

Introduction aux problèmes de synchronisation

Brossier Jean-Marc * Amblard Pierre-Olivier †

Décembre 2000

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Le problème	2
1.2	Démodulateur complexe	3
1.3	Le modèle	3
1.3.1	Cas particulier : estimation de la porteuse	3
1.3.2	Cas particulier : estimation du rythme	4
1.3.3	Cas général : estimation conjointe porteuse/rythme	4
2	Récupération de porteuse	5
2.1	Estimation de la phase d'une fréquence pure	5
2.1.1	Approche du maximum de vraisemblance pour l'estimation d'une phase constante	5
2.1.2	Simplification de la solution du maximum de vraisemblance	5
2.1.3	Filtre de Kalman étendu	6
2.2	Estimation de la phase d'un signal modulé	7
2.2.1	Approche du maximum de vraisemblance pour l'estimation d'une phase constante	7
2.2.2	Remarque sur l'estimation adaptative de phase	8
2.2.3	Etude de la boucle de Costas numérique	9
2.2.4	Filtrage non linéaire optimal	11
2.2.5	Performances ultimes pour l'estimation d'une phase variant de manière quasi linéaire	16
3	Récupération de rythme	19
3.1	Position du problème	19
3.2	Transmission par paquets	19
3.2.1	Synchronisation de trame.	19
3.2.2	Synchronisation fine.	20
3.3	Transmission en flot continu	20
3.4	Techniques exploitant la cyclostationnarité	20
3.4.1	Méthode de la raie spectrale analogique	20
3.5	Récupération de rythme et algorithmes adaptatifs	21
3.5.1	Critère pseudo-EQM	21
3.5.2	Critère de Godard	22
3.5.3	Critère de Gardner	22
4	Etude de cas	23
4.1	Synchronisation pour les modulations multiporteuses	23
4.1.1	Rappel sur l'OFDM	23
4.1.2	Solution optimale	24
4.2	Synchronisation en CDMA	25

*ST Microelectronics. 60, rue Lavoisier. 38 330 Montbonnot Saint Martin. Tel. 04 76 58 68 38. e-mail : jean-marc.brossier@st.com

†LIS/ENSIEG. BP 46. 38 402 Saint Martin d'Hères. Tel. 04 76 82 71 06. e-mail : bidou.amblard@lis.inpg.fr

4.2.1	Rappel sur le CDMA	25
4.2.2	Synchronisation grossière	25
4.2.3	Synchronisation fine	25
5	Conclusion	26
6	Annexes	28
6.1	Borne de Cramér-Rao <i>a posteriori</i> hors ligne	28
6.2	Borne de Cramér-Rao <i>a posteriori</i> séquentielle	30
6.3	Performances des boucles de Costas et DFL	31
6.3.1	Boucle de Costas	32
6.3.2	DFL	33

1 Introduction

*Avant l'heure, c'est pas l'heure
Après l'heure, c'est plus l'heure.*

1.1 Le problème

Une séquence complexe $\{a_k\}$ appartenant à une certaine constellation est émise. Pour simplifier, nous supposons que la modulation est une BPSK (Binary Phase Shift Keying), c'est-à-dire $a_k = \pm 1$. Après mise en forme, par une impulsion $g(t)$, et translation de fréquence, le signal continu émis s'écrit :

$$e_{HF}(t) = \text{Re} \left(e^{i2\pi\nu_0 t} \sum_n a_n g(t - nT) \right) \quad (1)$$

où T désigne la durée d'un symbole. Après avoir traversé le canal de transmission, ce signal est finalement reçu. En supposant le canal linéaire et invariant, de réponse impulsionnelle $h(t)$, et le bruit $\nu(t)$ additif blanc et gaussien, le signal modulé reçu est de la forme :

$$r_{HF}(t) = \text{Re} \left(e^{i2\pi\nu_0 t} \left(\sum_n a_n q(t - nT) + \nu(t) \right) \right)$$

avec $q = g * h$. L'enveloppe complexe de $r_{HF}(t)$ est :

$$r(t) = \sum_n a_n q(t - nT) + \nu(t)$$

Une statistique suffisante peut être construite en filtrant $r(t)$ par $q^*(-t)$, filtre adapté à $q(t)$, puis en échantillonnant de manière synchrone au rythme de un point par symbole. En notant $y(t)$ la sortie du filtre adapté et $y_k = y(kT)$, on a :

$$y_k = \left\{ \sum_n a_n p(t - nT) + [\nu(t) * q^*(-t)] \right\} \Big|_{t=kT} \quad \text{avec } p(t) = q(t) * q^*(-t)$$

Cette séquence complexe peut être ensuite utilisée par un détecteur MLSE (Maximum Likelihood Sequence Estimation). Le récepteur ainsi construit est théoriquement optimum, mais que faut-il pour le mettre en œuvre pratiquement ?

- L'enveloppe complexe du signal reçu doit être correctement estimée. Cela suppose que le récepteur dispose d'un oscillateur local parfaitement synchronisé avec celui de l'émetteur. Si tel n'est pas le cas, une **récupération de porteuse** devra être utilisée.

- Le pilotage de l'échantillonneur en sortie du filtre adapté doit être aligné sur le rythme d'émission des symboles. Pour qu'il en soit ainsi, un dispositif de **synchronisation symbole** (ou rythme) doit être utilisé.

Ces deux points sont au cœur de ce document. En pratique, il est aussi nécessaire d'estimer le canal de transmission pour alimenter l'algorithme de Viterbi (détecteur MLSE) et le filtrage adapté peut être implanté numériquement à condition d'échantillonner à un rythme compatible avec le théorème de Shannon (pour des roll-off inférieurs à 100%, un échantillonnage à deux points par symbole convient). Nous abordons uniquement les problèmes de synchronisation ; sauf mention contraire, nous supposons que le canal de transmission respecte le critère de Nyquist ; un échantillonnage synchrone en sortie du filtre adapté donne ainsi un modèle discret instantané. Nous étudierons les problèmes de synchronisation porteuse et symbole séparément.

1.2 Démodulateur complexe

Ce dispositif permet d'estimer l'enveloppe complexe du signal reçu. Idéalement, il prend en son entrée le signal modulé $\text{Re} [r(t) e^{i2\pi\nu_0 t}]$ et donne en sortie les composantes réelle et imaginaire de $r(t) = P(t) + iQ(t)$. Pour cela, le signal reçu est séparé en deux voies. L'une effectue la projection sur $\cos(2\pi\nu_0 t)$, l'autre sur $\sin(2\pi\nu_0 t)$.

En pratique, le déphasage $\xi(t)$ entre la porteuse et l'oscillateur local est non nul, et généralement variable au cours du temps ; les composantes en sortie des deux branches du démodulateur complexes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} P(t) = \text{Re} [r(t) e^{i\xi(t)}] = \text{Re} [r(t)] \cos(\xi(t)) - \text{Im} [r(t)] \sin(\xi(t)) \\ Q(t) = \text{Im} [r(t) e^{i\xi(t)}] = \text{Re} [r(t)] \sin(\xi(t)) + \text{Im} [r(t)] \cos(\xi(t)) \end{cases}$$

La rotation de l'enveloppe complexe doit être estimée et compensée *a posteriori*.

1.3 Le modèle

Il nous faut un modèle prenant en compte les imperfections de synchronisation. En présence d'une erreur de synchronisation $\xi(t)$ le signal analogique sortant du démodulateur complexe est de la forme :

$$y(t) = \left(\sum_n a_n p(t - nT) + n(t) \right) e^{i\xi(t)} \text{ avec } n(t) = \nu(t) * q^*(-t)$$

1.3.1 Cas particulier : estimation de la porteuse

Pour l'étude de la récupération de porteuse, c'est-à-dire l'estimation et la compensation de la différence de phase $\xi(t)$, nous supposons que le rythme est correctement estimé ; les instants d'échantillonnage sont alignés sur les symboles transmis, ainsi :

$$\begin{aligned} y_k &= y(kT) = \left(\sum_n a_n p(t - nT) + n(t) \right) e^{i\xi(t)} \Big|_{t=kT} \\ &= \left(\sum_n a_n p(kT - nT) + n(kT) \right) e^{i\xi_k} \end{aligned}$$

Du fait que le canal respecte le critère de Nyquist et que les filtres de mise en forme de l'émetteur et du récepteur assure une absence d'interférences entre symboles lorsque l'échantillonnage est synchrone, le modèle normalisé devient très simple :

$$y_k = a_k e^{i\xi_k} + b_k$$

La phase ξ_k devra être estimée à partir de la suite $\{y_k\}$. Le bruit complexe $\{b_k = n(kT) e^{i\xi_k}\}$ est supposé gaussien, blanc et circulaire, de variance $\sigma_b^2 = E\{|b_k|^2\}$.

1.3.2 Cas particulier : estimation du rythme

En l'absence de rotation de phase, le signal en sortie du démodulateur complexe s'écrit :

$$y(t) = \sum_n a_n p(t - nT) + n(t)$$

Les instants $t_k = kT$ doivent être estimés à partir de $y(t)$.

1.3.3 Cas général : estimation conjointe porteuse/rythme

En général, les deux problèmes précédents se posent simultanément. Deux stratégies peuvent alors être envisagées :

1. Faire fonctionner successivement deux algorithmes de synchronisation, l'un pour la porteuse, l'autre pour le rythme. Cette solution simple est malheureusement sous-optimale et peut parfois s'avérer insuffisante.
2. Construire de nouveaux algorithmes d'estimation conjointe de phase et de rythme. Cette solution généralement plus performante peut être plus complexe à mettre en œuvre.

Notons que nous nous limitons ici aux seuls problèmes de synchronisation. En pratique, il faut ajouter à ceux-ci l'estimation du canal de transmission et la détection des symboles transmis. Dans ce cas général, les algorithmes conjoints deviennent beaucoup plus complexes. Il est intéressant de noter que l'estimation du rythme peut très souvent être incluse dans l'estimation du canal. En effet, de plus en plus de transmissions s'effectuent sous forme de trame et les méthodes blocs sont de plus en plus employées. Dans ce cas, en supposant que l'échantillonnage ne dérive pas sur la durée d'un bloc, le seul effet d'un décalage du peigne d'échantillonnage par rapport au peigne synchrone est de modifier la réponse impulsionnelle du canal vue par le récepteur. Dans ce type de situation, la synchronisation symbole consiste à positionner correctement les blocs ; une fois cette synchronisation grossière effectuée, la synchronisation fine est incluse dans le canal.

Importance des dispositifs de synchronisation

- Une **mauvaise estimation de la phase** de la porteuse se traduit par une **atténuation** du signal utile pour une modulation à une dimension (BPSK, AM) et des **interférences** entre la voie en phase et la voie en quadrature lorsque deux porteuses en quadrature sont utilisées (N-PSK avec $N \geq 4$, QAM).
- Une **mauvaise estimation du rythme** se traduit par une **augmentation des interférences entre symboles**. Lorsque l'échantillonnage n'est pas synchrone, même un canal satisfaisant le critère de Nyquist génère des interférences entre symboles.

2 Récupération de porteuse

D'après notre modèle élémentaire, les échantillons observés vérifient :

$$y_k = a_k e^{i\xi_k} + b_k$$

On note $\varphi_k = \widehat{\xi}_k$ le déphasage estimé par le récepteur. De sorte que les symboles peuvent être estimés par $\widehat{a}_k = c_k = y_k e^{-i\varphi_k}$. Nous nous intéressons à des problèmes de complexité croissante en commençant par l'étude des solutions du Maximum de Vraisemblance (MV) et de diverses solutions approchées pour l'estimation de la phase d'une fréquence pure (signal non modulé) puis pour l'estimation de la phase d'un signal modulé BPSK. Nous abordons ensuite le problème de l'estimation optimale de phase du point de vue du filtrage non linéaire optimal en présentant une mise en œuvre pratique par une technique particulière.

