned} \Gamma_{yx}(\tau) &= y(\tau) * x^*(-\tau), \\ &= [g(\tau) * x(\tau)] * x^*(-\tau), \\ &= g(\tau) * [x(\tau) * x^*(-\tau)], \end{aligned} \quad (7.29)$$

d'où la relation :

$$\Gamma_{yx}(\tau) = g(\tau) * \Gamma_{xx}(\tau). \quad (7.30)$$

Application à l'identification d'un système linéaire invariant

Soit $x(t)$ un bruit blanc de DSP $S_{xx}(f) = \eta/2$, la fonction d'autocorrélation de $x(t)$ vaut :

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \frac{1}{2}\eta\delta(\tau). \quad (7.31)$$

Le signal $x(t)$ attaque un filtre linéaire invariant de réponse impulsionnelle $g(t)$, la fonction d'intercorrrelation s'écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma_{yx}(\tau) &= g(\tau) * \Gamma_{xx}(\tau), \\ &= g(\tau) * [\eta\delta(\tau)/2], \\ &= \frac{1}{2}\eta g(\tau). \end{aligned} \quad (7.32)$$

L'intercorrrelation donne donc la réponse impulsionnelle.

En prenant la transformée de Fourier, la DISP vaut :

$$S_{yx}(f) = \frac{1}{2}\eta G(f). \quad (7.33)$$

On peut donc en tirer la fonction de transfert :

$$G(f) = \frac{2}{\eta}S_{yx}(f) \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{2}{\eta}\Gamma_{yx}(t). \quad (7.34)$$

7.1.6 Statistique du signal en sortie d'un opérateur de convolution

En général, la densité de probabilité (ou la fonction de répartition) en sortie d'un opérateur de convolution est impossible à déterminer analytiquement. En effet, chaque valeur étant une combinaison linéaire de valeurs passées (si le filtre est causal) généralement non indépendantes, la loi conjointe nécessaire pour calculer la densité de probabilité de la sortie n'est pas connue.

Dans le cas où le processus est gaussien ou si les valeurs sont indépendantes, le calcul devient possible :

1. processus gaussien : la sortie, somme de variables aléatoires gaussiennes, est gaussienne,
2. processus blanc : la sortie est une somme de variables aléatoires indépendantes, dont la loi asymptotique est gaussienne selon le théorème de la Limite Centrale.

Expérimentalement, si le filtre est modérément sélectif, la loi de sortie se rapproche d'une loi gaussienne. A défaut de connaître la densité de probabilité, on peut calculer ses principaux moments : moyenne, variance et autocorrélation notamment.

Valeur moyenne

Partons de la relation $y(t) = x(t) * g(t)$ où $x(t)$ est un signal aléatoire. La sortie $y(t)$ est donc aussi un signal aléatoire, et sa moyenne vaut :

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[x(t) * g(t)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)g(t-u)du\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(u)]g(t-u)du \\ &= \mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)du \\ &= \mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)dv \\ &= \mu_X G(0), \end{aligned} \quad (7.35)$$

où $G(0)$ est la transformée de Fourier à la fréquence $f = 0$, car $G(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) \exp(-j2\pi v0)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)dv$. Ce résultat n'est pas surprenant puisque $G(0)$ représente le gain du système pour les signaux continus, et la moyenne correspond effectivement à un terme continu.

Fonction d'autocorrélation

Sous l'hypothèse que le signal $x(t)$ est stationnaire et ergodique (ce qui implique que $y(t)$ l'est aussi), on peut écrire :

$$R_{xx}(\tau) = \Gamma_{xx}(\tau) \quad \text{et} \quad R_{yy}(\tau) = \Gamma_{yy}(\tau). \quad (7.36)$$

D'après la relation (7.28) entre autocorrélations, on a :

$$\Gamma_{yy}(\tau) = \Gamma_{xx}(\tau) * \Gamma_{gg}(\tau), \quad (7.37)$$

ou bien sous forme statistique :

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= R_{xx}(\tau) * \Gamma_{gg}(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(u) \Gamma_{gg}(\tau - u) du. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Moment d'ordre 2

C'est la valeur quadratique moyenne, c'est-à-dire la puissance moyenne totale du signal :

$$P_Y = R_{yy}(0) = E[Y^2] = \mu_Y^2 + \sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(u) \Gamma_{gg}(-u) du. \quad (7.39)$$

Or, si le filtre $g(t)$ est réel, sa fonction d'autocorrélation est une fonction paire et on peut écrire :

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(u) \Gamma_{gg}(u) du. \quad (7.40)$$

De plus, en appliquant le théorème de conservation du produit scalaire, on peut écrire :

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(u) \Gamma_{gg}(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) |G(f)|^2 df. \quad (7.41)$$

Variance

Puisque $\sigma_Y^2 = P_Y - \mu_Y^2$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 = C_{yy}(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(u) \Gamma_{gg}(u) du - \mu_Y^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (C_{xx}(u) + \mu_X^2) \Gamma_{gg}(u) du - \mu_Y^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(u) \Gamma_{gg}(u) du + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{gg}(u) du - \mu_Y^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(u) \Gamma_{gg}(u) du + \mu_X^2 |G(0)|^2 - \mu_Y^2. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Or, d'après la relation entre valeurs moyennes (7.35), on déduit $\mu_X^2 |G(0)|^2 - \mu_Y^2 = 0$ et par conséquent :

$$\sigma_Y^2 = C_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(u) \Gamma_{gg}(u) du \quad (7.43)$$

Cas particuliers

★ Pour un filtre passe-bas sans perte, on a $G(0) = 1$, d'où :

$$\mu_Y = \mu_X. \quad (7.44)$$

★ Pour un filtre passe-haut, on a $G(0) = 0$ et par conséquent :

$$\mu_Y = 0. \quad (7.45)$$

★ Si le signal d'entrée est un signal aléatoire $x(t)$, blanc, de moyenne nulle et de DSP $\eta/2$, on a :

$$\mu_Y = 0, \quad (7.46)$$

$$R_{yy}(\tau) = \frac{1}{2} \Gamma_{gg}(\tau) \eta, \quad (7.47)$$

et :

$$C_{yy}(0) = \sigma_Y^2 = \frac{1}{2} \Gamma_{gg}(0) \eta. \quad (7.48)$$

7.2 Autres opérateurs

7.2.1 Multiplication par une constante

Cet opérateur est représenté à la figure 7.7. Si $K > 1$, l'opérateur est un amplificateur; si K prend les deux valeurs $K = 0$ ou $K = 1$, c'est un commutateur ouvert ou fermé; pour $0 < K < 1$, c'est un atténuateur. Les valeurs négatives correspondent à une fonction d'inverseur ($K = -1$ ou plus généralement à une amplificateur ou un atténuateur avec inversion, c'est-à-dire un changement de phase de π [$2k\pi$]).

