

Un cadre à temps continu pour l'estimation paramétrique par moindres carrés

Samer Riachy
École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications
Laboratoire Quartz, EA 7393
contact: riachy@ensea.fr

Tour d'horizon des méthodes algébriques

Un cadre à temps continu pour l'estimation paramétrique

$$y(t) = x(t) + n(t)$$

- ▶ $x(t)$: signal sans bruit
- ▶ $n(t)$: bruit additif (haute fréquence)
- ▶ $y(t)$: mesure bruitée de $x(t)$

But : filtrer, dériver $y(t)$

1^{er} exemple: filtrage d'un signal

x étant lisse et pour un s petit:

$$x(t - s) \approx x(t)$$

Soit $T > 0$:

$$\int_0^T x(t - s) ds \approx \int_0^T x(t) ds = x(t)T$$

Appelons $\tilde{x}(t)$ une estimation de $x(t)$:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t - s) ds = \frac{1}{T} \int_0^T x(t - s) ds + \frac{1}{T} \int_0^T n(t - s) ds$$

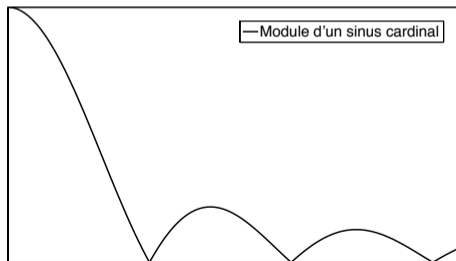
Intégrale \rightarrow filtrage passe bas.

1^{er} exemple: filtrage d'un signal

Soit $1_{[0,T]}(t)$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, T]$ (fonction porte):

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t-s) ds = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0,T]}(s) y(t-s) ds$$

Fourier: $\mathcal{F}(\tilde{x})(j\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} dt \times Y(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2}\right) e^{-\frac{Tj\omega}{2}} \times Y(j\omega)$



2nd exemple: dérivation d'un signal

Pour s petit posons:

$$\dot{x}(s) \approx \dot{x}(0)$$

Soit $T > 0$:

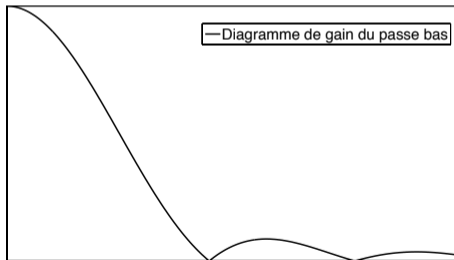
$$\int_0^T (T-s)s\dot{x}(s)ds \approx \int_0^T (T-s)s\dot{x}(0)ds = \dot{x}(0)\frac{T^3}{6}$$

$$\tilde{\dot{x}}(0) = \frac{6}{T^3} \int_0^T (T-s)s\dot{y}(s)ds = -\frac{6}{T^3} \int_0^T (T-2s)y(s)ds$$

$$\tilde{\dot{x}}(t) = -\frac{6}{T^3} \int_0^T (T-s)s\dot{y}(t-s)ds = \frac{6}{T^3} \int_0^T (T-2s)y(t-s)ds$$

2nd exemple: dérivation d'un signal

$$\mathcal{F}(\tilde{x})(j\omega) = \underbrace{-\frac{6}{T^3} \int_0^T (T-t)te^{-j\omega t} dt}_{\text{filtre passe bas}} \times \underbrace{(j\omega)}_{\text{dérivateur pur}} \times Y(j\omega)$$



Comparaison

$$\mathcal{F}(\tilde{x})(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} dt}_{\text{filtre passe bas}} \times Y(j\omega)$$

$$\mathcal{F}(\tilde{\dot{x}})(j\omega) = - \underbrace{\frac{6}{T^3} \int_0^T (T-t)te^{-j\omega t} dt}_{\text{filtre passe bas}} \times \underbrace{(j\omega)}_{\text{dérivateur pur}} \times Y(j\omega)$$