2.1 Estimation de la phase d'une fréquence pure

2.1.1 Approche du maximum de vraisemblance pour l'estimation d'une phase constante

Considérons le modèle d'observation associé à une phase constante :

$$y_k = \exp(i\xi) + b_k$$

En groupant $k + 1$ observations dans le vecteur $Y_k = (y_0, \dots, y_k)^T$ et en supposant toujours le bruit b_k blanc, gaussien et circulaire ; la fonction de vraisemblance de Y_k s'écrit :

$$p(Y_k | \xi) = \prod_{n=0}^k \frac{1}{\sigma_b^2 \pi} \exp\left(-\frac{|y_n - e^{i\xi}|^2}{\sigma_b^2}\right)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance φ_k de ξ vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \ln \{p(Y_k | \xi)\} = 0$$

d'où :

$$\varphi_k = \arctan \frac{\sum_{n=0}^k \operatorname{Im}(y_n)}{\sum_{n=0}^k \operatorname{Re}(y_n)}$$

2.1.2 Simplification de la solution du maximum de vraisemblance

La solution du MV peut être approchée par une forme récursive en supposant que l'estimateur varie lentement, c'est-à-dire que $|\varphi_k - \varphi_{k-1}| \ll 1$. Cette hypothèse est en particulier vérifiée lorsque la valeur estimée est déjà proche de la valeur optimale (k grand). La dérivée de la log vraisemblance étant nulle à l'optimum, la solution du maximum de vraisemblance φ_k vérifie :

$$\sum_{n=0}^k \operatorname{Im}(y_n e^{-i\varphi_k}) = 0 \quad (2)$$

En écrivant

$$\operatorname{Im}\left(y_k e^{-i(\varphi_k - \varphi_{k-1}) + i\varphi_{k-1}}\right) + \sum_{n=0}^{k-1} \operatorname{Im}\left(y_n e^{-i(\varphi_k - \varphi_{k-1}) + i\varphi_{k-1}}\right) = 0$$

et en utilisant le développement limité $\operatorname{Im}(z \cdot e^{i\varepsilon}) \sim \operatorname{Im}(z) + \varepsilon \operatorname{Re}(z)$ valable pour $\varepsilon = |\varphi_k - \varphi_{k-1}| \ll 1$ et le fait que φ_{k-1} est solution du maximum de vraisemblance au temps $k - 1$, on peut écrire :

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \mu_k \operatorname{Im}(y_k e^{-i\varphi_{k-1}}) \quad (3)$$

où

$$\mu_k = \left[\sum_{n=0}^k \operatorname{Re}(y_n e^{-i\varphi_{k-1}}) \right]^{-1}$$

est, en moyenne, proche de $\frac{1}{k+1}$. Cet algorithme est à pas décroissant comme cela est habituel dans le cas de l'estimation d'un paramètre constant. Sa forme est exactement celle de la boucle de phase numérique du premier ordre.

Notons le passage de la relation implicite (2) à un algorithme récursif (3). Nous utiliserons à nouveau cette manière d'approcher une solution du MV non explicite par un algorithme adaptatif lors de l'étude de l'estimation de la phase de signaux modulés.

2.1.3 Filtre de Kalman étendu

Lorsque la phase à estimer n'est plus constante, il devient difficile d'exploiter les solutions du MV ou du MAP, une approche classique consiste alors à approcher la solution optimale par un filtre de Kalman étendu. La phase étant fonction du temps, l'observation est maintenant :

$$y_k = e^{i\xi_k} + b_k$$

Pour estimer ξ_k à l'aide d'un filtre de Kalman étendu, il faut connaître un modèle d'évolution *a priori* de la phase. Dans la suite, nous considérons les deux cas réalistes d'une dérive brownienne avec ou sans dérive linéaire.

Phase Brownienne. Supposons que la phase ξ_k suit une évolution brownienne :

$$\xi_{k+1} = \xi_k + w_k$$

En notant Q_k la variance de w_k et $P_{k|k}$ celle de l'estimateur φ_k , le filtre de Kalman étendu (cf. [6]) se réduit à :

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \gamma_k \operatorname{Im} [y_k \exp(-i\varphi_{k-1})] \text{ avec } \gamma_k = \frac{2}{\sigma_b^2} P_{k|k}$$

avec

$$P_{k|k} = \frac{\sigma_b^2}{2} (P_{k-1|k-1} + Q_{k-1}) / (P_{k-1|k-1} + Q_{k-1} + \sigma_b^2/2)$$

Cet algorithme est une boucle de phase numérique à pas γ_k variable. En affectant directement à γ_k sa valeur asymptotique γ_∞ l'estimateur se réduit à nouveau à une boucle de phase numérique du premier ordre.

Dérive quasi linéaire. En pratique, il existe toujours un petit décalage fréquentiel entre deux oscillateurs ; la dérive de phase moyenne est linéaire de pente ε inconnue *a priori*. Une extension de l'état du filtre de Kalman pour y inclure la dérive inconnue ε conduit à un nouveau modèle d'état :

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \xi_k + \varepsilon_k + w_k^1 \\ \varepsilon_{k+1} &= \varepsilon_k + w_k^2 \end{aligned}$$

w_k^1 et w_k^2 sont deux petits bruits de dynamique. On note $P_{k|k_{ij}}$ les composantes de la matrice $P_{k|k}$, Q_{ij} celles de Q et $R_k = Q_{11} + P_{k|k_{11}} + P_{k|k_{21}} + P_{k|k_{12}} + P_{k|k_{22}}$. Pour cette nouvelle dynamique, l'estimateur de Kalman étendu est le suivant :

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} &= \varphi_k + \hat{\varepsilon}_{k|k} + \frac{R_k}{\sigma_b^2/2 + R_k} \operatorname{Im} [y_k e^{-i(\varphi_k + \hat{\varepsilon}_{k|k})}] \\ \hat{\varepsilon}_{k+1|k+1} &= \hat{\varepsilon}_{k|k} + \frac{P_{22} + P_{21}}{\sigma_b^2/2 + R_k} \operatorname{Im} [y_k e^{-i(\varphi_k + \hat{\varepsilon}_{k|k})}] \end{aligned}$$

avec

$$P_{k+1|k+1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_b^2}{2} (R_k - Q_{11})}{\sigma_b^2/2 + R_k} & \frac{\sigma_b^2}{2} (P_{k|k_{12}} + P_{k|k_{22}})}{\sigma_b^2/2 + R_k} \\ \frac{\sigma_b^2}{2} (P_{k|k_{12}} + P_{k|k_{22}})}{\sigma_b^2/2 + R_k} & Q_{22} + P_{k|k_{22}} - \frac{(P_{k|k_{12}} + P_{k|k_{22}})(P_{k|k_{21}} + P_{k|k_{22}})}{\sigma_b^2/2 + R_k} \end{pmatrix}$$

Ce filtre permet de poursuivre avec un biais asymptotiquement nul les dérives linéaires de phase. En fixant directement le gain de Kalman, cet algorithme s'écrit :

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1} &= \varphi_k + \widehat{\varepsilon}_k + \gamma_1 \aleph_k \\ \widehat{\varepsilon}_{k+1|k+1} &= \widehat{\varepsilon}_{k|k} + \gamma_2 \aleph_k\end{aligned}$$

avec $\aleph_k = \text{Im} \left[y_k e^{-i(\varphi_k + \widehat{\varepsilon}_{k|k})} \right]$. Il peut être réécrit en faisant apparaître un **filtre de boucle** :

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{1 - z^{-1}} \right) \aleph_k \quad (4)$$

On l'appelle une boucle de phase du second ordre.

2.2 Estimation de la phase d'un signal modulé

2.2.1 Approche du maximum de vraisemblance pour l'estimation d'une phase constante

L'estimation de la phase d'une fréquence pure a été mise très simplement sous la forme d'un problème de filtrage de Kalman. Lorsque la sinusoïde est modulée, la situation devient moins simple et il faut, d'une manière ou d'une autre, éliminer la modulation pour se ramener au problème précédent. Nous allons aborder ce problème par la méthode du MV et en déduire deux approximations célèbres : la boucle de Costas et la boucle à remodulation (aussi appelée DFL pour Decision Feedback Loop).

L'observation est :

$$y_k = a_k e^{i\xi} + b_k$$

En groupant toujours $k + 1$ observations en un vecteur $Y_k = (y_0, \dots, y_k)^T$, nous avons :

$$P(Y_k | \xi, a_k) = \prod_{n=0}^k \frac{1}{\pi \sigma_b^2} \exp \left(-\frac{|y_n - a_n e^{i\xi}|^2}{\sigma_b^2} \right)$$

En supposant les a_k indépendants et uniformément répartis sur $\{-1, +1\}$, il est possible d'intégrer sur les a_k inconnus :

$$P(Y_k | \xi) = \left(\frac{1}{\pi \sigma_b^2} \right)^{k+1} \prod_{n=0}^k \left\{ \begin{array}{l} \exp \left(-\frac{|y_n|^2 - 2 \text{Re}(y_n e^{-i\xi}) + 1}{\sigma_b^2} \right) \\ + \exp \left(-\frac{|y_n|^2 + 2 \text{Re}(y_n e^{-i\xi}) + 1}{\sigma_b^2} \right) \end{array} \right\}$$

En dérivant la log-vraisemblance :

$$\begin{aligned}\partial_\xi \log P(Y_k | \xi) &\propto \sum_{n=0}^k \partial_\xi \log \cosh \left(\frac{2}{\sigma_b^2} \text{Re}(y_n e^{-i\xi}) \right) \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{2}{\sigma_b^2} \text{Im}(y_n e^{-i\xi}) \tanh \left(\frac{2}{\sigma_b^2} \text{Re}(y_n e^{-i\xi}) \right)\end{aligned}$$

Bien que l'on ne puisse pas extraire une solution analytique pour l'estimateur, il reste possible d'approcher la solution par un algorithme récursif du type :

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \frac{\gamma'}{\sigma_b^2} \text{Im}(y_k e^{-i\varphi_k}) \tanh \left(\frac{2}{\sigma_b^2} \text{Re}(y_k e^{-i\varphi_k}) \right)$$

Le terme γ'/σ_b^2 indique que la correction doit être d'autant plus faible que l'erreur est bruitée. Dans la suite, les constantes seront incluses dans le pas et nous noterons simplement γ . Selon le rapport signal sur bruit, le terme $\tanh \left(\frac{2}{\sigma_b^2} \text{Re}(y_k e^{-i\varphi_k}) \right)$ peut être approché de deux façons :

Rapport signal sur bruit fort. Lorsque σ_b^2 est petit, le terme $\frac{2}{\sigma_b^2} \operatorname{Re}(y_k e^{-i\varphi_k})$ est grand et la tangente hyperbolique est très proche de la fonction signe. Ainsi, $\tanh\left(\frac{2}{\sigma_b^2} \operatorname{Re}(y_k e^{-i\varphi_k})\right)$ est une décision \widetilde{a}_k sur le symbole a_k . La solution MV approchée devient *une boucle à remodulation* :

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \gamma \operatorname{Im}(\widetilde{a}_k y_k e^{-i\varphi_k}) \quad (5)$$

Rapport signal sur bruit faible. Lorsque σ_b^2 est grand, le terme $\frac{2}{\sigma_b^2} \operatorname{Re}(y_k e^{-i\varphi_k})$ est petit et la tangente hyperbolique est quasi linéaire, l'algorithme devient :

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \frac{\gamma'}{\sigma_b^2} \operatorname{Im}(y_k e^{-i\varphi_k}) \operatorname{Re}(y_k e^{-i\varphi_k})$$

et peut être réécrit sous la forme d'une *boucle de Costas* :

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \gamma \operatorname{Im}(y_k^2 e^{-i2\varphi_k}) \quad (6)$$

La boucle de Costas et la boucle à remodulation peuvent donc être vues comme des approximations de la solution du MV, mais des questions pratiques subsistent :

- Comment choisir la vitesse d'adaptation de la phase estimée, autrement dit comment choisir la valeur du pas γ ?
- Comment prendre en compte des informations *a priori* sur la dynamique de la phase à estimer ? L'utilisation d'une procédure de Kalman dans le cas d'une sinusoïde non modulée indique qu'une bonne manière de prendre en compte l'information *a priori* consiste à filtrer le signal d'erreur par un filtre qui reflète le modèle d'état. Cette approche peut aussi être utilisée dans le cas d'une porteuse modulée.
- Quelles sont les meilleures performances qu'il est possible d'obtenir avec un algorithme donné ? (valeur de l'EQM – Erreur Quadratique Moyenne – lorsque les pas sont réglés de manière optimale)

2.2.2 Remarque sur l'estimation adaptative de phase

La boucle de Costas et la boucle à remodulation peuvent également être construites en adoptant une approche classique pour la conception d'algorithmes adaptatifs : choix d'une fonction de coût puis minimisation de ce coût à l'aide d'un algorithme du gradient stochastique. La boucle de Costas (6) est alors vue comme un algorithme du gradient stochastique pour minimiser la fonction :

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= \operatorname{E} |y_k^2 e^{-i2\varphi} - 1|^2 \\ &= 4 \sin^2(\xi - \varphi) + 2\sigma_b^2 (1 + \sigma_b^2) \end{aligned}$$

qui possède ses minima en $\varphi = \xi + k\pi$ (k entier) et dont la minimisation conduit à la valeur de ξ modulo π .