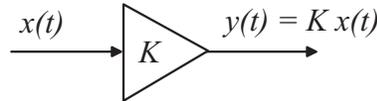


FIGURE 7.7 – Opérateur de multiplication par un facteur K

Quelques formules

La réponse impulsionnelle et la fonction de transfert sont :

$$g(t) = K\delta(t) \Leftrightarrow G(f) = K \quad (7.49)$$

La fonction de transfert $G(f)$ a pour caractéristiques :

$$|G(f)| = |K| \quad \text{et} \quad \varphi(G(f)) = \begin{cases} 0 & \text{si } K > 0, \\ -\pi \operatorname{sgn}(f) & \text{si } K < 0. \end{cases} \quad (7.50)$$

On rappelle que la phase de $G(f)$ est une fonction impaire. Pour un phaseur $\exp(j2\pi f_0 t)$ de fréquence $f_0 > 0$, l'inversion correspond à une phase de $-\pi$, et pour $f_0 < 0$ à une phase de $+\pi$, d'où le tracé (Fig. 7.8).

La fonction d'autocorrélation vaut alors :

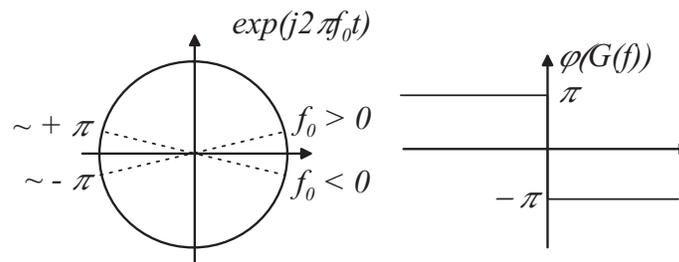


FIGURE 7.8 – Phase de l'opérateur de multiplication pour $K < 0$

$$\Gamma_{gg}(\tau) = K^2\delta(\tau). \quad (7.51)$$

7.2.2 Opérateurs de retard

Cet opérateur (Fig. 7.9) intervient dès qu'il y a propagation d'un signal.

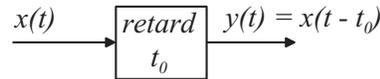


FIGURE 7.9 – Opérateur retard

Quelques formules

La réponse impulsionnelle et la fonction de transfert sont :

$$g(t) = \delta(t - t_0) \Leftrightarrow G(f) = \exp(-j2\pi f t_0). \quad (7.52)$$

La fonction de transfert $G(f)$ a pour caractéristiques :

$$|G(f)| = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(G(f)) = -2\pi f t_0. \quad (7.53)$$

La phase varie donc linéairement avec la fréquence. Ce système est dit à phase linéaire, ou déphaseur linéaire.

La fonction d'autocorrélation du filtre est :

$$\Gamma_{gg}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u - t_0) \delta(u - t_0 - \tau) du = \delta(\tau). \quad (7.54)$$



FIGURE 7.10 – Opérateur de Hilbert

7.2.3 Opérateur de Hilbert

Cet opérateur, noté \mathcal{H} , est utile pour la construction de signaux analytiques. Pour un signal d'entrée $x(t)$, la sortie de l'opérateur sera notée $y(t) = \check{x}(t)$ (Fig. 7.10). Par définition, on a :

$$\check{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(u)}{t - u} du = x(t) * \left(\frac{1}{\pi t} \right). \quad (7.55)$$

Dans le domaine des fréquences, on a :

$$\begin{aligned} \check{X}(f) &= X(f) \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\pi t} \right\}, \\ &= X(f) (-j \operatorname{sgn}(f)). \end{aligned} \quad (7.56)$$

Le module et la phase de la fonction de transfert satisfont donc :

$$|\check{X}(f)| = |X(f)|, \quad (7.57)$$

et :

$$\varphi(\check{X}(f)) = \varphi(X(f)) + \varphi(-j \operatorname{sgn}(f)) = \varphi(X(f)) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(f). \quad (7.58)$$

L'opérateur de Hilbert conserve le module mais réalise un déphasage pur de $\pm\pi/2$.

Quelques formules

La réponse impulsionnelle et la fonction de transfert de l'opérateur de Hilbert sont :

$$g(t) = \frac{1}{\pi t} \quad \text{et} \quad G(f) = -j \operatorname{sgn}(f). \quad (7.59)$$

Le module et la phase de $G(f)$ sont égales à :

$$|G(f)| = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(G(f)) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(f). \quad (7.60)$$

La fonction d'autocorrélation du filtre vaut :

$$\Gamma_{gg}(\tau) = \delta(\tau). \quad (7.61)$$

Pour le montrer, utilisons la formule des interférences :

$$S_{yy}(f) = |G(f)|^2 S_{xx}(f). \quad (7.62)$$

Or, puisque $|G(f)| = 1$, on a $S_{yy}(f) = S_{xx}(f)$ et, par transformée de Fourier inverse :

$$\Gamma_{yy}(\tau) = \Gamma_{xx}(\tau). \quad (7.63)$$

Or, on sait qu'en général, pour un filtre $g(t)$, on a la relation $\Gamma_{yy}(\tau) = \Gamma_{gg}(\tau) * \Gamma_{xx}(\tau)$. On en déduit donc que $\Gamma_{gg}(\tau) = \delta(\tau)$.

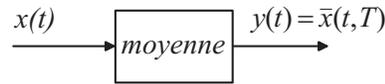


FIGURE 7.11 – Opérateur de moyenne temporelle

7.2.4 Opérateur de moyenne temporelle

Cet opérateur (Fig. 7.11) transforme le signal d'entrée $x(t)$ en un signal notée $\bar{x}(t, T)$:

$$y(t) = \bar{x}(t, T) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(u) du. \quad (7.64)$$

C'est donc la moyenne du signal $x(t)$ sur la fenêtre temporelle de largeur T : $[t - T, t]$ (que l'on peut donc écrire $\operatorname{rect}((t - T/2)/T)$), avec une pondération égale à $1/T$. On peut donc écrire :

$$y(t) = \bar{x}(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \operatorname{rect}\left(\frac{u - (t - T/2)}{T}\right) du = \frac{1}{T} x(t) * \operatorname{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right). \quad (7.65)$$

Quelques formules

La réponse impulsionnelle et la fonction de transfert de l'opérateur de moyenne temporelle sont :

$$g(t) = \frac{1}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \quad \text{et} \quad G(f) = \operatorname{sinc}(Tf) \exp(-j\pi fT). \quad (7.66)$$

La fonction d'autocorrélation du filtre vaut :

$$\Gamma_{gg}(\tau) = \frac{1}{T} \text{tri}(\tau/T). \quad (7.67)$$

On démontre également à partir des relations générales :

$$\mu_Y = \mu_X G(0) = \mu_X, \quad (7.68)$$

et :

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(\tau) \text{tri}(\tau/T) d\tau \rightarrow_{T \rightarrow +\infty} 0. \quad (7.69)$$

7.2.5 Opérateur de filtrage idéal

Un filtre idéal est un opérateur qui permet la transmission sans distorsion du signal dans une largeur de bande B , appelée bande passante.