Comparaison

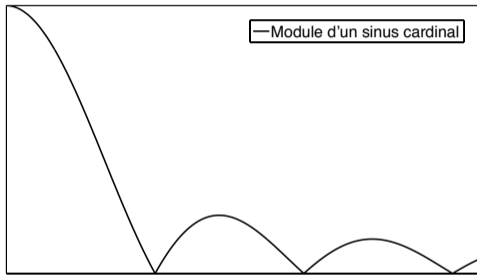


Figure: Passe-bas associé au dérivateur d'ordre 0

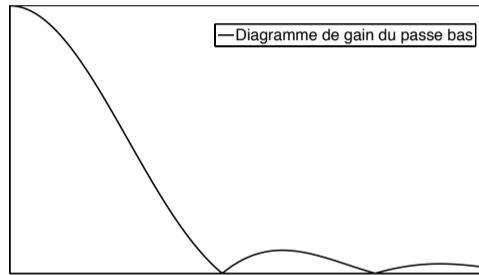


Figure: Passe-bas associé au dérivateur d'ordre 1

$$y(t) = x(t) + n(t)$$

Modèle local (série de Taylor):

$$x(t) \approx x_n(t) = \sum_{i=0}^n x^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!}$$

Transformation de Laplace:

$$\hat{x}_n(s) = \sum_{i=0}^n \frac{x^{(i)}(0)}{s^{i+1}}$$

Annihilateur:

$$H_{\kappa, \mu}^n = \frac{1}{s^{n+\mu+1}} \frac{d^{n+\kappa}}{ds^{n+\kappa}} s^n, \quad \kappa, \mu \in \mathbb{N}$$

$$\hat{x}^{(n)}(0; \kappa, \mu) = \frac{(\mu + \kappa + 2n + 1)!}{(\mu + n)! (\kappa + n)! T^{\mu + \kappa + 2n + 1}} \int_0^T (T - t)^{\mu + n} t^{\kappa + n} y^{(n)}(t) dt.$$

$$\hat{x}^{(n)}(t; \kappa, \mu) = \frac{(-1)^n (\mu + \kappa + 2n + 1)!}{(\mu + n)! (\kappa + n)! T^{\mu + \kappa + 2n + 1}} \int_0^T (T - s)^{\mu + n} s^{\kappa + n} y^{(n)}(t - s) ds.$$

Transformée de Fourier

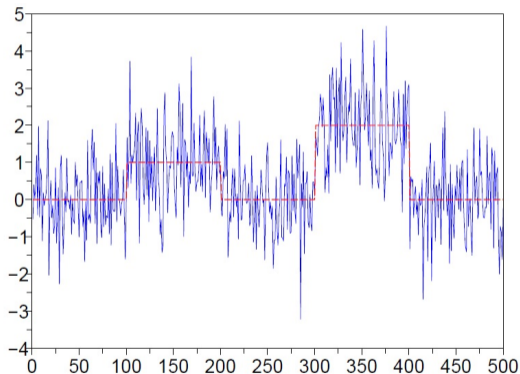
$$\mathcal{F}(\hat{x}^{(n)})_{\kappa, \mu} = \frac{(-1)^n (\mu + \kappa + 2n + 1)!}{(\mu + n)! (\kappa + n)! T^{\mu + \kappa + 2n + 1}} \int_0^T (T - t)^{\mu + n} t^{\kappa + n} e^{-j\omega t} dt \times (j\omega)^n \times Y(j\omega).$$

Bibliographie (dérivateurs algébriques)

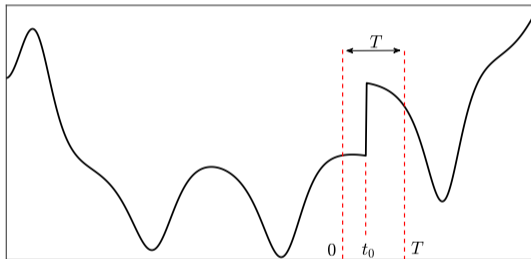
- ▶ L'article le plus cité: M. Mboup, C. Join, M. Fliess, "Numerical differentiation with annihilators in noisy environment", Numerical Algorithms, 2009.
- ▶ Paramètres non entiers: D. Liu, O. GIBARU, W. Perruquetti "Fractional order differentiation by integration and error analysis in noisy environment" TAC 2015.
- ▶ Multivariable: S. Riachy, M. Mboup, J.P. Richard "Multivariate numerical differentiation" JCAM 2011.
- ▶ Interprétation fréquentielle: M. Mboup, S. Riachy (en révision à IJC)
- ▶ ...