La boucle à remodulation (5), quant à elle, est l'algorithme du gradient stochastique pour le coût localement quadratique :

$$J(\varphi) = \operatorname{E} |y_k e^{-i\varphi} - \widetilde{a}_k|^2$$

où $\widetilde{a}_k = \operatorname{sign}(y_k e^{-i\varphi})$ représente une décision quant à la valeur de a_k . Ce coût possède également des minima parasites correspondant à une erreur de phase de π . Cette indétermination est inévitable dans le cadre d'une estimation aveugle du fait de l'invariance par rotation (de π) de la constellation BPSK. La connaissance de la fonction de coût associée à l'algorithme adaptatif permet de mettre en évidence un certain nombre de propriétés communes à ces deux boucles de phase :

- Le coût est π -périodique. La trajectoire de l'algorithme du gradient stochastique peut ainsi sauter d'un bassin d'attraction à l'autre. La probabilité de ce phénomène, appelé glissement de cycle, varie exponentiellement en fonction du rapport signal sur bruit. Le comportement de la boucle de phase n'est acceptable que lorsque la probabilité de glissement de cycle est extrêmement faible.
- Le coût possède des points d'équilibre stable espacés de π mais aussi des points d'équilibre instable : les maxima. Au voisinage de ces équilibres instables, la pente est très faible et un algorithme du gradient met très longtemps à sortir de cette région. L'erreur de phase à l'initialisation de l'algorithme joue donc un rôle important sur la vitesse d'accrochage de l'algorithme. Ce phénomène est connu sous le nom de *hang-up* ; comme nous le verrons lors de l'étude du comportement de la boucle de Costas, il apparaît très clairement en examinant l'expression des trajectoires moyennes.

2.2.3 Etude de la boucle de Costas numérique

Ce paragraphe est consacré à l'étude de deux aspects du comportement de la boucle de Costas :

- A. Convergence en situation stationnaire,
- B. EQM asymptotique en situation non stationnaire.

A - Convergence initiale de la boucle du premier ordre. Etudions tout d'abord la convergence en moyenne de l'algorithme (6) à l'aide de la méthode de l'équation différentielle moyenne [1, 3]. L'idée consiste à associer à un algorithme adaptatif une équation différentielle qui décrit ce que sont, en moyenne, ses trajectoires. Cette étape est couramment appelée accrochage dans le domaine des boucles à verrouillage de phase. La boucle de Costas rentre dans le cadre des algorithmes considérés dans [3]. Son champ moyen s'écrit :

$$\begin{aligned} h(\varphi) &= \text{E Im} (y_k^2 e^{-i2\varphi}) \\ &= \sin [2 (\xi - \varphi)] \end{aligned}$$

où E désigne l'espérance relative à la loi conjointe des données a_k et du bruit b_k . Le champ $h(\varphi)$ mesure la façon dont l'erreur de phase est prise en compte en moyenne par l'algorithme. Avec les notations $E_0 = \varphi_0 - \xi_0$, $E(t) = \varphi(t) - \xi(t)$ et $\varphi' = \partial\varphi/\partial t$, l'ODE¹ s'écrit :

$$\varphi' = \sin [2 (\xi - \varphi)]$$

d'où :

$$E(t) = \arctan [\tan (E_0) e^{-2t}] \quad (7)$$

Les points d'équilibre vérifient $\varphi' = 0$, soit :

$$\xi = \varphi + m \frac{\pi}{2} \text{ avec } m \text{ entier}$$

La figure 1 illustre le champ moyen (erreur moyenne) d'une boucle de Costas. Les valeurs paires de m correspondent aux équilibres stables, les valeurs impaires aux équilibres instables (pentes négatives et positives). On remarquera que le changement $\gamma \rightarrow -\gamma$ (qui correspond à $h \rightarrow -h$ dans l'ODE) ne conduit pas à la divergence de l'estimateur mais permute simplement les positions des équilibres stables et instables. Les points d'équilibre stables peuvent être vus comme les valeurs de φ qui minimisent le potentiel scalaire J dont dérive le champ moyen h . Ce potentiel est donné par :

$$J(\varphi) = \sin^2(\xi - \varphi)$$

Cette interprétation en termes de potentiel (la fonction de coût à une constante près) est donnée sur la figure 1.

La comparaison d'une trajectoire de l'algorithme avec la trajectoire associée de l'ODE donnée par la figure 2 illustre clairement le sens des termes "équation différentielle moyenne" (ODE), et "comportement moyen de l'algorithme". Plus le pas d'adaptation est petit, plus la trajectoire de l'algorithme colle à celle de l'ODE.

Le phénomène de hang-up apparaît lorsque l'erreur de phase à l'initialisation de l'algorithme est proche de $\pi/2$. Dans ce cas, le terme $\tan(E_0)$ dans l'équation (7) est très grand, ainsi $E(t)$ reste très longtemps au voisinage de l'équilibre instable, et ce, quel que soit le bruit.

B - Poursuite des non-stationnarités. En pratique, la phase à estimer évolue au cours du temps du fait des erreurs de démodulation. Les erreurs les plus courantes proviennent du mauvais ajustement des porteuses employées par l'émetteur et le récepteur ainsi que des mouvements relatifs de l'émetteur par rapport au récepteur. Dans ces deux cas, l'évolution de l'erreur de phase est bien représentée par le modèle de dérive quasi linéaire suivant :

$$\xi_k = \xi_{k-1} + \varepsilon + w_k \quad (8)$$

où $\varepsilon \ll 1$ représente la partie déterministe de la dérive, et w_k un bruit blanc gaussien centré de variance σ_w^2 . Nous étudions maintenant les performances de la boucle de Costas en poursuite de ce modèle.

¹Ordinary Differential Equation

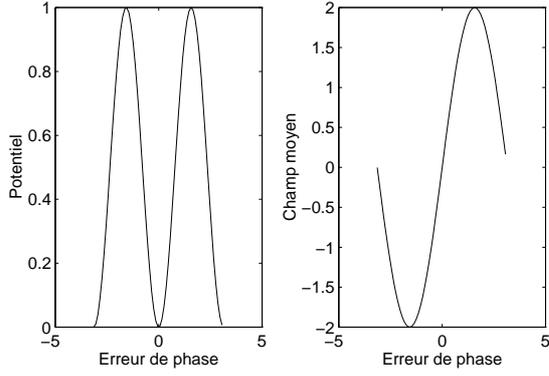


FIG. 1 – Potentiel et erreur d’une boucle de Costas

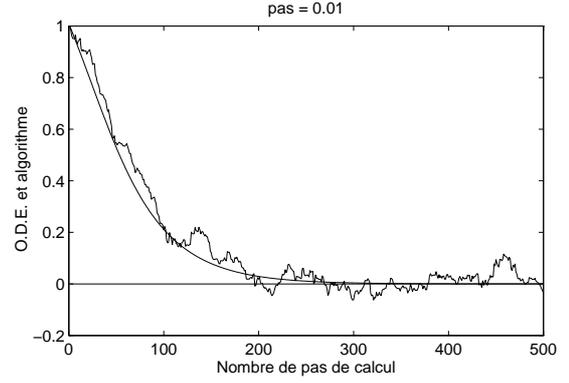


FIG. 2 – Trajectoire de l’algorithme vs trajectoire ODE.

Pour une boucle de Costas d’ordre un. Le choix du pas γ est un problème délicat ; trop petit, il ne permet pas de poursuivre efficacement les non-stationnarités mais procure une variance d’estimation faible ; trop grand, l’estimateur possède une variance importante mais les non-stationnarités sont bien suivies. Dans tous les cas, il existe une valeur qui optimise ce compromis fluctuations-retard. Les résultats de [3] permettent de calculer la valeur théorique du pas optimum. En supposant σ_b petit, la décomposition biais-variance de l’EQM asymptotique s’écrit :

$$\begin{aligned} EQM(\gamma) &= \lim_{k \rightarrow \infty} E(\varphi_k - \xi_k)^2 \\ &= \frac{\varepsilon^2}{4\gamma^2} + \gamma \frac{\sigma_b^2}{2} \end{aligned}$$

d’où la valeur optimale du pas :

$$\gamma_* = (2\varepsilon^2/\sigma_b^2)^{1/3} \quad (9)$$

et la valeur correspondante de l’EQM :

$$EQM(\gamma_*) = \frac{3}{4} (\varepsilon\sigma_b^2)^{2/3} \quad (10)$$

Pour une boucle de Costas d’ordre deux et une boucle à remodulation d’ordre deux. Clairement, la boucle d’ordre un étant asymptotiquement biaisée, elle n’est pas adaptée à la poursuite d’une dérive linéaire. Comme nous l’avons vu en étudiant le filtre de Kalman étendu pour l’estimation de la phase d’une sinusoïde non modulée, celui-ci fonctionne en deux étapes. Une prédiction prenant en compte la connaissance *a priori* contenue dans le modèle d’état et une correction suite à l’arrivée d’une nouvelle observation. Ce fonctionnement en deux étapes se traduit par un algorithme adaptatif utilisant une erreur filtrée ; le filtre appliqué à l’erreur traduit le modèle d’état. La même procédure peut être utilisée pour la boucle de Costas, elle conduit à la boucle de Costas du second ordre :

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{1 - z^{-1}} \right) \mathbb{N}_k^{\text{Im}}$$

avec $\mathbb{N}_k^{\text{Im}} = \text{Im}(y_k^2 e^{-i2\varphi_k})$.

Les performances en poursuite de la boucle de Costas d’ordre un que nous venons de donner ont été obtenues à l’aide des résultats très généraux de [3] ; elles peuvent également être obtenues de manière directe. A titre d’exemple, utilisons maintenant cette approche directe pour l’évaluation des performances de la boucle du second ordre.

Seuls les résultats essentiels sont présentés dans ce paragraphe. L’étude complète des performances de la boucle de Costas du deuxième ordre est donnée en annexe 6.3.1. Nous montrons grâce à une linéarisation que cet estimateur de phase est asymptotiquement non biaisé et nous calculons sa variance asymptotique. Cette variance dépend des pas γ_1 et γ_2 . A dérive ε fixée, la variance est minimale lorsque

γ_2 tend vers zéro ; mais, à γ_2 fixé, il existe une valeur optimale non nulle de γ_1 pour laquelle la variance est minimale. On retrouve le compromis classique entre biais et variance lors du choix de γ_1 . Nous donnons le pas γ_1 optimal lorsque γ_2 tend vers zéro. Cette démarche nous permet de donner l'erreur quadratique moyenne optimale pour notre problème d'estimation. Nous comparons ensuite cette EQM avec la borne ultime associée à ce problème d'estimation.