Filtrage passe-bas

Pour le filtre passe-bas idéal (Fig. 7.12), on a un spectre d'amplitude $|G(f)|$, qui est une fonction rectangle de largeur $2B$ en fréquence. On adjoint un retard t_0 pour que le filtre soit causal (et donc réalisable). Le retard t_0 correspond au facteur $\exp(-j2\pi ft_0)$ dans le domaine fréquentiel. On a donc :

$$G(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \exp(-j2\pi ft_0), \quad (7.70)$$

avec :

$$|G(f)| = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \quad \text{et} \quad \varphi(G(f)) = -2\pi ft_0. \quad (7.71)$$

La réponse impulsionnelle (7.12) du filtre est obtenue par transformée de Fourier inverse :

$$g(t) = 2B \text{sinc}(2B(t - t_0)), \quad (7.72)$$

et sa fonction d'autocorrélation vaut :

$$\Gamma_{gg}(\tau) = 2B \text{sinc}(2B\tau). \quad (7.73)$$

On observe que, malgré le décalage t_0 , le filtre idéal $g(t)$ n'est pas causal, car $g(t) \neq 0$, pour $t < 0$. Le décalage permet néanmoins de faire en sorte que $g(t) < \epsilon$, pour $t < 0$, et ainsi de pouvoir réaliser une approximation causale du filtre.

Filtre passe-bande idéal

La fonction de transfert du filtre passe-bande idéal, de largeur de bande B centrée sur f_0 , est représentée à la figure 7.13. Pour avoir une approximation causale, on décale aussi par un temps t_0 , c'est-à-dire qu'on multiplie la TF par le facteur $\exp(-j2\pi ft_0)$. Le filtre est la somme de deux fonctions rectangle de largeur B , centrée sur $\pm f_0$. On peut l'écrire :

$$G(f) = \text{rect}(f/B) \exp(-j2\pi ft_0) * [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]. \quad (7.74)$$

Par transformée de Fourier inverse (en appliquant le théorème de Plancherel), on obtient la réponse impulsionnelle :

$$g(t) = 2B \text{sinc}(B(t - t_0)) \cos(2\pi f_0 t). \quad (7.75)$$

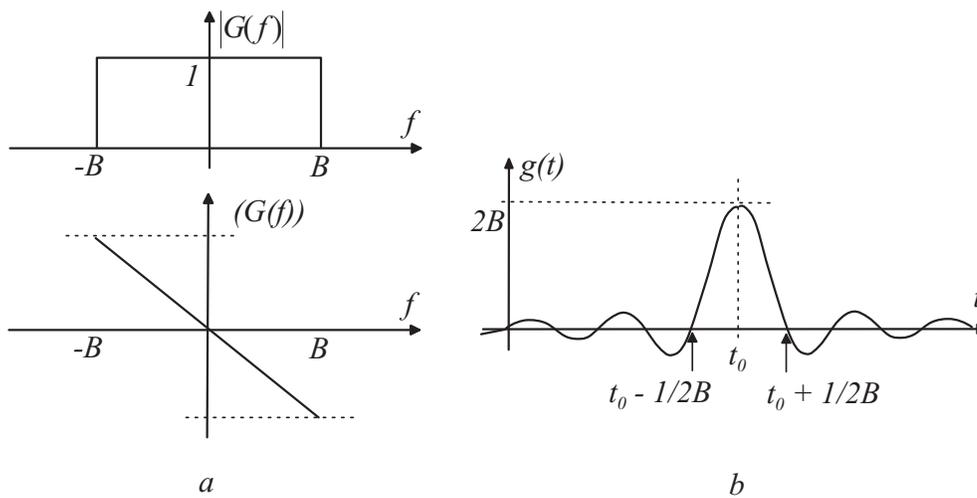


FIGURE 7.12 – Opérateur de filtrage passe-bas idéal

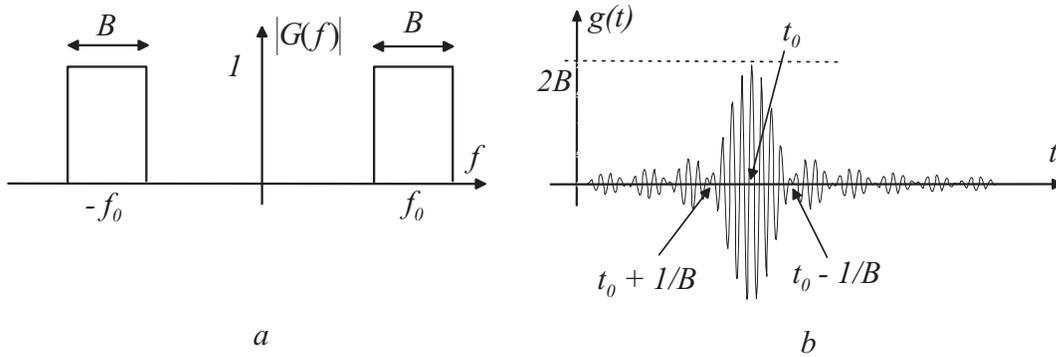


FIGURE 7.13 – Opérateur de filtrage passe-bande idéal

On remarque que $g(t)$ est un signal de fréquence f_0 , dont l'amplitude suit l'enveloppe $2B\text{sinc}(B(t-t_0))$ (Fig. 7.13.b). La fonction d'autocorrélation est égale à :

$$\Gamma_{gg}(\tau) = 2B\text{sinc}(B\tau) \cos(2\pi f_0\tau). \quad (7.76)$$

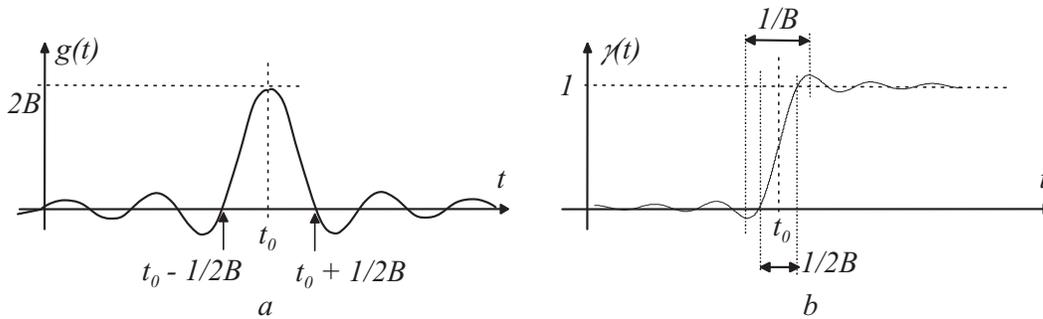


FIGURE 7.14 – Réponses impulsionnelle (a) et indicielle (b) d'un filtre passe-bas idéal

Temps de montée du filtre passe-bas idéal

La réponse impulsionnelle $g(t)$ d'un filtre est égale à la sortie $y(t)$ obtenue pour une entrée $x(t) = \delta(t)$.