Détection des ruptures

Fliess, Join, Mboup "Algebraic change point detection", Applicable algebra, 2010.



Détection des ruptures



$$y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 H(t - t_0)$$

$$\hat{y}(s) = \frac{\alpha_0}{s} + \frac{\alpha_1}{s} e^{-t_0 s}$$

$$s\hat{y}(s) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-t_0 s}$$

$$\hat{y}(s) + s\hat{y}'(s) = -\alpha_1 t_0 e^{-t_0 s}$$

$$\hat{y}(s) + s\hat{y}'(s) + t_0s\hat{y}(s) = \alpha_0t_0$$

$$\frac{d}{ds} :$$

$$2\hat{y}'(s) + s\hat{y}''(s) + t_0(\hat{y}(s) + s\hat{y}'(s)) = 0$$

$$\frac{1}{s^2} :$$

$$\frac{1}{s^2}(2\hat{y}'(s) + s\hat{y}''(s) + t_0(\hat{y}(s) + s\hat{y}'(s))) = 0$$

Domaine temporel:

$$-\int_0^T (2T - 3\tau)\tau y(\tau) d\tau + t_0 \left(\int_0^T (T - 2\tau)y(\tau) d\tau \right) = 0$$

Estimation paramétrique

M. Fliess, C. Join, "Nonlinear estimation is easy" 2008.

Estimer K et λ dans:

$$y(t) = Ke^{-\lambda t} + n(t)$$

Équation différentielle:

$$\dot{x} = -\lambda x$$

Transformée de Laplace:

$$sX(s) - x(0) = -\lambda X(s)$$

$\frac{1}{s^2} \frac{d}{ds}$:

$$\frac{1}{s^2}(X(s) + sX'(s)) = -\lambda \frac{1}{s^2} X'(s)$$

$$\int_0^T (T - 2t)y(t)dt = \lambda \int_0^T (T - t)ty(t)dt$$

Estimation de $x(0) = K$

$$\frac{1}{s^2}(sX(s) - x(0)) = -\lambda \frac{1}{s^2}X(s)$$

$$K \frac{T^2}{2} = \int_0^T y(t)dt + \lambda \int_0^T (T-t)y(t)dt$$

Estimation paramétrique

Estimation de la pulsation de $y(t) = \sin(\omega t) + n(t)$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Transformée de Laplace

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + \omega^2 X = 0$$

On dérive par rapport à s deux fois, on divise par s^3 et repasse en temporel:

$$2 \int_0^T (T^2 - 6Tt + 6t^2)y(t)dt + \omega^2 \int_0^T (T - t)^2 t^2 y(t)dt = 0$$

Tour d'horizon des méthodes algébriques

Un cadre à temps continu pour l'estimation paramétrique

Soit:

$$\alpha x(t) + \beta y(t) = z(t)$$

- ▶ t appartient à un segment temporel
- ▶ x , y et z : des mesures
- ▶ α et β : les paramètres inconnus

On considère des mesures à deux instants différents:

$$\begin{bmatrix} x(t_1) & y(t_1) \\ x(t_2) & y(t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t_1) \\ z(t_2) \end{bmatrix}$$

Si la matrice précédente n'est pas inversible, on considère plusieurs points de mesure.

$$\begin{bmatrix} x(t_1) & y(t_1) \\ x(t_2) & y(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ x(t_n) & y(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t_1) \\ z(t_2) \\ \vdots \\ z(t_n) \end{bmatrix}$$

Calcul d'une pseudo-inverse.

Estimation récursive (Livres: Krstic 1995, Sastry 1989):

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\alpha}}(t) \\ \dot{\tilde{\beta}}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) & y(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} z(t)$$

Une des valeurs propres de

$$- \begin{bmatrix} x(t)^2 & x(t)y(t) \\ x(t)y(t) & y(t)^2 \end{bmatrix}$$

est nulle.