Notons $\tilde{\varphi}_k = \varphi_k - \xi_k$ et $\tilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k - \varepsilon$, les erreurs sur la phase et sur la dérive. Dans la limite des petites erreurs, le problème peut être linéarisé et nous pouvons évaluer les performance statistiques à l'ordre deux de la boucle. En notant $e_2^k = (E[\tilde{\varphi}_k^2]E[\tilde{\varphi}_e^2]E[\tilde{\varphi}_k\tilde{\varepsilon}_k])^T$, nous montrons que :

$$e_2^k = A_{(\gamma_1, \gamma_2, \Phi)} e_2^{k-1} + B_{\gamma_1, \gamma_2, \Phi, \sigma_n, \sigma_w}$$

La matrice A et le vecteur B sont donnés en annexe. En supposant que la séquence e_2^k converge vers une limite e_2^* , cette limite vérifie :

$$e_2^* = [I - A_{(\gamma_1, \gamma_2, \Phi)}]^{-1} B_{\gamma_1, \gamma_2, \Phi, \sigma_n, \sigma_w}$$

Nous pouvons alors calculer l'EQM $E[\tilde{\varphi}_k^2]$. Cette erreur est minimale pour un certain γ_1 lorsque γ_2 tend vers zéro. L'évaluation de cette limite donne :

$$\lim_{\gamma_2 \rightarrow 0} E[\tilde{\varphi}_k^2]_{\text{Costas}} = \frac{(1 - 2\gamma_1)^2 \sigma_w^2 + \gamma_1^2 (2\sigma_b^2 + \sigma_b^4)}{4(1 - \gamma_1)\gamma_1}$$

La valeur optimale de γ_1 s'écrit :

$$\gamma_{1, \text{Costas}} = \frac{-\sigma_w^2 + \sigma_w \sqrt{\sigma_w^2 + 2\sigma_b^2 + \sigma_b^4}}{2\sigma_b^2 + \sigma_b^4}$$

Les mêmes résultats peuvent être obtenus pour la boucle à remodulation (voir annexe 6.3.2) pour laquelle l'EQM et le pas optimum s'écrivent

$$\lim_{\gamma_2 \rightarrow 0} E[\tilde{\varphi}_k^2]_{\text{DFL}} = \frac{(1 - \gamma_1)^2 \sigma_w^2 + \gamma_1^2 \sigma_b^2}{\gamma_1 (2\phi - \gamma_1)}$$

et

$$\gamma_{1, \text{DFL}} = \frac{-\sigma_w^2 + \sigma_w \sqrt{\sigma_w^2 (1 - 2\phi)^2 + 2\phi^2 \sigma_b^2}}{2\sigma_w^2 (\phi - 1) + \phi \sigma_b^2}$$

Dans ces expressions, $\phi = \Phi(1/\sigma_b)$ et $\Phi(x) = 2 \int_0^x e^{-t^2} / \sqrt{\pi} dt$ désigne la fonction d'erreur erf. Bien que l'expression de l'EQM associée aux pas optimaux soit trop lourde pour être présentée ici, nous pouvons tracer, pour les comparer, les erreurs de la boucle de Costas et de la boucle à remodulation et les confronter aux bornes de Cramér-Rao (cf. paragraphe 2.2.5). Cette comparaison est présentée à la figure 4, page 17. Les bornes séquentielle, non séquentielle et les EQMs sont tracées en fonction de σ_b pour deux valeurs de σ_w . Comme nous pouvions nous y attendre, les performances de la boucle à remodulation sont légèrement supérieures à celle de la boucle de Costas².

Notons que pour $\sigma_w = 0.1$, nous avons utilisé une méthode de Monte-Carlo pour évaluer l'EQM des boucles. Nous avons utilisé 20 réalisations de 5000 points chacune. L'EQM du sinus de l'erreur est calculée en moyennant les échantillons 3000 à 5000, et ensuite en moyennant sur les réalisations. Les résultats sont superposés sur le panneau supérieur de la figure 4 : cercles pour la DFL et '+' pour la boucle de Costas. Cette étude a été menée pour valider les résultats théoriques obtenus par linéarisation des équations. L'accord entre théorie et simulation est très bon.

2.2.4 Filtrage non linéaire optimal

Le problème de l'estimation d'une phase variant selon une dynamique, aux propriétés statistiques connues, observée au travers d'une fonction non linéaire est un problème de filtrage optimal. Bien que la non linéarité sur l'observation rende ce problème insoluble analytiquement, des mises en œuvre pratiques peuvent être obtenues par des linéarisations telles que le filtre de Kalman étendu ou grâce

²Cette supériorité devient plus nette lorsque le nombre d'états de la constellation augmente.

à des méthodes de simulation de type monte carlo telles que le filtrage particulaire ou les méthodes MCMC (Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov).

Nous avons déjà évoqué une solution approchée au problème de l'estimation de la phase d'un signal modulé, cette solution exploite le filtrage de Kalman étendu et correspond à la boucle à verouillage de phase, dispositif dont la renommée n'est plus à faire. Toutefois, la PLL (pour Phase Locked Loop en anglais) n'est pas solution optimale du problème de l'estimation de phase.

Dans ce paragraphe, nous allons développer le filtre optimal pour l'estimation de la phase, et présenter des résultats récents sur une implantation qui utilise la technique du filtrage particulaire.

Le modèle d'observation est toujours :

$$y_k = a_k e^{i\varphi_k} + b_k, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

où la suite $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite i.i.d. de symboles prenant des valeurs discrètes de façon équiprobable. Le bruit d'observation à valeurs complexes est supposé blanc, gaussien circulaire, de puissance σ_b^2 .

L'objectif est d'estimer la phase φ_k . Dans l'approche bayésienne considérée ici, nous devons choisir un modèle d'évolution pour la phase. Pour les raisons évoquées précédemment, nous supposons que la phase est une marche aléatoire avec une dérive linéaire, soit $\varphi_k = \varphi_{k-1} + \varepsilon + w_k$, où la dérive ε est constante mais inconnue, et où le bruit de dynamique w_k est supposé gaussien, centré de variance σ_w^2 et indépendant du bruit d'observation. Dans tout ce qui suit, les variances des bruits seront supposées connues.

Rappels sur le filtrage non linéaire. Le problème du filtrage non linéaire [16] se pose simplement lorsque l'on considère des processus de Markov cachés. Dans une version générale, le problème du filtrage non linéaire consiste à estimer un processus de Markov observé à travers une équation d'observation. Le modèle considéré est

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_k &= f(\boldsymbol{\xi}_{k-1}, \mathbf{w}_k) \\ y_k &= g(\boldsymbol{\xi}_k, b_k) \end{aligned}$$

La première équation appelée équation d'état définit un processus markovien, et la deuxième, appelée équation d'observation, donne la mesure de l'état à travers l'appareil de mesure g . La suite des vecteurs \mathbf{w}_k est une séquence blanche, et le bruit de mesure b_k est blanc également. La théorie de l'estimation indique que toute l'information pour estimer $\boldsymbol{\xi}_k$ est contenue dans la densité³ de probabilité *a posteriori* $p(\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{y}_{1:k})$, où $\mathbf{y}_{1:k} = \{y_1, \dots, y_k\}$. Par exemple, le filtre optimal en moyenne quadratique n'est autre que la moyenne *a posteriori*. Dans le problème considéré, il faut poursuivre la phase, et il faut donc obtenir une version récursive de l'estimation. Etant donnée la nature markovienne de l'état, il est assez facile de montrer que la densité *a posteriori* suit l'équation de récursion

$$p(\boldsymbol{\xi}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{p(y_k | \boldsymbol{\xi}_k) \int p(\boldsymbol{\xi}_k | \boldsymbol{\xi}_{k-1}) p(\boldsymbol{\xi}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\boldsymbol{\xi}_{k-1}}{p(y_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} \quad (11)$$

La connaissance de cette récursion est la solution du filtrage non linéaire optimal. Toutefois, pour obtenir des estimateurs implantables, il faut aller un peu plus loin et calculer par exemple la moyenne conditionnelle. Malheureusement, dès que l'équation d'état et/ou l'équation d'observation sont non linéaires, les calculs d'intégrales pour l'obtention d'estimateurs sont en général impossible analytiquement. Il faut alors avoir recours soit à des approximations (par exemple le filtre de Kalman étendu qui considère le modèle linéarisé), soit à des techniques numériques. Parmi ces techniques, les méthodes Monte-Carlo sont à l'honneur ces dernières années, et conduisent dans le cas du filtrage non linéaire au filtrage particulaire.

Mise en œuvre particulaire. Cette technique est assez ancienne, mais son utilisation intensive n'est possible que grâce à l'explosion des capacités des ordinateurs modernes. Le filtrage particulaire a été redécouvert et/ou étudié par de nombreux auteurs depuis le début des années 90 [9, 15, 11]. Une présentation unifiée est faite dans [11] en utilisant la notion d'échantillonnage d'importance.

³Nous admettons que toutes les mesures de probabilité en jeu ici admettent des densités par rapport à la mesure de Lebesgue.

Echantillonnage d'importance. Comme mentionné précédemment, une fois la densité *a posteriori* $p(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ calculée, elle sert à l'évaluation d'estimateurs de la forme

$$E_p[f(\boldsymbol{\xi}_{0:k})] = \int f(\boldsymbol{\xi}_{0:k})p(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})d\boldsymbol{\xi}_{0:k}$$

L'approche Monte-Carlo pour évaluer cette intégrale consiste à utiliser des réalisations d'une variable aléatoire distribuée suivant la loi *a posteriori* pour calculer des moyennes empiriques. Cette approche est intéressante dès que l'on sait échantillonner selon la loi *a posteriori*. Malheureusement, ceci est rarement le cas, et la technique d'échantillonnage d'importance est un remède intéressant. Cette méthode utilise une autre densité $q(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ dont le support contient celui de $p(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ et suivant laquelle il est facile d'échantillonner. Cette densité est dite densité instrumentale. Enfin, en utilisant l'évidente relation

$$\begin{aligned} E_p[f(\boldsymbol{\xi}_{0:k})] &= \int f(\boldsymbol{\xi}_{0:k})\frac{p(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})}{q(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})}q(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})d\boldsymbol{\xi}_{0:k} \\ &= E_q\left[f(\boldsymbol{\xi}_{0:k})\frac{p(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})}{q(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})}\right] \end{aligned}$$

et N réalisations $\mathbf{x}_{0:k}(i) \sim q(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k}), i = 1, \dots, N$, l'estimateur précédent est approché par la quantité

$$\begin{aligned} \hat{E}_p[f(\boldsymbol{\xi}_{0:k})] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_{0:k}(i))w^*(i) \\ w^*(i) &= \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}(i)|\mathbf{y}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_{0:k}(i)|\mathbf{y}_{1:k})} \end{aligned}$$

où les quantités $w^*(i)$ sont appelées poids d'importance. La loi des grands nombres permet alors de montrer que cette approximation converge presque sûrement vers $E_p[f(\boldsymbol{\xi}_{0:k})]$ quand N tend vers l'infini. Il reste toutefois un problème puisqu'en écrivant

$$w^*(i) = \frac{p(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{x}_{0:k}(i))p(\mathbf{x}_{0:k}(i))}{p(\mathbf{y}_{1:k})q(\mathbf{x}_{0:k}(i)|\mathbf{y}_{1:k})}$$

on s'aperçoit que l'évaluation des poids requiert le calcul de l'intégrale $p(\mathbf{y}_{1:k}) = \int p(\mathbf{y}_{1:k}|\boldsymbol{\xi}_{0:k})p(\boldsymbol{\xi}_{0:k})d\boldsymbol{\xi}_{0:k}$, calcul en général irréalisable. Mais remarquer que

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_{1:k}) &= \int \frac{p(\mathbf{y}_{1:k}|\boldsymbol{\xi}_{0:k})p(\boldsymbol{\xi}_{0:k})}{q(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})}q(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})d\boldsymbol{\xi}_{0:k} \\ &= E_q\left[\frac{p(\mathbf{y}_{1:k}|\boldsymbol{\xi}_{0:k})p(\boldsymbol{\xi}_{0:k})}{q(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})}\right] \end{aligned}$$

permet de montrer que la forme

$$E_p[f(\boldsymbol{\xi}_{0:k})] = \frac{E_q\left[f(\boldsymbol{\xi}_{0:k})\frac{p(\mathbf{y}_{1:k}|\boldsymbol{\xi}_{0:k})p(\boldsymbol{\xi}_{0:k})}{q(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})}\right]}{E_q\left[\frac{p(\mathbf{y}_{1:k}|\boldsymbol{\xi}_{0:k})p(\boldsymbol{\xi}_{0:k})}{q(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})}\right]}$$

est exploitable pour l'approximation. On a en effet

$$\begin{aligned} \hat{E}_p[f(\boldsymbol{\xi}_{0:k})] &= \frac{\sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_{0:k}(i))w(i)}{\sum_{i=1}^N w(i)} \\ w(i) &= \frac{p(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{x}_{0:k}(i))p(\mathbf{x}_{0:k}(i))}{q(\mathbf{x}_{0:k}(i)|\mathbf{y}_{1:k})} \end{aligned}$$

Cette approximation est toutefois biaisée pour un nombre N fini de réalisations, mais converge toujours presque sûrement quand N tend vers l'infini.