La réponse indicielle est la réponse à un échelon $\epsilon(t)$. Or, l'impulsion de Dirac et l'échelon unité sont liés la relation :

$$\delta(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt}. \quad (7.77)$$

Dans le cas d'un filtre passe-bas, compte tenu de la linéarité de l'opérateur de filtrage, la réponse indicielle est tout simplement l'intégrale de la réponse impulsionnelle :

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^t g(u) du. \quad (7.78)$$

Pour le filtre passe-bas idéal, on obtient donc :

$$\gamma_{P-Bas}(t) = 2B \int_{-\infty}^t \text{sinc}(2B(u-t_0)) du. \quad (7.79)$$

Cette fonction, peut aussi s'exprimer à l'aide du sinus intégral, noté Si et défini par :

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin(u)}{u} du = \pi \int_0^{t/\pi} \text{sinc}(x) dx. \quad (7.80)$$

Le tracé de la réponse $\gamma_{P-Bas}(t)$ est donnée à la figure 7.14. On remarque qu'au point t_0 , on obtient $\gamma_{P-Bas}(t_0) = 1/2$. On peut déterminer le temps de montée en mesurant l'intervalle de temps entre les intersections de la dérivée de la réponse en t_0 , avec les droites $y = 0$ et $y = 1$. Pour le filtre passe-bas de largeur de bande B , le temps de montée (Fig. 7.14) vaut :

$$t_m = \frac{1}{2B}. \quad (7.81)$$

On retiendra que le temps de montée est l'inverse du double de la largeur de bande pour un passe-bas idéal.

Temps de montée d'un filtre passe-bande

Pour un filtre passe-bande, le temps de montée est calculé par rapport à la réponse à l'excitation $x'(t) = \epsilon(t) \cos(2\pi f_0 t)$, où f_0 est la fréquence centrale de la bande passante du filtre. On admettra qu'il est équivalent (et plus simple) de considérer l'intégrale de l'enveloppe de la réponse impulsionnelle. Pour le filtre passe-bande idéal, cette enveloppe est décrite par la relation $2B \text{sinc}[B(t - t_0)]$. Par un calcul similaire au calcul réalisé pour le filtre passe-bas, on trouve un temps de montée :

$$t_m = \frac{1}{B}. \quad (7.82)$$

On retiendra que le temps de montée est l'inverse de la bande passante pour un filtre passe-bande idéal.

Largeur de bande équivalente

En électronique, on définit la largeur de bande à $-3dB$, c'est-à-dire la gamme de fréquences telle que :

$$\frac{|G(f)|^2}{G_{max}^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (7.83)$$

On définit aussi la largeur de bande équivalente, B_e , d'un bruit blanc, comme la largeur de bande d'un bruit blanc de densité spectrale de puissance G_{max}^2 qui fournit la même puissance totale que $G(f)$, c'est-à-dire :

$$2B_e G_{max}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df. \quad (7.84)$$

Or, $\Gamma_{gg}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df$, donc la bande équivalente s'exprime par la relation :

$$B_e = \frac{\Gamma_{gg}(0)}{2G_{max}^2}. \quad (7.85)$$

Par exemple, prenons le filtre $R - C$ du premier ordre, de réponse impulsionnelle :

$$G(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}. \quad (7.86)$$

En posant $f_c = 1/(2\pi RC)$, on a donc :

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_c)^2}. \quad (7.87)$$

Calculons maintenant l'intégrale :

$$\Gamma_{gg}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (f/f_c)^2} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_c}{1 + u^2} du = f_c \pi. \quad (7.88)$$

De plus, il est facile de voir que $G_{max} = 1$ (pour $f = 0$). On en déduit donc la largeur de bande :

$$B_e = \frac{f_c \pi}{2}. \quad (7.89)$$

On peut aussi en déduire le temps de montée (cas passe-bas) :

$$t_m = \frac{1}{2B_e} = \frac{1}{\pi f_c}. \quad (7.90)$$

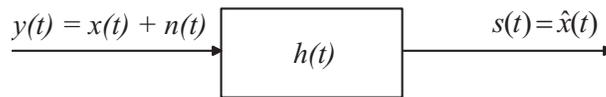


FIGURE 7.15 – Détection d'un signal dans du bruit par filtrage

7.3 Détection d'un signal dans du bruit

Dans cette dernière partie, on se propose d'aborder les idées générales du filtrage linéaire optimal, et en particulier du filtrage adaptée et du filtrage de Wiener.

On suppose que l'on reçoit un signal :

$$y(t) = x(t) + n(t), \quad (7.91)$$

où $x(t)$ est un signal utile et $n(t)$ est un bruit additif.

Différentes approches sont possibles selon le niveau de connaissance sur $x(t)$:

- $x(t)$ est connu,
- $x(t)$ est certain mais inconnu,
- $x(t)$ est aléatoire, de densité spectrale de puissance connue.

Dans le cadre du filtrage linéaire optimal, on cherche une solution sous la forme d'un filtre linéaire $h(t)$ (Fig. 7.15).

La sortie $s(t)$ s'exprime alors :

$$s(t) = (y * h)(t) = s_x(t) + s_n(t), \quad (7.92)$$

avec $s_x(t) = (x * h)(t)$ et $s_n(t) = (n * h)(t)$.

On cherche le filtre $h(t)$ tel qu'à un instant t_0 fixé, le rapport S/B instantané :

$$\frac{|s_x(t)|^2}{E[|s_n(t)|^2]} \quad (7.93)$$

soit maximum.

7.3.1 Signal connu dans du bruit : filtrage adapté

On suppose que l'on connaît le signal $x(t)$ et sa transformée de Fourier $X(f)$ et que la DSP du bruit $n(t)$ vaut $S_{nn}(f)$.

Calcul du filtre optimal

A partir de $s_n(t) = (n * h)(t)$, on peut écrire :

$$S_{s_n s_n}(f) = S_{nn}(f)|H(f)|^2, \quad (7.94)$$

d'où l'on tire la puissance du bruit en sortie de filtre :

$$E[|s_n(t)|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{s_n s_n}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(f)|H(f)|^2 df. \quad (7.95)$$

Par transformée de Fourier inverse de $S_x(f) = X(f)H(f)$, on calcule la sortie du filtre $s_x(t)$, en réponse au signal d'entrée $x(t)$:

$$s_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)H(f) \exp(j2\pi ft) df. \quad (7.96)$$

Au temps $t = t_0$, on a donc :

$$s_x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)H(f) \exp(j2\pi ft_0) df. \quad (7.97)$$

On s'intéresse à cette intégrale que nous désirons majorer. Posons maintenant :

$$X(f)H(f) \exp(j2\pi ft_0) = \left(\exp(j2\pi ft_0) \frac{X(f)}{\sqrt{S_{nn}(f)}} \right) \left(H(f) \sqrt{S_{nn}(f)} \right), \quad (7.98)$$

et appliquons l'inégalité de Schwartz :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)H(f) \exp(j2\pi ft_0) df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X(f)|^2}{S_{nn}(f)} df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 S_{nn}(f) df. \quad (7.99)$$

Or, $X(f)$ et $S_{nn}(f)$ étant fixés (seul le filtre $h(t)$ est inconnu), la première intégrale dans le terme de droite est constante.