Présence de dérivées (Fliess)

$$\alpha x(t) + \beta \dot{y}(t) = z(t)$$

$$\begin{bmatrix} \int_0^T p(t)x(t)dt & \int_0^T p(t)\dot{y}(t)dt \\ \int_0^T q(t)x(t)dt & \int_0^T q(t)\dot{y}(t)dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T p(t)z(t)dt \\ \int_0^T q(t)z(t)dt \end{bmatrix}$$

$p(t)$ et $q(t)$ ont un support compact dans $[0, T]$.

Présence de dérivées (Fliess)

$$\alpha x(t) + \beta \dot{y}(t) = z(t)$$

$$\begin{bmatrix} \int_0^T p_1(t)x(t)dt & \int_0^T p_1(t)\dot{y}(t)dt \\ \int_0^T p_2(t)x(t)dt & \int_0^T p_2(t)\dot{y}(t)dt \\ \vdots & \vdots \\ \int_0^T p_n(t)x(t)dt & \int_0^T p_n(t)\dot{y}(t)dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T p_1(t)z(t)dt \\ \int_0^T p_2(t)z(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^T p_n(t)z(t)dt \end{bmatrix}$$

$p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ admettent un support compact dans $[0, T]$.

Présence de dérivées et implémentation récursive

$$\frac{1}{2}\text{Fliess} + \frac{1}{2}\text{Krstic}$$

On pose $x_e(t) = \int_0^T p(t)x(t-s)dt$, $y_e(t) = \int_0^T p(s)y(t-s)dt$ et $z_e(t) = \int_0^T p(s)z(t-s)ds$, $p(t)$ admet un support compact dans $[0, T]$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\alpha}}(t) \\ \dot{\hat{\beta}}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_e(t) \\ y_e(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) & y_e(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_e(t) \\ y_e(t) \end{bmatrix} z_e(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\alpha}}(t, \tau) \\ \dot{\hat{\beta}}(t, \tau) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_e(\tau) \\ y_e(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(\tau) & y_e(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}(t, \tau) \\ \tilde{\beta}(t, \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_e(\tau) \\ y_e(\tau) \end{bmatrix} z_e(\tau) + c \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}''(t, \tau) \\ \tilde{\beta}''(t, \tau) \end{bmatrix}$$

$$\text{Riachy} = \frac{1}{3} \text{Fliess} + \frac{1}{3} \text{Krstic} + \frac{1}{3} \text{eq. de la chaleur}$$

S. Riachy “ A continuous time framework for least squares parameter estimation”,
Automatica 2014.

Description du problème d'estimation

Soit le système “non linéaire”

$$x'(\tau) = \phi(x, u) + \varphi(x, u)\Theta, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad \Theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T \in \mathbb{R}^p \quad (1)$$

$\phi(x, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_p]$, $\varphi_i(x, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$ connues.
 x est scalaire mais l'extension à $x \in \mathbb{R}^n$ est immédiate.

Soit \mathbb{T} un segment temporel et considérons une solution de (1) sur \mathbb{T} . Introduisons la notation $\phi(\tau) := \phi(x(\tau), u(\tau))$ et $\varphi_i(\tau) := \varphi_i(x(\tau), u(\tau))$, $\tau \in \mathbb{T}$.

Soit $\epsilon > 0$, $\mathbb{D} = [-\epsilon, \epsilon]$ et $v(s) = (\epsilon^2 - s^2)\chi_{\mathbb{D}}$ ($\chi_{\mathbb{D}}$ fonction indicatrice de \mathbb{D}).

$$[v \star x'](\tau) = [v \star \phi](\tau) + [v \star \varphi](\tau)\Theta \quad (2)$$

Le support de $x'_\epsilon = v \star x'$, $\phi_\epsilon = v \star \phi$ et $\varphi_{\epsilon,i} = v \star \varphi_i$ est \mathbb{T}_ϵ , un ϵ -voisinage de \mathbb{T} .

$$x'_\epsilon(\tau) = \phi_\epsilon(\tau) + \varphi_\epsilon(\tau)\Theta, \quad \tau \in \mathbb{T}_\epsilon.$$

Parenthèse: semigroupe d'opérateurs - équations d'évolution

Soit $\{S(t); t \geq 0\}$ une famille d'opérateurs linéaires définis sur un espace de Banach \mathcal{B} .
 $\{S(t); t \geq 0\}$ est un semigroupe sur \mathcal{B} si:

- ▶ $S(0) = I$ (I désigne l'opérateur identité sur \mathcal{B})
- ▶ $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$.