Filtre particulière. La suite du développement consiste à rendre récursif l'algorithme d'échantillonnage d'importance. Une condition suffisante pour obtenir une forme récursive est que la loi instrumentale $q(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ factorise en $q(\boldsymbol{\xi}_{0:k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})q(\xi_k|\boldsymbol{\xi}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})$ [11]. Dans ce cas, à l'étape k de l'algorithme, on ne rééchantillonne pas $\mathbf{x}_{0:k}(i)$ suivant tout le passé, mais uniquement suivant $x_k(i) \sim q(\xi_k|\boldsymbol{\xi}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})$, les réalisations devenant $(\mathbf{x}_{0:k-1}(i), x_k(i))$. La terminologie *particulière* vient de là : $x_k(i)$ représente une particule dont la dynamique est gérée par la densité $q(\xi_k|\boldsymbol{\xi}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})$. On montre alors facilement que les poids sont mis à jour récursivement selon

$$\begin{aligned} w_k(i) &= \tilde{w}_{k-1}(i) \frac{p(y_k|\mathbf{x}_k(i))p(\mathbf{x}_k(i)|\mathbf{x}_{k-1}(i))}{q(\mathbf{x}_k(i)|\mathbf{x}_{0:k-1}(i), \mathbf{y}_{1:k})} \\ \tilde{w}_k(i) &= \frac{w_k(i)}{\sum_{j=1}^N w_k(j)} \end{aligned}$$

Il est montré dans [11] que la loi instrumentale $q(\xi_k|\boldsymbol{\xi}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) = p(\xi_k|\xi_{k-1}, y_k)$ minimise la variance des poids, conditionnellement à $\boldsymbol{\xi}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}$. Cette loi est malheureusement rarement calculable, et d'autres lois instrumentales doivent être considérées. La plus simple est la loi *a priori* de l'état $p(\boldsymbol{\xi}_k|\boldsymbol{\xi}_{k-1})$. Le problème de cet instrument est qu'il ne dépend pas de l'observation. Toutefois, quelle que soit la loi choisie, le problème le plus important est la dégénérescence de l'algorithme.

En effet, il peut être constaté (ou montré, voir par exemple [11]), que les poids des particules tendent tous vers 0 quand k tend vers l'infini, sauf pour une particule dont le poids tend vers 1. Cette dégénérescence se comprend bien lorsque la loi instrumentale est la loi *a priori* de l'état $p(\boldsymbol{\xi}_k|\boldsymbol{\xi}_{k-1})$. Dans ce cas, chaque particule diffuse dans l'espace d'état et devient de moins en moins vraisemblable, les poids représentent la vraisemblance de la particule et tendent donc vers 0, sauf une évidemment qui correspond à la particule la plus vraisemblable. Cette dégénérescence est donc due au fait que N est fini.

Pour éviter cette dégénérescence, les particules doivent interagir entre elles d'une façon ou d'une autre. Cette interaction s'effectue en général à l'aide d'une *redistribution* selon la loi discrète définie par les poids. Quand une redistribution est effectuée, les particules les moins vraisemblables meurent, alors que les plus vraisemblables prolifèrent. Le point délicat est de décider d'une redistribution. Nous adoptons un point de vue heuristique. L'ensemble des particules est très efficace si les poids sont tous égaux à $1/N$. Cette efficacité est alors mesurée à l'aide de l'entropie de la loi définie par les poids

$$H_k(\tilde{w}) = - \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k(i) \log_2 \tilde{w}_k(i)$$

L'entropie est maximale ($\log_2 N$ bits) quand l'ensemble de particules est le plus efficace, et est minimale lorsqu'une particule travaille seule. On décide donc de redistribuer lorsque l'entropie chute en dessous d'un seuil prédéfini.

Filtre particulière pour l'estimation de phase. Pour terminer ce paragraphe, on détaille le filtre non linéaire optimal implanté sous forme particulière pour le problème de la poursuite de phase. Rappelons que nous supposons la dérive linéaire inconnue, et qu'il faut donc estimer ce paramètre. Le modèle retenu est donc

$$\begin{aligned} \text{équation d'état} &: \begin{cases} \xi_k &= \xi_{k-1} + \varepsilon_{k-1} + w_k \\ \varepsilon_k &= \varepsilon_{k-1} \end{cases} \\ \text{équation d'observation} &: y_k = a_k e^{i\xi_k} + b_k \end{aligned}$$

où les bruits b_k et w_k sont i.i.d. et indépendants; b_k est un bruit gaussien complexe circulaire, de puissance σ_b^2 ; w_k est gaussien, centré, de variance σ_w^2 .

Les deux paramètres à estimer constituent les deux coordonnées des particules, que l'on notera

$$\mathbf{x}_k(i) = \begin{pmatrix} x_k^1(i) &= \hat{\xi}_k \\ x_k^2(i) &= \hat{\varepsilon}_k \end{pmatrix}$$

Le filtre particulière consiste alors en l'algorithme suivant :

1. initialiser N particules $\mathbf{x}_0(i)$ selon $p(\xi_0, \varepsilon)$; initialiser leurs poids à $\tilde{w}_0(i) = \frac{1}{N}$.
2. pour $k \geq 1$ faire
3. étape de prédiction : bouger les particules selon la loi instrumentale

$$\mathbf{x}_k(i) \sim q(\xi_k | \mathbf{x}_{0:k-1}(i), \mathbf{y}_{1:k}), \forall i = 1, \dots, N$$

et poser $\mathbf{x}_{0:k}(i) = (\mathbf{x}_{0:k-1}(i), \mathbf{x}_k(i))$

4. étape de correction : mise à jour des poids selon

$$w_k(i) = \tilde{w}_{k-1}(i) \frac{p(y_k | \mathbf{x}_k(i)) p(\mathbf{x}_k(i) | \mathbf{x}_{k-1}(i))}{q(\mathbf{x}_k(i) | \mathbf{x}_{0:k-1}(i), \mathbf{y}_{1:k})}, \forall i = 1, \dots, N$$

$$\tilde{w}_k(i) = \frac{w_k(i)}{\sum_{j=1}^N w_k(j)}, \forall i = 1, \dots, N$$

5. Si l'entropie $H_p(k)$ est inférieure à un seuil prédéfini, alors redistribuer suivant la loi définie par les poids $\tilde{w}_k(i)$, et poser $\hat{w}_k(i) = 1/N, \forall i = 1, \dots, N$
6. estimation :

$$\hat{\xi}_k = \hat{E}[\xi_k | \mathbf{y}_{1:k}] = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k(i) x_k^1(i)$$

$$\hat{\varepsilon}_k = \hat{E}[\varepsilon_k | \mathbf{y}_{1:k}] = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k(i) x_k^2(i)$$

Dans toute la suite, la densité instrumentale sera la densité $p(\mathbf{x}_k(i) | \mathbf{x}_{k-1}(i))$ de sorte que le calcul des poids est très simple. Il ne fait en effet intervenir que la vraisemblance qui s'exprime selon

$$p(y_k | \xi_k, \varepsilon_k) = \frac{1}{\pi \sigma_b^2} \exp\left(-\frac{|y_k|^2 + 1}{\sigma_b^2}\right) \cosh\left(-\frac{2}{\sigma_b^2} \operatorname{Re}(y_k e^{-i\xi_k})\right)$$

si l'on suppose que les symboles sont binaires ± 1 avec probabilité $1/2$.

Les remarques suivantes donnent quelques détails utilisés dans l'algorithme précédent.

Remarque 1 : La redistribution est effectuée en utilisant la fonction de répartition associée aux poids $\tilde{w}_k(i)$. Divers raffinements peuvent être proposés comme l'utilisation d'estimateurs à noyaux, l'utilisation d'interpolateur, ...

Remarque 2 : Le paramètre constant ε pose un problème d'estimation. En effet, le modèle choisi pour son estimation est évidemment $\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1}$, ce qui implique que la coordonnée $x_k^2(i)$ des particules reste constante et déterminée par la condition initiale, et que ces particules ne vont pas explorer correctement l'espace pour l'estimation de ε . L'estimation de ε peut donc être particulièrement mauvaise, même pour un grand nombre de particules. Pour remédier à ce problème, on peut par exemple "secouer" la coordonnée $x_k^2(i)$ lors des redistributions en ajoutant une petite perturbation gaussienne ou uniforme de variance faible. Cette stratégie correspond à régulariser à l'aide d'un noyau la loi discrète définie par les poids.

Comparaison avec une boucle à remodulation. Dans ce paragraphe nous présentons des résultats de simulation, et une analyse expérimentale (incomplète) des performances de l'implantation particulière du filtre optimal. Pour situer le filtre particulière parmi l'éventail de techniques de poursuite de phase, nous comparons les résultats à ceux obtenus à l'aide de la boucle à remodulation du second ordre dont nous rappelons les équations

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1} + \gamma_1 \chi_k$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1} + \gamma_2 \chi_k$$

$$\chi_k = \operatorname{Im}(y_k e^{-i(\varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1})}) \operatorname{Sign}\left(\operatorname{Re}(y_k e^{-i(\varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1})})\right)$$

La modulation numérique est binaire, et les paramètres définissant la phase sont $\varepsilon = 0.5$, $\sigma_w = 0.1$. En moyenne, la phase effectue un demi tour en environ 6 échantillons. Ces conditions sont donc assez sévères.

On suppose ici que les variances des bruits sont connues. Cette connaissance est prise en compte dans l'implantation particulière à travers les lois *a priori* de l'état et la vraisemblance. Pour comparer le filtre particulière à une boucle à remodulation, il faut donc que la connaissance des variances des bruits soit également prise en compte par l'algorithme adaptatif. Pour ce faire, nous utilisons les résultats sur la variance asymptotique de la boucle à remodulation (voir annexe 6.3). La boucle est placée dans son état "optimal", à savoir que γ_2 est petit, et γ_1 est celui qui minimise l'EQM asymptotique dans la limite γ_2 nul.

La figure 3 montre les erreurs de phase pour deux puissances différentes du bruit d'observation : colonne de gauche $\sigma_b = 0.3$, et colonne de droite $\sigma_b = 1$. La ligne supérieure correspond à l'erreur pour la boucle à remodulation et la ligne inférieure montre l'erreur pour le filtrage particulière utilisant 400 particules. Pour $\sigma_b = 0.3$, la variance du sinus de l'erreur vaut 0.12 pour les deux estimateurs ; pour $\sigma_b = 1$, la variance du sinus de l'erreur vaut 0.29 pour la boucle à remodulation et 0.25 pour le filtre particulière. Les deux estimateurs sont donc équivalents en terme de puissance de l'erreur commise.