Revenons maintenant au RSB :

$$\frac{|s_x^2(t_0)|}{E[|s_n(t_0)|^2]} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)H(f) \exp(j2\pi ft_0) df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(f)|H(f)|^2 df}, \quad (7.100)$$

et en utilisant l'équation (7.99), on a :

$$\frac{|s_x^2(t_0)|}{E[|s_n(t_0)|^2]} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X(f)|^2}{S_{nn}(f)} df = \text{cte.} \quad (7.101)$$

On en déduit que le rapport RSB est maximal si l'égalité est obtenue dans la relation (7.101), c'est-à-dire dans l'inégalité de Schwartz (7.99), soit si :

$$H(f) \sqrt{S_{nn}(f)} = k \cdot \exp(-j2\pi ft_0) \frac{X^*(f)}{\sqrt{S_{nn}(f)}}. \quad (7.102)$$

Le filtre optimal est donc tel que :

$$H(f) = k \cdot \exp(-j2\pi ft_0) \frac{X^*(f)}{S_{nn}(f)}, \quad (7.103)$$

avec le RSB :

$$RSB_{opt.} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X(f)|^2}{S_{nn}(f)} df. \quad (7.104)$$

Ce filtre s'appelle filtre adapté au signal $x(t)$.

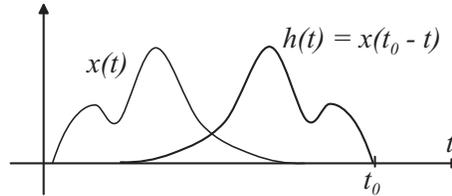


FIGURE 7.16 – Filtre $h(t)$ adapté à un signal réel $x(t)$

Cas où $n(t)$ est un bruit blanc

Dans le cas où $n(t)$ est un bruit blanc, sa densité spectrale de puissance est constante : $S_{nn}(f) = n_0$, et le filtre optimal devient :

$$H(f) = \frac{k}{n_0} \exp(-j2\pi ft_0) X^*(f). \quad (7.105)$$

Par transformée de Fourier inverse, on obtient la réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{k}{n_0} x^*(t_0 - t). \quad (7.106)$$

Si le signal $x(t)$ est réel, on a simplement :

$$h(t) = \frac{k}{n_0} x(t_0 - t), \quad (7.107)$$

avec le RSB :

$$RSB = \frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{E_x}{n_0}, \quad (7.108)$$

où E_x est l'énergie du signal $x(t)$.

Le nom de filtre adapté provient de la forme du filtre qui est un recopie renversée (Fig. 7.16) du signal $x(t)$ comme le montrent les expressions (7.106) et (7.107).

7.3.2 Signal inconnu dans du bruit

On suppose maintenant que $y(t) = x(t) + n(t)$, où $x(t)$ est inconnu et $n(t)$ est un bruit de moyenne nulle et d'autocorrélation (donc aussi d'autocovariance) $C(t_1, t_2)$.

De ces hypothèses, on tire donc :

$$E[y(t)] = x(t), \quad (7.109)$$

et :

$$\sigma_n^2 = E[n^2(t)] = C(t, t). \quad (7.110)$$

Si $C(t, t) \ll E[x^2(t)]$, l'énergie du bruit est très faible par rapport à celle du signal et $y(t)$ est une bonne estimation de $x(t)$. Dans le cas contraire, il faut trouver quelque chose de plus astucieux.

Filtrage simple

Appliquons un filtrage passe-bas idéal de réponse impulsionnelle $h(t) = \text{rect}(t/T)/T$ (qui ne dépend que du paramètre T), la sortie du filtre vaut alors :

$$s(t) = y(t) * \text{rect}(t/T)/T = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(u/T) y(t-u) du = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} y(t-u) du. \quad (7.111)$$

En posant de nouveau $s(t) = s_x(t) + s_n(t)$, on peut préciser :

$$s_x(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t-u) du, \quad (7.112)$$

et :

$$s_n(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} n(t-u) du. \quad (7.113)$$

On se propose ici de déterminer le paramètre T tel que l'erreur d'estimation $e(t) = s(t) - x(t)$ est minimale.

Cas d'un signal constant

Si $x(t) = x_0 = \text{cte}$ et que le bruit $n(t)$ est stationnaire, c'est-à-dire $C(t_1, t_2) = C(t_1 - t_2)$. Puisque le bruit est centré ($E[n(t)] = 0$), on a :

$$E[s(t)] = s_x(t) = x_0. \quad (7.114)$$

Cette relation prouve que $s_x(t)$ est un estimateur non biaisé de x_0 . La variance de l'estimateur est alors égale à :

$$\sigma_s^2 = E[(s(t) - x_0)^2] = E[s_n^2(t)] = 1/T \quad (7.115)$$

7.3.3 Extraction d'un signal aléatoire dans du bruit

On considère le signal $y(t) = x(t) + n(t)$ où $x(t)$ et $n(t)$ sont deux signaux aléatoires stationnaires.

Estimation qui minimise l'erreur quadratique

On cherche une solution de la forme :

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^K a_k s_k(t), \quad (7.116)$$

c'est-à-dire une approximation à partir de K signaux $s_k(t)$ dont les coefficients de pondération a_k sont choisis de façon à minimiser l'erreur quadratique moyenne :

$$E[e^2] = E[(x(t) - \hat{x}(t))^2] = E[(x(t) - \sum_{k=1}^K a_k s_k(t))^2]. \quad (7.117)$$

En observant que l'espérance est assimilable à un produit scalaire : $\langle x, y \rangle = E[xy^*]$ (ou simplement $\langle x, y \rangle = E[xy]$ pour des signaux réels), on sait (par le théorème de la projection) que la solution optimale minimisant l'erreur quadratique moyenne $E[e^2]$ vérifie le principe d'orthogonalité, c'est-à-dire que e est orthogonal à $\hat{x}(t)$. Autrement dit :

$$E[(x(t) - \sum_{k=1}^K a_k s_k(t))s_k(t)] = 0, \quad \forall k = 1, \dots, K. \quad (7.118)$$

On en déduit alors (théorème de Pythagore) que :

$$E[e^2] = E[(x(t) - \hat{x}(t))^2] = E[x^2(t)] - E[\hat{x}^2(t)]. \quad (7.119)$$

Exemple

Soient $x(t)$ un processus stationnaire et λ une constante¹, on cherche à estimer le paramètre a associé à la modèle du premier ordre :

$$\hat{x}(t + \lambda) = ax(t). \quad (7.120)$$

L'erreur quadratique moyenne vaut :

$$E[e^2] = E[(x(t + \lambda) - \hat{x}(t + \lambda))^2] = E[(x(t + \lambda) - ax(t))^2]. \quad (7.121)$$

Lorsque l'erreur e est minimale, selon le théorème de la projection orthogonale, on sait qu'elle est orthogonale à $\hat{x}(t)$, c'est-à-dire :

$$E[(x(t + \lambda) - \hat{x}(t + \lambda))\hat{x}(t + \lambda)] = aE[(x(t + \lambda) - ax(t))x(t)] = 0. \quad (7.122)$$

En développant la dernière expression, on obtient :

$$E[(x(t + \lambda)x(t))] = aE[(x(t)x(t))], \quad (7.123)$$

soit en tenant compte de la stationnarité de $x(t)$:

$$a = \frac{R_{xx}(\lambda)}{R_{xx}(0)}. \quad (7.124)$$

L'estimation optimale au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (MMSE pour *minimisation of the mean square error*) est alors simplement :

$$\hat{x}(t + \lambda) = \frac{R_{xx}(\lambda)}{R_{xx}(0)}x(t), \quad (7.125)$$

1. si $\lambda > 0$, le problème est appelé prédiction

avec l'erreur :

$$\begin{aligned} E[e^2] &= E[(x(t+\lambda) - ax(t))^2] \\ &= R_{xx}(0) - 2aR_{xx}(\lambda) + a^2R_{xx}(0) \\ &= R_{xx}(0)(1 - a^2) - 2aR_{xx}(\lambda). \end{aligned} \quad (7.126)$$

En tenant compte de la valeur optimale de a (7.124), on a finalement :

$$E[e^2] = R_{xx}(0)\left(1 - \left(\frac{R_{xx}(\lambda)}{R_{xx}(0)}\right)^2\right) - 2\frac{R_{xx}(\lambda)}{R_{xx}(0)}R_{xx}(\lambda) = R_{xx}(0) - \frac{R_{xx}^2(\lambda)}{R_{xx}(0)}. \quad (7.127)$$

On peut aussi trouver ce résultat en appliquant directement le théorème de Pythagore, car e est orthogonal à \hat{x} .