Exemple

$$\dot{x} = -x, \quad x(t) = x_0 e^{-t}, \quad S(t)x_0 = x_0 e^{-t}$$

Exemple

$$\dot{X} = X'', \quad X(0, x) = X_0(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi], \quad \dot{X} = \frac{\partial}{\partial t} X, \quad X'' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} X$$

$$X(t, x) = \sin(x)e^{-t}, \quad S(t)X_0 = X_0 e^{-t}$$

$$\text{Si } X(0, x) = \sum_{l=1}^{+\infty} a_l \sin(lx) \text{ alors } X(t, x) = \sum_{l=1}^{+\infty} a_l \sin(lx) e^{-l^2 t} \text{ et}$$

$$S(t)X_0 = \sum_{l=1}^{+\infty} a_l \sin(lx) e^{-l^2 t}$$

Parenthèse: semigroupe d'opérateurs - équations d'évolution

Le semigroupe est

- ▶ de contraction si $\|S(t)\| \leq 1$ où $\|\cdot\|$ dénote une norme d'opérateur sur \mathcal{B} .
- ▶ fortement continu si $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)\xi = \xi$

L'opérateur linéaire $A := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{h}$ est le générateur infinitésimal de $S(t)$.

Théorème de Hille-Yosida

L'opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe de contraction ssi:

1. $\mathcal{D}(A)$ est dense et fermé dans \mathcal{B}
2. $\forall \lambda > 0$, $\lambda I - A$ est une bijection,
3. $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Équation d'évolution linéaire

$$\dot{\tilde{\Theta}}(t) = A\tilde{\Theta}(t); \quad \tilde{\Theta}(0) = \tilde{\xi}, \quad \tilde{\xi} \in \mathcal{D}(A) \quad (3)$$

Une fonction $\tilde{\Theta}(t) : [0, +\infty) \mapsto \mathcal{B}$ et une solution de (3) si $\tilde{\Theta}(t) \in \mathcal{C}^1([0, \infty); \mathcal{B})$ et satisfait (3).

Théorème (existence et unicité)

Si $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$ est le générateur d'un semigroupe de contraction $S(t)$ sur \mathcal{B} alors $\forall \tilde{\xi} \in \mathcal{D}(A)$, (3) admet une solution unique donnée par $\tilde{\Theta}(t) = S(t)\tilde{\xi}$.

$$\dot{\hat{\Theta}} = A\hat{\Theta} + B, \quad \hat{\Theta}(0) = \hat{\xi} \quad (4)$$

$$\mathcal{D}(A) = \{\hat{\Theta} \in [\mathcal{C}^2(\mathbb{T}_\epsilon)]^p; \hat{\Theta}'(0) = \hat{\Theta}'(T_\epsilon) = 0, \tau \in \mathbb{T}_\epsilon\}. \quad (5)$$

$A = -\varphi_\epsilon^T \varphi_\epsilon + cJ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$, $B = -\varphi_\epsilon^T (\phi_\epsilon - x'_\epsilon)$, $c > 0$, J matrice identité de dimension p .

Soit $\tilde{\Theta} = \hat{\Theta} - \Theta$:

$$\dot{\tilde{\Theta}} = A\tilde{\Theta}, \quad \tilde{\Theta}(0) = \tilde{\xi}. \quad (6)$$

Theorem (Riachy 2014)

- ▶ *A génère un semigroupe de contraction*
- ▶ *(6) admet une solution unique pour une condition initiale donnée*

$$x'_\epsilon(\tau) = \phi_\epsilon(\tau) + \varphi_\epsilon(\tau)\Theta, \quad \tau \in \mathbb{T}_\epsilon. \quad (7)$$

Hypothèse: Les ensembles

- ▶ $\{\tau; \varphi_\epsilon(\tau)(\Psi - \Theta) = 0, \Psi = (\psi_1, \dots, \psi_p)^T \in \mathbb{R}^p, \Psi \neq \Theta, \tau \in \mathbb{T}_\epsilon\}$
- ▶ $\{\tau; \varphi_{\epsilon,i}(\tau) = 0, i = 1 \dots p, \tau \in \mathbb{T}_\epsilon\},$

admettent des mesures de Lebesgue nulles. ψ_1, \dots, ψ_p sont des constantes.