La supériorité du filtre particulière n'est donc pas dans cette variance, mais plutôt dans la vitesse de convergence. On note sur la colonne de gauche de la figure 3 que le filtre particulière converge très rapidement (quelques itérations sont nécessaires pour cette réalisation), alors que la boucle à remodulation utilise une centaine d'itérations pour accrocher la phase (modulo π). Un deuxième avantage très important du filtre particulière réside dans les glissements de cycles. On s'aperçoit que pour $\sigma_b = 1$, la boucle présente de nombreux glissements de cycle, alors que le filtre particulière est beaucoup plus stable.

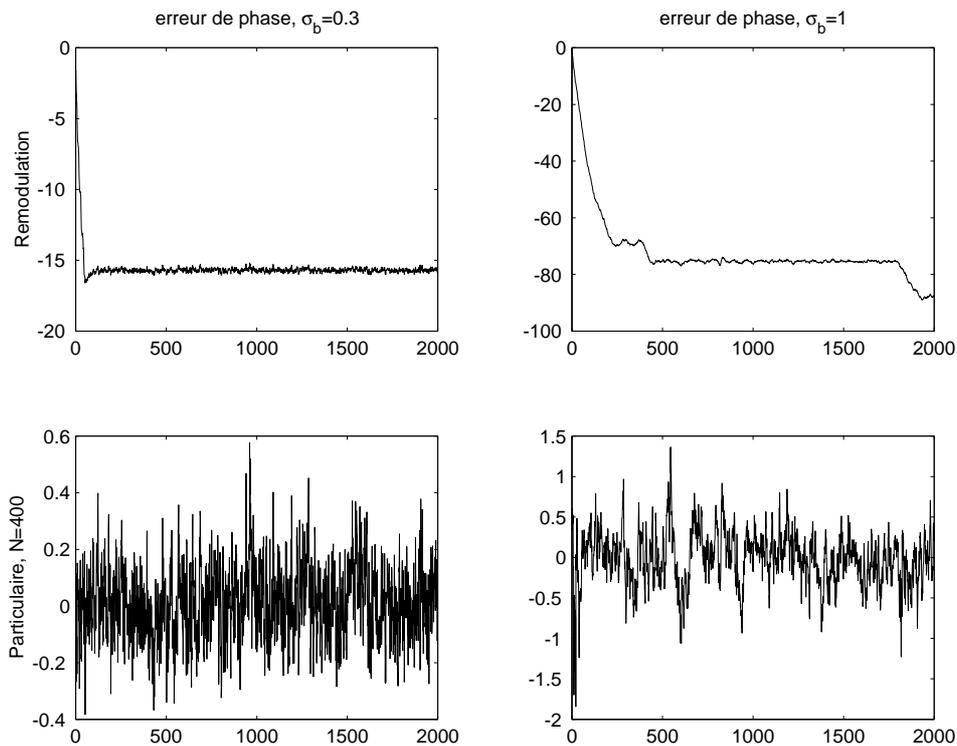


FIG. 3 – Erreurs de phase pour deux valeurs de la puissance du bruit d'observation et pour les deux estimateurs ; ligne supérieure : boucle à remodulation, ligne inférieure : filtre particulière.

2.2.5 Performances ultimes pour l'estimation d'une phase variant de manière quasi linéaire

Le calcul des bornes théoriques données dans cette section est détaillé en annexes 6.1 et 6.2.

Borne non séquentielle (annexe 6.1). Pour un problème d'estimation de paramètre donné, il existe une limite sur la variance d'estimation en dessous de laquelle aucun estimateur ne peut descendre, cette limite est donnée par la borne de Cramér-Rao. Le même genre de borne peut être calculé lorsque le paramètre évolue selon un modèle d'état connu. La nouvelle borne prend en compte cette information *a priori*.

Pour obtenir les performances ultimes correspondant à notre problème de poursuite de phase, nous utilisons l'information de Fisher contenue dans $\ln p(\xi_{0:k}, \mathbf{y}_{0:k})$. L'inverse de cette information fournit la borne sur l'EQM qu'un estimateur de phase peut atteindre [30]. Si $\hat{\xi}_k$ est un estimateur de la phase, nous montrons en annexe 6.1 qu'asymptotiquement :

$$E[(\hat{\xi}_k - \xi_k)^2] \geq \lim_{k \rightarrow \infty} I_k^{kk}$$

où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k^{kk} = -\sigma_w^2 \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \text{ avec } a = -\frac{2\sigma_w^2}{\sigma_b \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma_b^2}} - \frac{2\sigma_w^2}{\sigma_b^2} \Phi\left(\frac{1}{\sigma_b}\right) - 2$$

Ceci nous fournit une borne de référence à laquelle comparer les différents estimateurs.

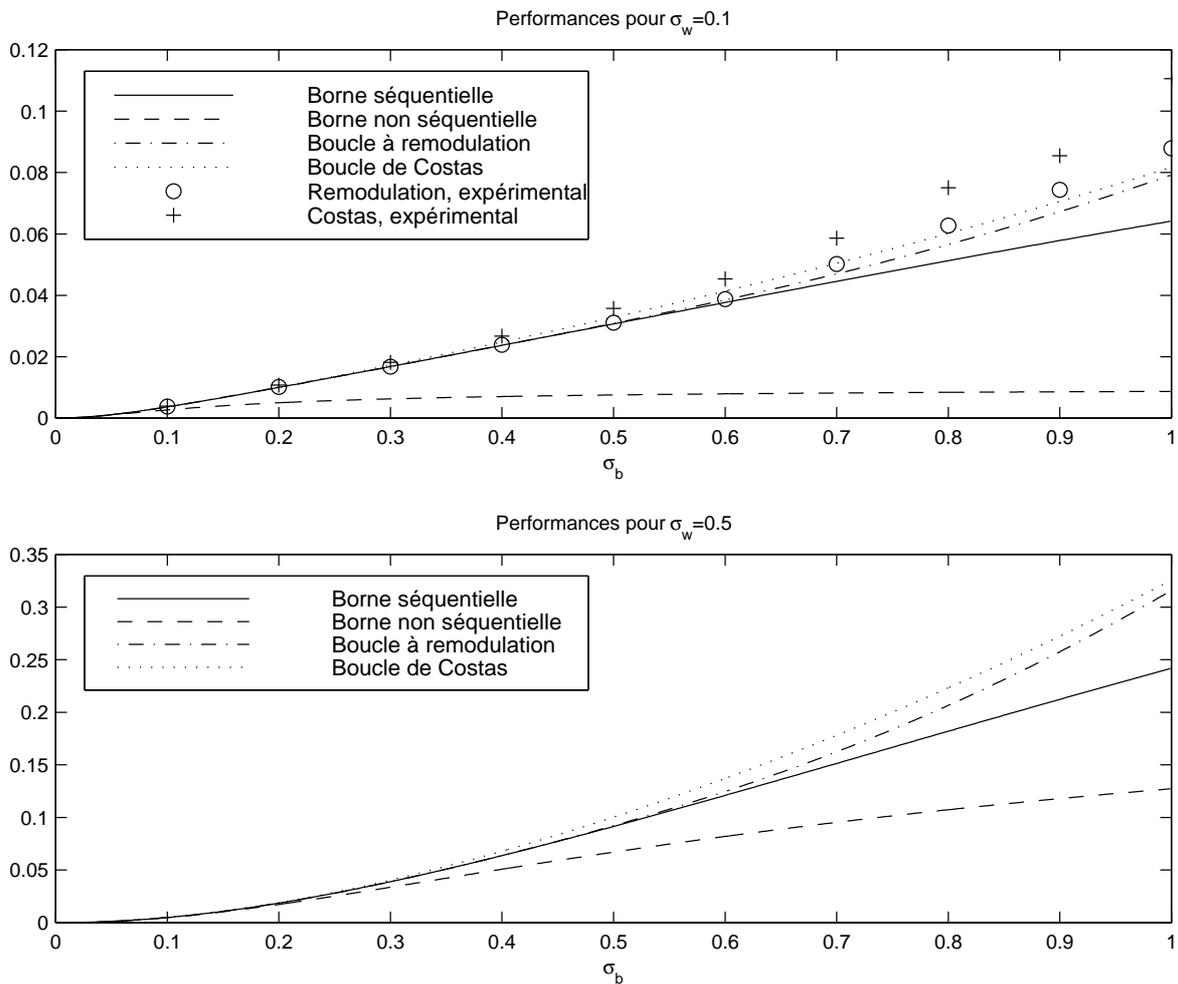


FIG. 4 – Performances asymptotiques de la boucle de Costas (\cdots), de la boucle à remodulation (DFL) ($- -$), et performances ultimes (Cramér-Rao) pour le problème de poursuite de phase considéré dans ce cours ($-$). Les courbes représentent l'erreur quadratique moyenne des estimateurs en fonction de l'écart type du bruit d'observation σ_b , lorsque le pas γ_1 est choisi de manière optimale et lorsque le pas secondaire γ_2 tend vers zero. Les courbes sont tracées pour deux valeurs de l'écart type σ_w du bruit de dynamique (i.e. pour deux vitesses d'évolution du système)

Borne séquentielle (annexe 6.2). Lorsque seuls les échantillons passés sont utilisés pour estimer la valeur courante de la phase, les performances ultimes peuvent également être calculées. Lorsque le rapport signal à bruit est bon, la borne de Cramér-Rao a posteriori s'écrit :

$$C_\infty = \frac{-a\sigma_w^2 + \sqrt{a^2\sigma_w^4 + 4a\sigma_w^2}}{2a} \text{ avec } a = \frac{2}{\sigma_b\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{\sigma_b^2}} + \frac{2}{\sigma_b^2}\Phi\left(\frac{1}{\sigma_b}\right)$$

En résumé, aucun algorithme ne peut faire mieux que la borne non séquentielle qui constitue une référence de performance absolue. Cette borne peut être approchée par des algorithmes de lissage travaillant hors ligne. En pratique, des méthodes de simulation de type MCMC peuvent permettre d'approcher cette borne théorique au prix d'un coût de calcul très élevé.

Si l'on contraint l'estimateur à être séquentiel, les performances chutent considérablement, la limite théorique est alors donnée par la borne séquentielle. Les algorithmes adaptatifs de type Costas ou boucle à remodulation ne peuvent évidemment pas faire mieux que cette borne mais comme le montrent les simulations (voir figure 4), ils s'en approchent d'assez près en régime de poursuite. Le filtrage particulière constitue une solution pratique de référence aussi bien pour la convergence initiale que pour la poursuite.

3 Récupération de rythme

3.1 Position du problème

En pratique, le signal reçu est continu et le traitement discret ; ainsi se pose la question de savoir quelles sont les observations discrètes qui permettent de prendre une décision sans perte d'optimalité ; on parle de la recherche d'une statistique suffisante. Les échantillons prélevés à la cadence symbole en sortie du filtre adapté constituent une statistique suffisante à condition que l'échantillonnage soit synchronisé avec l'émetteur. Le problème de la récupération de rythme consiste à estimer la distribution optimale des instants d'échantillonnage.

La récupération du rythme est nécessaire y compris pour des canaux qui respectent le critère de Nyquist. Lorsque les échantillons de l'émetteur et du récepteur sont décalés d'une valeur constante, un bon dispositif d'égalisation peut permettre la restitution des données émises pour la plupart des décalages possibles. Cependant, certains instants d'échantillonnage dégradent considérablement le rapport signal/bruit et par conséquent la qualité du traitement.

Lorsque le décalage évolue au cours du temps par contre, la récupération du rythme est absolument indispensable. En l'absence de suivi de l'instant d'échantillonnage optimal, des glissements d'un symbole à l'autre se produisent. En pratique, les fréquences des horloges de l'émetteur et du récepteur ne peuvent pas être parfaitement ajustées et la dérive de l'instant d'échantillonnage, comme la dérive de phase, possède une composante linéaire.