7.3.4 Filtre de Wiener

Modèle de filtre

On cherche une solution sous la forme

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)h(u)du. \quad (7.128)$$

La meilleure estimation, au sens de l'erreur quadratique moyenne, doit conduire à minimiser :

$$E[e^2] = E[(x(t) - \hat{x}(t))^2]. \quad (7.129)$$

En appliquant le principe d'orthogonalité, on a donc :

$$E[(x(t) - \hat{x}(t))y(t-\tau)] = 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (7.130)$$

En utilisant l'expression du modèle de filtre (7.128), on a :

$$\begin{aligned} E[(x(t) - \hat{x}(t))y(t-\tau)] &= 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \\ E[(x(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)h(u)du)y(t-\tau)] &= 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \\ E[x(t)y(t-\tau)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[y(t-u)y(t-\tau)]h(u)du, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (7.131)$$

soit finalement :

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yy}(\tau-u)h(u)du, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (7.132)$$

Cette équation intégrale s'appelle équation de Wiener-Hopf et donne, si on sait la résoudre, le filtre optimal au sens du minimum de l'erreur quadratique moyenne.

Solution

Posons :

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &\rightleftharpoons S_{xy}(f) \\ R_{yy}(\tau) &\rightleftharpoons S_{yy}(f) \\ h(t) &\rightleftharpoons H(f). \end{aligned} \quad (7.133)$$

Puisque $\hat{x}(t) = h(t) * y(t)$, on a :

$$R_{xy}(\tau) = R_{yy}(\tau) * h(\tau), \quad (7.134)$$

et en prenant la transformée de Fourier :

$$S_{xy}(f) = S_{yy}(f)H(f), \quad (7.135)$$

et le filtre optimal :

$$H(f) = \frac{S_{xy}(f)}{S_{yy}(f)}. \quad (7.136)$$

Cette solution est *a priori* non causale, c'est-à-dire que le filtre obtenu n'est pas réalisable. On peut donc modifier le problème pour imposer des conditions de causalité au filtre recherché. Cette étude, présentée dans de nombreux ouvrages, ne sera pas effectuée ici.

Cas particulier d'un bruit additif non corrélé

Si le bruit $n(t)$ est centré et non corrélé avec $x(t)$, c'est-à-dire $R_{xn}(\tau) = 0, \forall \tau \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_{xy}(f) &= \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t-\tau)dt\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(x(t-\tau) + n(t-\tau))dt\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)dt\right\} \\ &= S_{xx}(f). \end{aligned} \quad (7.137)$$

Calculons maintenant la DSP du signal $y(t)$:

$$\begin{aligned} S_{yy}(f) &= \mathcal{F}\{R_{yy}(\tau)\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)y(t-\tau)dt\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) + n(t))(x(t-\tau) + n(t-\tau))dt\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)x(t-\tau) + n(t)n(t-\tau)]dt\right\} \\ &= S_{xx}(f) + S_{nn}(f). \end{aligned} \quad (7.138)$$

En combinant le résultat (7.136) avec les deux dernières équations, on a :

$$H(f) = \frac{S_{xx}(f)}{S_{xx}(f) + S_{nn}(f)}. \quad (7.139)$$

7.4 Exercices

7.4.1 Opérateur idéal de moyenne temporelle

Soit $x(t) = A + b(t)$ un signal réel aléatoire, où A est une constante réelle et $b(t)$ est un bruit blanc centré de densité spectrale de puissance $\eta/2$, et soit un filtre de réponse impulsionnelle $g(t) = \frac{1}{T}\text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$. La sortie du filtre moyennneur (Fig. 7.17) est notée $y(t)$.

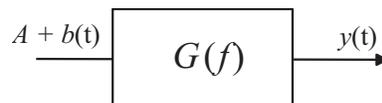


FIGURE 7.17 – Filtrage d'un signal par un filtre moyennneur.

Calcul du gain complexe $G(f)$

Tracer $g(t)$. Calculer le gain complexe du filtre $G(f)$.

Statistiques du signal

- Calculer la moyenne du signal $y(t)$.
- Exprimer la variance σ_y^2 de $y(t)$ en fonction de la fonction de covariance $C_{xx}(\tau)$ et de la fonction d'auto-corrélation $\Gamma_{gg}(\tau)$.
- Exprimer $C_{xx}(\tau)$ en fonction de $C_{bb}(\tau)$ puis $C_{bb}(\tau)$ à partir de $S_{bb}(f)$.
- Calculer la fonction d'auto-corrélation $\Gamma_{gg}(\tau)$.
- Montrer que la variance s'écrit alors $\sigma_y^2 = \eta/(2T)$.

Auto-corrélation en sortie

- Exprimer la fonction d'auto-corrélation statistique $R_{yy}(\tau)$ en fonction de $R_{xx}(\tau)$ et de $\Gamma_{gg}(\tau)$.
- A partir de l'expression de $\Gamma_{gg}(\tau)$ calculée à la question précédente, et de la relation $R_{xx}(\tau) = C_{xx}(\tau) + A^2$, montrer que $R_{yy}(\tau)$ s'écrit :

$$R_{yy}(\tau) = \frac{\eta}{2T} \text{tri}(\tau/T) + A^2. \quad (7.140)$$

- Tracer $R_{yy}(\tau)$.

7.4.2 Filtrage

On considère le signal réel $x(t)$, stationnaire et de densité spectrale de puissance $S_{xx}(f) = X \text{rect}(f/(2B))$. Soient $y_1(t)$ et $y_2(t)$, les signaux obtenus par filtrage de $x(t)$ au travers des filtres G_1 et G_2 , respectivement (Fig. 7.19). Les réponses impulsionnelles des filtres sont $g_1(t) = \text{rect}(t/T)/T$ et $g_2(t) = \text{rect}(t/(2T))/(2T)$.

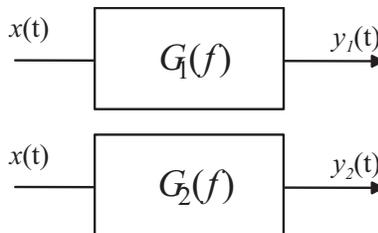


FIGURE 7.18 – Filtrage d'un signal par deux filtres moyenneurs.

Densités spectrales de puissance

Exprimer les densités spectrales de puissance de $y_1(t)$ et $y_2(t)$, en fonction de $S_{xx}(f)$, et $G_1(f)$ ou $G_2(f)$.