Théorème (suite)

- ▶ Sous l'hypothèse précédente, l'équilibre $\tilde{\Theta} = 0$ est unique et attractif.

Démonstration

- ▶ $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $\mathcal{L}^2(T_\epsilon)$.
- ▶ Avec $\lambda \in \mathbb{C}$, la transformée de Laplace donne:

$$\lambda \check{\Theta} - \check{\xi} = -\varphi_\epsilon^T \varphi_\epsilon \check{\Theta} + c \check{\Theta}'' , \quad \check{\Theta}'(0) = \check{\Theta}'(T_\epsilon) = 0. \quad (8)$$

Pour $\lambda > 0$, (8) est un problème aux limites \rightarrow admet une solution unique \rightarrow
 $\lambda I - A$ est inversible $\rightarrow \check{\Theta} = (\lambda I - A)^{-1} \check{\xi}$.

- ▶ $\int_0^{T_\epsilon} \check{\Theta}^T (\lambda I + \varphi_\epsilon^T \varphi_\epsilon) \check{\Theta} d\tau - c \int_0^{T_\epsilon} \check{\Theta}^T \check{\Theta}'' d\tau = \int_0^{T_\epsilon} \check{\Theta}^T \check{\xi} d\tau \Rightarrow$
 $\lambda \|\check{\Theta}\|^2 + c \|\check{\Theta}'\|^2 \leq \|\check{\Theta}\| \|\check{\xi}\| \Rightarrow \|\check{\Theta}\| (\lambda \|\check{\Theta}\| - \|\check{\xi}\|) \leq -c \|\check{\Theta}'\| \leq 0 \Rightarrow$
 $\lambda \|\check{\Theta}\| \leq \|\check{\xi}\| \Rightarrow \lambda \|(\lambda I - A)^{-1} \check{\xi}\| \leq \|\check{\xi}\| \Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$ (existence et unicité Ok).
- ▶ $V = \frac{1}{2} \int_0^{T_\epsilon} \check{\Theta}^T \check{\Theta} d\tau > 0 \Rightarrow$
 $\dot{V} = - \int_0^{T_\epsilon} \check{\Theta}^T \varphi_\epsilon^T \varphi_\epsilon \check{\Theta} d\tau + c \int_0^{T_\epsilon} \check{\Theta}^T \check{\Theta}'' d\tau = - \int_0^{T_\epsilon} (\varphi_\epsilon \check{\Theta})^2 d\tau - c \int_0^{T_\epsilon} \|\check{\Theta}'\|^2 d\tau.$

Deuxième estimateur

Soit $\delta > 0$ et

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\Theta}} &= -\varphi_\epsilon^T \varphi_\epsilon \tilde{\Theta}, & n\delta < t < (n+1)\delta \\ \tilde{\Theta}^+ &= \frac{1}{T_\epsilon} \int_0^{T_\epsilon} \tilde{\Theta}(t, s) ds, & t = n\delta \end{cases} \quad (9)$$

Le spectre de $-\varphi_\epsilon^T \varphi_\epsilon$ c'est $\{0, -\sum_{i=1}^p \varphi_{\epsilon,i}^2\}$.

Theorem (Riachy 2014)

Sous l'hypothèse de la diapo 32, $\tilde{\Theta} = 0$ est l'équilibre unique de (9) et il est attractif.

Représentation d'un bruit de grande amplitude

Soit $m(t) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ telle que

- ▶ $m(t)$ oscille rapidement
- ▶ $m(t)$ peut avoir une grande amplitude
- ▶ L'intégrale $\int_{\Omega} m(t)\phi(t)dt$ est petit ($\Omega \subset \mathbb{R}^+$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$).

Une telle fonction peut se trouver dans $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$. Exemple: $m(t) = \frac{1}{\epsilon} \cos\left(\frac{t}{\epsilon^2}\right)$.

Estimation des paramètres d'un système linéaire

$$x^{(q)} = \sum_{i=0}^{q-1} \theta_i x^{(i)} + \theta_q u \quad (10)$$

$X\Theta = x^{(q)}$; $X = [x, \dots, x^{(q-1)}, u]$, $\Theta = [\theta_0, \dots, \theta_q]^T$, $|\theta_i| > 0$.