L'algorithme de sélection de l'instant d'échantillonnage peut fonctionner de deux manières :

1. Directement au niveau du signal continu (avant ou après le démodulateur complexe). La sélection de l'instant optimum se fait alors en continu.
2. Sur le signal échantillonné. Bien qu'un échantillonnage synchrone au rythme symbole constitue une statistique suffisante pour la détection des symboles transmis, il est essentiel de remarquer que les instants d'échantillonnage ne peuvent pas être estimés numériquement sans échantillonner en accord avec le théorème de Shannon : pratiquement à au moins deux points par symbole lorsque le roll-off ne dépasse pas 100%. L'instant d'échantillonnage étant estimé, plusieurs méthodes permettent ensuite de générer la valeur de l'échantillon correspondant à cet instant. La plus frustrante consiste à sélectionner un échantillon parmi les N échantillons prélevés dans une durée symbole. Cette méthode conduit à une gigue de phase importante et nécessite un facteur de suréchantillonnage important. Pour réduire le facteur de suréchantillonnage et améliorer les performances, il est nettement préférable d'utiliser une interpolation numérique.

3.2 Transmission par paquets

Les données transmises peuvent être structurées à plusieurs niveaux allant d'un simple flot continu de symboles à des organisations plus complexes en trame, supertrame, etc ... Grouper les symboles par paquets présente de nombreux avantages : utilisation de partage de la ressource par multiplexage temporel (TDMA), insertion périodique d'une séquence pilote, algorithmes de traitements simples et/ou plus efficaces, etc ... Dans ce paragraphe, nous présentons quelques idées spécifiques des transmissions par paquets. L'application à un système OFDM avec préfixe cyclique illustrera ces idées.

3.2.1 Synchronisation de trame.

La synchronisation est quasiment toujours décomposée en au moins deux étapes : une première étape destinée à assurer une synchronisation grossière en se calant à l'intérieur d'un symbole donné suivie d'une étape de synchronisation fine à l'intérieur de ce symbole.

En présence d'un pilote. Toutes les normes liées à la couche physique des systèmes numériques de communication prévoient la transmission de pilotes destinés en particulier à permettre ou tout au moins à faciliter la synchronisation du récepteur. Lorsque la transmission est organisée sous forme de trame, il est par exemple possible d'insérer en début de chaque trame une séquence qui possède de bonnes propriétés de corrélation. Cette séquence étant connue du récepteur, celui-ci peut estimer la position de la séquence pilote en effectuant une simple corrélation entre le signal reçu et le pilote (connu). L'emplacement du pic de corrélation indique la position de la trame. Cette phase d'acquisition de la

synchronisation étant achevée, il est alors possible de passer la main à un algorithme de synchronisation fine pour estimer la position à une résolution plus faible que la durée symbole. Quelques algorithmes de ce type sont présentés dans ce qui suit.

Le pilote n'est pas nécessairement inséré dans un slot temporel ; *e.g.* dans un système utilisant le partage d'accès par codage (CDMA), il est possible de dédier un code à la synchronisation. Ce canal pilote peut alors être diffusé en permanence.

En l'absence de pilote. Certains systèmes de transmission, quoique n'utilisant pas de pilote, émettent un flot doté d'une certaine redondance. Les systèmes OFDM avec préfixe cyclique par exemple, transmettent des blocs dont une partie est dupliquée. Ce genre de propriété peut être utilisé par les méthodes de synchronisation. Plus généralement, une certaine redondance est nécessaire pour que l'estimation soit possible : redondance liée à l'excès de bande, au codage ou autre.

3.2.2 Synchronisation fine.

Une fois la synchronisation de trame terminée, il reste à affiner le calage du peigne d'échantillonnage. Souvent cette étape est prise en charge par l'estimateur de canal. Lorsque l'on souhaite sortir cette estimation de l'estimation du canal, plusieurs alternatives sont offertes :

- Si l'instant d'échantillonnage ne dérive pas sur la durée du bloc à traiter, des méthodes blocs d'estimation du retard analogues à celles que nous avons présentées dans le cas de l'estimation de phase, peuvent être calculées.
- Si l'instant d'échantillonnage dérive sur la durée du bloc à traiter, il faut être à même de suivre cette évolution. Cette situation peut se rencontrer pour des blocs de très grande taille. Dans ce cas, l'usage d'algorithmes adaptatifs peut être envisagé ; de tels algorithmes sont présentés dans le paragraphe suivant.

3.3 Transmission en flot continu

Lorsque le signal transmis ne possède aucune structure particulière mais se compose seulement d'une suite de symboles inconnus du récepteur, il est toujours possible d'estimer les paramètres de synchronisation rythme. Le problème consiste alors à estimer le rythme symbole (durée d'un symbole) et la position exacte des symboles (instants de passage d'un symbole au suivant).

3.4 Techniques exploitant la cyclostationnarité

3.4.1 Méthode de la raie spectrale analogique

Rappelons le modèle discret en bande de base liant les données $\{a_k\}$ à la sortie du démodulateur :

$$y(t) = \sum_n a_n p(t - nT) + n(t)$$

$\{a_k\}$ et $n(t)$ étant centrées, $y(t)$ l'est aussi. On note :

$$\sigma^2 = E|n(t)|^2 \text{ et } \sigma_a^2 = E|a_k|^2$$

La suite $\{a_k\}$ étant blanche et décorrélée du bruit, la variance de $y(t)$ s'écrit :

$$E|y(t)|^2 = \sigma_a^2 \sum_{n \in Z} |p(t - nT)|^2 + \sigma^2$$

La variance est une fonction T -périodique, on dit que $y(t)$ est un signal cyclostationnaire à l'ordre deux, c'est-à-dire que ses propriétés statistiques d'ordre deux sont périodiques. Une décomposition en série de Fourier donne :

$$E|y(t)|^2 = \sum_{n \in Z} c_n e^{i2\pi n \frac{t}{T}}$$

avec :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left\{ \sigma^2 + \sigma_a^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |p(t - lT)|^2 \right\} e^{-i2\pi n \frac{t}{T}} dt \\
&= \sigma^2 \delta_n + \frac{\sigma_a^2}{T} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-T/2}^{+T/2} |p(t - lT)|^2 e^{-i2\pi n \frac{t}{T}} dt \\
&= \sigma^2 \delta_n + \frac{\sigma_a^2}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |p(u)|^2 e^{-i2\pi n \frac{u}{T}} du
\end{aligned}$$

d'où finalement :

$$c_n = \frac{\sigma_a^2}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\nu) P^* \left(\nu - \frac{n}{T} \right) d\nu + \sigma^2 \delta_n$$

Pour que la raie spectrale de fréquence $1/T$ existe, le terme c_1 doit être différent de zéro ; il faut donc que le signal présente un excès de bande. Dans les cas concrets, l'excès par rapport à la bande de Nyquist $[-1/(2T), 1/(2T)]$ dépasse rarement 100% (bande $[-1/T, 1/T]$). Dans cette situation, seuls les termes c_0 et $c_1 = c_{-1}^*$ sont non nuls et l'expression de la variance se réduit à :

$$E |y(t)|^2 = c_0 + 2 |c_1| \cos \left[\frac{2\pi t}{T} + \arg(c_1) \right]$$

Un système pratique composé d'une élévation au carré et d'un filtre passe-bande autour de la fréquence $1/T$ permet donc de récupérer un signal synchrone avec l'horloge de l'émetteur. En travaillant sur l'enveloppe complexe du signal reçu, ce système présente l'avantage important d'être indépendant de la phase de la porteuse (utilisation du module carré). Cette première méthode, très intuitive, s'appelle méthode de la raie spectrale. Elle permet de récupérer une sinusoïde de fréquence $1/T$ à partir du signal reçu (qui ne contient pas cette fréquence).

Notons que les méthodes cyclostationnaires peuvent être utilisées à temps discret, la thèse de L.Mazet [20] constitue une bonne référence sur le sujet.

3.5 Récupération de rythme et algorithmes adaptatifs

Pour l'instant nous supposons que l'algorithme peut avoir accès à la valeur du signal $y(t)$ à tout instant t ; pratiquement, cela suppose soit une rétroaction de l'algorithme vers la partie analogique du récepteur (pilotage de l'échantillonneur), soit l'existence d'un interpolateur capable de reconstruire le signal à partir de sa version échantillonnée. Cette précision étant faite, notons $t_k = kT + \tau_k$ le $k^{\text{ième}}$ instant d'échantillonnage.

Nous supposons que le canal respecte le critère de Nyquist, les interférences entre symboles peuvent donc être supprimées en sélectionnant correctement les instants d'échantillonnage ; aucun égaliseur n'est nécessaire dans ce cas. Si le critère de Nyquist n'est pas respecté, les performances des algorithmes que nous présentons se dégradent au fur et à mesure de l'augmentation de l'interférence entre symboles. En fait, les critères d'optimisation choisis deviennent plus ou moins arbitraires et il faut soit envisager d'inclure l'estimation du rythme à celle du canal (si le rythme est constant sur la durée traitée) soit estimer conjointement le rythme et le canal. Nous n'aborderons pas ces cas.

3.5.1 Critère pseudo-EQM

Le critère utilisé ici consiste à choisir l'instant d'échantillonnage qui minimise la puissance de l'erreur entre l'échantillon observé en sortie du canal et l'échantillon émis :

$$J_{\text{EQM}}(\tau) = E |y(kT + \tau) - a_k|^2 \quad (12)$$

Lorsque le canal satisfait le critère de Nyquist, il est clair que ce choix conduit à échantillonner de telle sorte qu'il n'y ait pas d'interférence entre les symboles. Comme dans tous les problèmes de ce type, deux solutions sont possibles :

1. On suppose qu'une séquence d'apprentissage est émise en début de transmission. Durant cette période, les données sont connues du récepteur et le critère peut être utilisé tel quel. Dans un deuxième temps, la vraie donnée a_k est remplacée par une décision \tilde{a}_k construite à partir de la valeur estimée \hat{a}_k de a_k (exemple, $\tilde{a}_k = \text{sgn}(\hat{a}_k)$ en BPSK).
2. Lorsque l'on ne dispose pas de période d'apprentissage, l'algorithme travaille dès le départ à partir de décisions. En notant \tilde{a}_k la valeur décidée de a_k , l'erreur (12) est remplacée par la pseudo-erreur :

$$J_{\text{PseudoEQM}}(\tau) = \text{E} |y(kT + \tau) - \tilde{a}_k|^2$$

L'algorithme du gradient pour minimiser J s'écrit :

$$\tau_{k+1} = \tau_k - \gamma \left. \nabla_{\tau} |y(kT + \tau) - \tilde{a}_k|^2 \right|_{\tau=\tau_k}$$

d'où l'algorithme du gradient stochastique :

$$\tau_{k+1} = \tau_k - \gamma \text{Re} \left\{ [y(t) - \tilde{a}_k]^* \left. \frac{d}{dt} y(t) \right|_{t=kT+\tau_k} \right\}$$

Théoriquement, la dérivée de $y(t)$ en $t_k = kT + \tau_k$ s'obtient à partir de la formule d'interpolation de Shannon ; autrement dit, le développement est non causal et repose sur l'hypothèse de stationnarité. L'expérience prouve qu'une estimation par différence finie (à deux points) s'avère largement suffisante lorsque l'on ne peut pas garantir de conditions suffisamment fortes sur le signal. Cette solution est la seule qui soit utilisée en pratique.

3.5.2 Critère de Godard

Godard a introduit un ensemble de critères permettant aussi bien de concevoir des systèmes d'égalisation aveugle que des systèmes plus variés parmi lesquels les dispositifs de synchronisation. Les critères de Godard s'énoncent de la manière suivante :

$$J_{\text{Godard}}^p(\tau) = \text{E} \left\{ [|y(kT + \tau)|^p - R_p]^2 \right\} \text{ avec } R_p = \frac{\text{E} |a_k|^{2p}}{\text{E} |a_k|^p} \quad (13)$$

Pour le choix le plus courant $p = 2$ et l'algorithme du gradient stochastique s'écrit :

$$\tau_{k+1} = \tau_k - \gamma \left(|y(t)|^2 - R_p \right) \text{Re} \left(y^*(t) \left. \frac{\partial y(t)}{\partial \tau} \right|_{t=kT+\tau_k} \right)$$

La dérivée du signal peut à nouveau être approchée par une simple différence finie.