Densité spectrale de puissance de $y(t)$

On considère maintenant le signal somme : $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

- Calculer la fonction d'autocorrélation statistique de $y(t)$.
- En déduire sa densité spectrale de puissance, $S_{yy}(f)$, en fonction de $S_{xx}(f)$, $S_{y_1y_1}(f)$, $S_{y_2y_2}(f)$, $G_1(f)$ et $G_2(f)$. Quel théorème utilisez-vous pour faire ce calcul ?
- Calculer les transformées de Fourier des filtres $G_1(f)$ et $G_2(f)$, et montrer que la densité spectrale de $y(t)$ se met sous la forme :

$$S_{yy}(f) = X \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \text{sinc}^2(Tf) (1 + \cos(\pi fT))^2. \quad (7.141)$$

7.4.3 Extraction d'une composante continue

On considère le montage de la figure 7.19, dans laquelle $s(t)$ est un signal déterministe, $n(t)$ est un bruit stationnaire non corrélé avec $s(t)$. Le filtre G est un filtre de réponse impulsionnelle $g(t) = \text{rect}((t - T/2)/T)/T$.

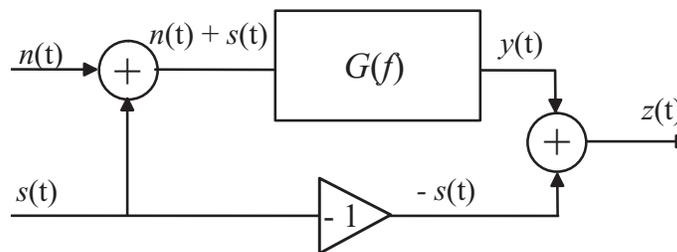


FIGURE 7.19 – Filtrage passe-bas.

Calcul de $z(t)$

Exprimer $z(t)$ en fonction de $g(t)$, $s(t)$, et $n(t)$.

Calcul de $S_{zz}(f)$

Calculer la densité spectrale de puissance du signal $z(t)$, en fonction de $S_{nn}(f)$, $S_{ss}(f)$ et $G(f)$. On justifiera toutes les étapes du calcul.

Calcul avec un filtre moyenneur

Le filtre $G(f)$ a pour réponse impulsionnelle $g(t) = \text{rect}((t - T/2)/T)/T$. Tracer $g(t)$ et calculer $G(f)$. En déduire l'expression de la densité spectrale $S_{zz}(f)$.

Comportement asymptotique du filtre

Si le paramètre du filtre $T \rightarrow +\infty$, que deviennent le module du filtre $G(f)$ et la sortie $z(t)$ du filtre, en supposant que la DSP de $s(t)$ vaut $S_{ss}(f) = \sigma_s^2 \delta(f)$?

7.4.4 Fonction de cohérence

La fonction de cohérence est définie par le rapport :

$$\gamma_{xy}(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}. \quad (7.142)$$

Cas de deux signaux filtrés

On considère un signal $x(t)$, stationnaire au second ordre et ergodique, et $y(t)$ le résultat du filtrage de $x(t)$ par un filtre linéaire invariant de réponse impulsionnelle $g(t)$.

- Exprimer l'intercorrrelation $\Gamma_{xy}(\tau)$ en fonction de $\Gamma_{xx}(\tau)$ et de g . En déduire l'expression de la densité interspectrale de puissance $S_{xy}(f)$.
- Exprimer la fonction d'autocorrélation $\Gamma_{yy}(\tau)$ en fonction de $\Gamma_{gg}(\tau)$ et de $\Gamma_{xx}(\tau)$. En déduire la densité spectrale de puissance $S_{yy}(f)$.
- A partir des résultats des deux questions précédentes, calculer la fonction de cohérence, et montrer que son module est égale à 1.

Cas d'un signal bruité

On considère un signal $x(t)$, stationnaire au second ordre et ergodique, et $y(t) = (g * x)(t) + b(t)$ où $g(t)$ est un filtre linéaire invariant et $b(t)$ est un bruit non corrélé avec $x(t)$.

- Exprimer l'intercorrrelation $\Gamma_{xy}(\tau)$ en fonction de $\Gamma_{xx}(\tau)$ et de g . En déduire l'expression de la densité interspectrale de puissance $S_{xy}(f)$.
- Calculer la densité spectrale de puissance $S_{yy}(f)$ en fonction de $G(f)$, $S_{xx}(f)$ et $S_{bb}(f)$.
- A partir des résultats des deux questions précédentes, exprimer la fonction de cohérence en fonction du rapport $S_{bb}(f)/S_{yy}(f)$. Montrer qu'à la fréquence f , le module de la cohérence est proche de 1 si le rapport signal à bruit est très grand et chute si le rapport signal à bruit diminue.

7.4.5 Application de l'auto-corrélation

On considère le montage de la figure 7.20. Le signal $x(t)$ et le bruit $b(t)$ sont supposés stationnaires, ergodiques et non corrélés. On suppose que $b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance $S_{bb}(f) = B/2$.

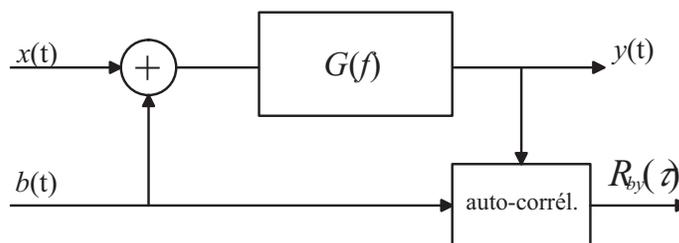


FIGURE 7.20 – Autocorrélation et filtrage.

Calcul de la sortie

Calculer la sortie $y(t)$ en fonction de g , $x(t)$ et $b(t)$.

Autocorrélation

Montrer que la fonction d'autocorrélation statistique $R_{yb}(\tau)$ s'écrit :

$$R_{yb}(\tau) = \frac{B}{2} g(\tau). \quad (7.143)$$

Quel théorème avez-vous utilisé ?

Application

A quoi peut servir ce montage ?

7.4.6 Filtrage - Préaccentuation et désaccentuation

Un signal audio $x(t)$, supposé stationnaire à l'ordre deux et de densité spectrale de puissance connue $S_{xx}(f)$, est transmis sur un canal soumis à un bruit $b(t)$, centré, stationnaire au second ordre et de densité spectrale de puissance connue, $S_{bb}(f)$. Pour améliorer le rapport signal à bruit, on propose d'intercaler le système de filtrage (Fig. 7.21), constitué d'un filtre de préaccentuation avant l'entrée du canal, et d'un filtre de désaccentuation en sortie du canal. On note $H_p(f)$ et $H_d(f)$ les transformées de Fourier des deux filtres. On désire que la sortie du système soit $x(t) + w(t)$, où $w(t)$ est la contribution filtrée du bruit $b(t)$, avec une puissance de bruit aussi petite que possible à puissance du signal fixée. Pour cela, on impose que la puissance du signal $y(t) = h_p(t) * x(t)$ en sortie du filtre préaccentuateur soit égale à P_0 .