Soit $y = x + \varpi$ où $\varpi \in \mathcal{H}^{-1}(\mathbb{T})$.

Soit $\rho(s) = (\epsilon^2 - s^2)^q \chi_{\mathbb{D}}$, $y_{\epsilon,i} = \rho \star y^{(i)} = (-1)^i \rho^{(i)} \star y$, $Y_\epsilon = [y_\epsilon, \dots, y_{\epsilon,(q-1)}, u_\epsilon]$.

$$\begin{cases} \dot{\hat{\Theta}} &= -Y_\epsilon^T (Y_\epsilon \hat{\Theta} - y_\epsilon^{(q)}), \quad n\delta < t < (n+1)\delta \\ \hat{\Theta}^+ &= \frac{1}{T_\epsilon} \int_0^{T_\epsilon} \hat{\Theta}(t, s) ds, \quad t = n\delta. \end{cases} \quad (11)$$

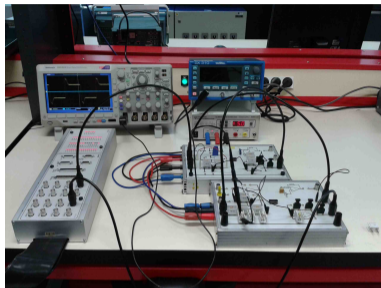
Theorem (Riachy 2014)

- ▶ L'erreur d'estimation $\tilde{\Theta} = \hat{\Theta} - \Theta$ converge dans une boule.
- ▶ Le rayon de la boule est de plus en plus petit si le bruit fluctue de plus en plus vite (indépendamment de son amplitude).

$$\vec{\Theta}_{k+1} = \begin{cases} \vec{\Theta}_k - \delta_1 \vec{Y}_\epsilon^T (\vec{Y}_\epsilon \vec{\Theta}_k + \vec{y}_{\epsilon,q}), & \text{if } \text{mod}(k, r) \neq 0 \\ \text{mean}(\vec{\Theta}_k), & \text{if } \text{mod}(k, r) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

où $r \in \mathbb{N}$, $r > 1$ et δ_1 est telle que les valeur propres appartiennent au cercle unité.

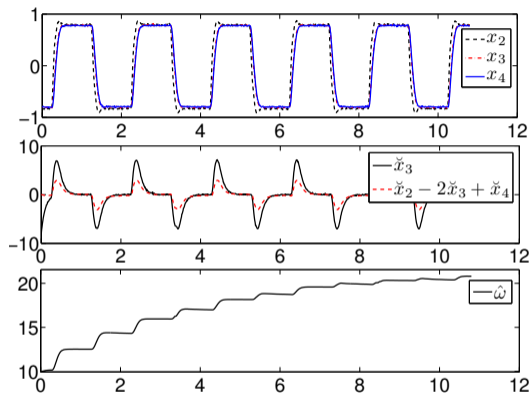
Validation expérimentale



$$\begin{aligned}x'_1 &= -2\omega_1 x_1 + \omega_1 x_2 + \omega_1 u; & x'_2 &= \omega_1 x_1 - 2\omega_1 x_2 + \omega_1 x_3 \\x'_3 &= \omega_3 x_2 - 2\omega_3 x_3 + \omega_3 x_4; & x'_4 &= \iota x_3 - \iota x_4\end{aligned}\quad (13)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{RC} = \omega, \quad \iota = \frac{1}{RC_2}, \quad R = 100\text{K}\Omega, \quad C = 430\text{nF} \text{ et } C_2 = 100\text{nF}.$$

Validation expérimentale



$$\hat{\omega}' = \frac{-(\check{x}_2 - 2\check{x}_3 + \check{x}_4)[(\check{x}_2 - 2\check{x}_3 + \check{x}_4)\hat{\omega} + \check{x}_3']}{\sqrt{\kappa + (\check{x}_2 - 2\check{x}_3 + \check{x}_4)^2}}$$

Pour la méthode proposée, 10^4 opérations de multiplication sont nécessaire pour obtenir une estimation fiable.