Calculs préliminaires

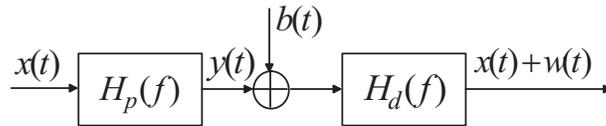


FIGURE 7.21 – Système de préaccentuation et désaccentuation.

- Calculer la puissance P_y du signal $Y(t)$ en sortie du filtre de préaccentuation $H_p(f)$, en fonction de $H_p(f)$ et de $S_{xx}(f)$.
- Etablir la relation entre $H_p(f)$ et $H_d(f)$ pour que la sortie du système soit $x(t) + w(t)$.
- Calculer la puissance $E[w^2(t)]$ du bruit $w(t)$ en sortie du système.

Calcul du filtre

On forme la fonction de coût

$$J = E[w^2(t)] + \lambda[P_y - P_0], \quad (7.144)$$

qui est minimale si l'énergie du bruit $w(t)$ est minimale sous la contrainte $P_y = P_0$, et où λ est un multiplicateur de Lagrange.

- On pose $U(f) = |H_d(f)|^2$. Exprimer J en fonction de $U(f)$ puis montrer que la solution minimisant J par rapport à $U(f)$ est égale à :

$$U^2(f) = \lambda \frac{S_{xx}(f)}{S_{bb}(f)}. \quad (7.145)$$

- Dédire de (7.145), l'expression de $\sqrt{S_{xx}(f)}$.
- En utilisant le résultat de la question précédente, en déduire l'expression de $\sqrt{\lambda}$ en fonction de P_0 , $S_{bb}(f)$ et $S_{xx}(f)$.
- En déduire l'expression de $|H_d(f)|^2$ en fonction de P_0 , $S_{bb}(f)$ et $S_{xx}(f)$.

Calcul des rapports signaux à bruit

- En reportant le dernier résultat dans l'expression de $E[w^2(t)]$ calculée à la question 3, exprimer $E[w^2(t)]$ en fonction de P_0 , $S_{bb}(f)$ et $S_{xx}(f)$.
- Calculer le rapport signal à bruit sans correction, $\rho_{sc} = P_x/P_b$ et la rapport signal avec correction $\rho_{ac} = P_x/P_w$.
- Calculer le gain G de rapport signal à bruit dû aux filtres de préaccentuation et désaccentuation, et montrer en utilisant l'inégalité de Schwartz, que ce rapport est supérieur à 1 à une condition que l'on précisera.

Ainsi, la prise en compte des formes de spectres, supposés connus, permet d'améliorer le rapport signal à bruit. Cette technique est utilisée de façon classique en radio-diffusion en modulation de fréquence. Si le canal est soumis à un bruit blanc, la densité spectrale de puissance du bruit équivalent en réception a une forme parabolique, et le filtre de désaccentuation est en $1/f$. C'est donc un filtre intégrateur pur. En pratique, on prend un simple passe-bas de type RC. En tête du canal, il faut appliquer le filtre inverse, c'est-à-dire un filtre dérivateur. D'où le nom d'accentuation, car le filtre dérivateur accentue (augmente) l'amplitude des fréquences hautes (les aigües).

7.4.7 Amélioration du rapport signal à bruit

Un signal sinusoïdal $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ de fréquence f_0 connue est transmis le long d'un canal bruité dont la sortie est $x(t) + b(t)$ où $b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance constante $S_{bb}(f) = B_0/2$, filtré par un filtre passe-bande idéal, $H_{pb}(f)$, centré sur $\pm f_0$ et de largeur de bande Δf .

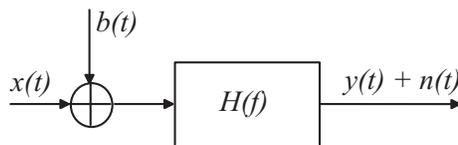


FIGURE 7.22 – Amélioration du rapport signal à bruit par filtrage.

Pour améliorer le rapport signal à bruit, on applique un filtre réel $h(t)$ de fonction de transfert $H(f)$ (Fig. 7.22). Après filtrage, on note $y(t)$ et $n(t)$ les contributions du signal et du bruit, respectivement.

Puissance du bruit

Tracer la réponse $H_{pb}(f)$ du filtre passe-bande idéal. En déduire la puissance du bruit P_b .

Puissance du signal

Calculer la puissance P_x du signal $x(t)$.

Rapport signal à bruit en entrée

En déduire le rapport signal à bruit en entrée $\rho_e = P_x/P_b$.

DSP et puissance du signal après filtrage

- Exprimer $S_{yy}(f)$ en fonction de $H(f)$ et $S_{xx}(f)$.
- Calculer la fonction d'auto-corrélation $\Gamma_{xx}(\tau)$ du signal $x(t)$ puis sa densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$.
- Le filtre $h(t)$ étant réel, montrer que $|H(f)|^2$ est paire. En déduire la relation entre les DSP du signal avant et après filtrage sachant que le filtre $h(t)$ est un filtre réel.
- Calculer alors la puissance P_y du signal en sortie du filtre.

DSP et puissance du bruit après filtrage

- Exprimer $S_{nn}(f)$ en fonction de $H(f)$ et $S_{bb}(f)$.
- Montrer alors que la puissance P_n du bruit en sortie du filtre est le produit de P_b et d'une intégrale que l'on déterminera.

Gain du rapport signal à bruit

- Calculer alors le rapport signal à bruit en sortie de ce filtre, ρ_s .
- Calculer le gain $G = \rho_s/\rho_e$ du rapport signal à bruit après filtrage.

Bibliographie

- [1] G. Blanchet and M. Charbit, *Traitement numérique du signal*, Hermès, Paris, 1998.
- [2] P. Comon, *Independent component analysis, a new concept ?*, *Signal Processing* **36** (1994), no. 3, 287–314.
- [3] P. Comon and C. Jutten, *Handbook of blind source separation. independent component analysis and applications*, Academic Press, Elsevier, 2010, 840 pages.
- [4] F. de Coulon, *Théorie et traitement des signaux*, Dunod, Paris, 1984.
- [5] L. De Lathauwer, D. Callaerts, B. De Moor, and J. Vandewalle, *Fetal electrocardiogram extraction by source subspace separation*, *IEEE Signal Processing Athos workshop on High-order statistics (HOS)* (Begur, Spain), 1995, pp. 134–138.
- [6] R. C. Dixon, *Spread spectrum systems*, John Wiley, New-York, 1976.
- [7] C. Jutten and J. Héroult, *Blind separation of sources, Part I : an adaptive algorithm based on a neuromimetic architecture*, *Signal Processing* **24** (1991), no. 1, 1–10.
- [8] J. Max and J.-L. Lacoume, *Méthodes et techniques de traitement du signal et application aux mesures physiques*, Masson, Paris, 1996.
- [9] A. Papoulis, *Probability, random variables and stochastic processes*, McGraw-Hill, 1984.
- [10] L. Scharf, *Statistical signal processing : detection, estimation and time series analysis*, Addison-Wesley, 1991.
- [11] B. Widrow and et al., *Adaptive noise cancelling : principles and applications*, *Proc. IEEE* **63** (1975), 1692–1716.