3.5.3 Critère de Gardner

L'algorithme de Gardner exploite les passages à zéro du signal pour régler l'échantillonnage. Il ne s'applique qu'aux signaux modulés à deux ou quatre états de phase. L'idée de base est la suivante : lorsque les données sont suffisamment aléatoires (ce qui est le cas sous nos hypothèses de suite blanche ou grâce à un embrouilleur) le signal passe par zéro en moyenne une fois par durée symbole. En l'absence d'interférences par exemple, il est clair que l'instant d'échantillonnage optimum se situe exactement entre deux passages à zéro (point qui correspond à l'ouverture maximale de l'oeil) d'où l'algorithme :

$$\tau_{k+1} = \tau_k - \gamma y \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) T \right] \{ y(kT) - y[(k-1)T] \}$$

Grosso modo, la quantité $y(kT) - y[(k-1)T]$ donne le signe de la transition et $y[(k - \frac{1}{2})T]$ son amplitude.

Remarque 3.1 (Courbes en S des algorithmes de synchronisation) *Les performances d'un algorithme de récupération de rythme sont souvent représentées par une courbe caractéristique de la manière dont l'erreur est prise en compte. Dans le cas des algorithmes de récupération de rythme, on parle de courbe en S. Plus généralement, cette courbe correspond au champ moyen de l'ODE.*

Remarque 3.2 (Récupération de rythme et algorithmes multipas) *Comme les boucles à verrouillage de phase, les algorithmes de synchronisation symbole peuvent utiliser un filtrage supplémentaire de l'erreur pour tirer profit d'une information a priori sur la dynamique d'évolution du rythme.*

4 Etude de cas

A titre d'illustration, nous abordons maintenant deux exemples. Ces exemples sont traités à l'aide de deux approches différentes pour illustrer à la fois le côté théorique et le côté pratique :

1. Synchronisation pour les modulations multiporteuses en adoptant une approche optimale du type maximum de vraisemblance. Le résultat obtenu est optimal mais ne peut pas être directement utilisé.
2. Synchronisation pour les signaux étalés par séquence directe en adoptant une approche sous optimale. Les résultats obtenus sont sous optimaux mais directement utilisables.

4.1 Synchronisation pour les modulations multiporteuses

4.1.1 Rappel sur l'OFDM

Les modulations multiporteuses sont devenues pratiquement intéressantes depuis qu'une structure totalement numérique de modulateur a été mise en évidence. Les multiporteuses orthogonales sont utilisées dans l'actuel système ADSL (Asymmetric Digital Subscriber Line) mais aussi pour la diffusion radio/télévision numérique ainsi que dans plusieurs projets de normes futures tel que le système VDSL (Very High Rate DSL) ou la téléphonie de quatrième génération.

L'idée de base consiste à diviser la bande disponible en J sous-bandes et à transmettre dans chacune d'elles à un rythme J fois plus faible que celui qui aurait été utilisé dans la bande totale. Les sous porteuses doivent être les plus proches possibles tout en conservant l'orthogonalité. Un des avantages de cette modulation est de permettre une égalisation très simple dans le domaine fréquentiel. Lorsque les sous porteuses sont régulièrement espacées de f_0 , le signal émis est de la forme :

$$x(t) = \sum_{n=1}^{J-1} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{J-1} c_n e^{i2\pi n f_0 t} \right) \text{ avec } c_n = A_n e^{i\phi_n}$$

Les c_n n'appartiennent pas nécessairement à la même constellation. Ainsi, une allocation intelligente de la puissance (waterfilling) et le choix de la constellation allouée à chaque porteuse permet d'exploiter au mieux la bande disponible. $x(t)$ peut être échantillonné à la fréquence $2Jf_0$ tout en respectant Shannon :

$$\begin{aligned} x_k &= x\left(\frac{k}{2Jf_0}\right) \\ &= 0 + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{J-1} c_n e^{i\frac{2\pi kn}{2J}} \right) + 0 + \frac{1}{2} \sum_{n=J+1}^{2J-1} c_{2J-n}^* e^{i\frac{2\pi kn}{2J}} \end{aligned}$$

Les $2J$ échantillons du symbole OFDM à transmettre peuvent donc être obtenus par FFT (Fast Fourier Transform) inverse du vecteur

$$(0, c_1, \dots, c_{J-1}, 0, c_{J-1}^*, \dots, c_1^*)^T$$

Cette implantation très efficace est l'une des clefs du succès des modulations OFDM.

L'étalement temporel δ introduit par le canal de transmission engendre une interférence entre les symboles. Pour l'éviter, il faut les séparer par un intervalle de garde de durée supérieur à δ . Classiquement, l'intervalle de garde est composé de zéros ou d'un préfixe cyclique construit en recopiant les ν derniers échantillons du symbole DMT juste avant le début du même symbole DMT (cf. figure 5). Cette deuxième méthode, associée à l'élimination de ν d'échantillons en réception permet de représenter le canal par une convolution circulaire et donc d'égaliser dans le domaine fréquentiel. Son seul inconvénient est que les données ne sont détectables que lorsque la fonction de transfert du canal ne possède pas de zéro sur la grille de la transformée de Fourier. Ce qui signifie pratiquement, que les performances sont mauvaises lorsque des zéros se trouvent près de la grille.

Ces rappels étant faits, voyons maintenant comment synchroniser ce signal OFDM.

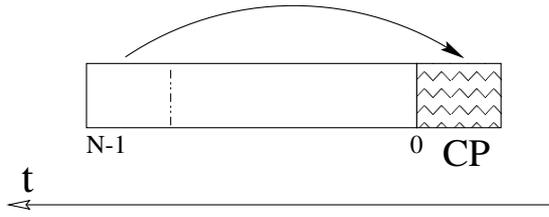


FIG. 5 – Construction du préfixe cyclique

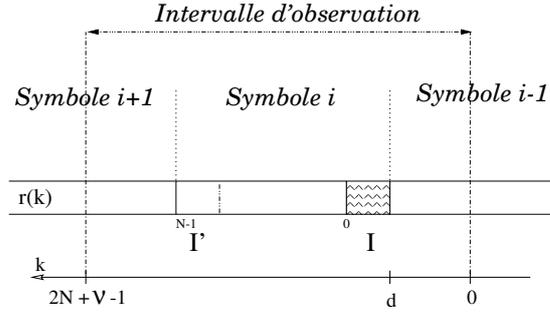


FIG. 6 – La trame DMT avec intervalle de garde.

4.1.2 Solution optimale

Ce paragraphe est inspiré de la thèse de Thierry Lenez. Pour une présentation complète de la synchronisation des systèmes OFDM, le lecteur intéressé pourra se reporter à [18]. L'approche présentée est celle de J.J Van de Beek et al. [29]. On considère la trame DMT représentée par la figure 6. Soit le signal reçu, en temps discret, suivant :

$$r(k) = s(k-d)e^{\frac{j2\pi\varepsilon k}{N}} + b(k)$$

où d et ε représentent respectivement le retard d'arrivée de la trame et la différence normalisée entre les oscillateurs d'émission et de réception (erreur sur la porteuse).

Les symboles OFDM se composent de N échantillons utiles plus ν échantillons pour le préfixe cyclique. Pour que la fenêtre d'observation contienne un symbole complet avec son préfixe cyclique, on considère un vecteur d'observation composé de $2N + \nu$ échantillons (cf. figure 6). Sur cette figure, d désigne le début du symbole et I le préfixe cyclique (copie de l'intervalle I') :

$$\begin{cases} I & \propto \{d, \dots, d + \nu - 1\} \\ I' & \propto \{d + N, \dots, d + N + \nu - 1\} \end{cases}$$

Notons $r = [r(0) \dots r(2N + \nu - 1)]^T$ l'ensemble des $2N + \nu$ premiers échantillons reçus.

On a :

$$\forall k \in I : \mathbb{E}[r(k)r(k+m)^*] = \begin{cases} \sigma_s^2 + \sigma_b^2 & m = 0 \\ \sigma_s^2 e^{-j2\pi\varepsilon m} & m = N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (14)$$

Notons $\Lambda(d, \varepsilon) = \log f(r|d, \varepsilon)$ la log vraisemblance des $2N + \nu$ échantillons observés donnée pour le temps d'arrivée d et le décalage de la fréquence porteuse ε . Dans le cas où la distribution du bruit est gaussienne et circulaire, on montre que la fonction de log vraisemblance s'exprime de la façon suivante :

$$\Lambda(d, \varepsilon) = |\gamma(d)| \cos(2\pi\varepsilon + \arg(\gamma(d))) - \varphi\Phi(d)$$

avec

$$\begin{cases} \gamma(m) & \approx \sum_{k=m}^{k=m+\nu-1} r(k)r^*(k+N) \\ \Phi(m) & \approx \frac{1}{2} \sum_{k=m}^{k=m+\nu-1} |r(k)|^2 + |r(k+N)|^2 \\ \varphi & \approx \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_n^2} = \frac{SNR}{SNR+1} \end{cases}$$

La maximisation au sens du MV est finalement obtenue par :

$$\max_{(d, \varepsilon)} \Lambda(d, \varepsilon) = \max_d \max_{\varepsilon} \Lambda(d, \varepsilon) = \max_d \Lambda(d, \hat{\varepsilon}_{ML}(d))$$

On obtient donc l'estimation des paramètres de synchronisation au sens du maximum de vraisemblance de la façon suivante :

$$\begin{cases} \hat{d}_{ML} & = \arg \max_d (|\gamma(d)| - \varphi\Phi(d)) \\ \hat{\varepsilon}_{ML} & = -\frac{1}{2\pi} \arg(\gamma(\hat{d}_{ML})) \end{cases}$$

En pratique, on cherchera à implanter un algorithme sous optimal de complexité moindre.

4.2 Synchronisation en CDMA

4.2.1 Rappel sur le CDMA

Les systèmes de communication pour la téléphonie mobile ont pour la plupart opté pour le partage de la ressource à répartition par codage (CDMA) afin de gérer l'aspect multi utilisateurs. Parmi les méthodes d'étalement de spectre, le Frequency Hopping⁴ semblait être la technique la plus intéressante au départ, mais sa mise en œuvre difficile a reporté l'intérêt sur l'étalement de spectre par séquence directe (Direct Sequence, DS-CDMA). Cette méthode est utilisée dans l'actuel système de téléphonie mobile IS-95 aux USA et sera utilisée par le système européen UMTS (Universal Mobile Telephone System).

Un signal DS-CDMA est toujours de la forme donnée par l'équation (1) mais l'impulsion de mise en forme $g(t)$ est maintenant convoluée par un code $c(t)$ qui doit posséder de bonnes propriétés d'autocorrélation (proche d'un Dirac)⁵.

Le code est généralement une séquence binaire composée de M chips ; la vitesse des transitions entre chips étant M fois plus élevée que la vitesse des transitions entre les symboles, le spectre est étalé d'un facteur M . Nous noterons $T_c = T/M$ la durée d'un chip.

Dans ce cas, le premier maillon d'un récepteur optimal est constitué du filtre adapté à l'impulsion de mise en forme $g(t)$ et au code $c(t)$. C'est-à-dire, un filtre adapté à la nouvelle impulsion de mise en forme $g'(t) = g(t) \star c(t)$ ⁶

Donnons quelques notions de base sur la synchronisation d'un signal DS-CDMA.

4.2.2 Synchronisation grossière

L'autocorrélation du code étant proche d'une impulsion de Dirac, une simple intercorrélation entre le signal reçu et le code permet de synchroniser approximativement. Lorsque le canal présente des trajets multiples, il reste possible "d'accrocher" le trajet dominant. En pratique, différentes stratégies, comme la vérification sur plusieurs symboles consécutifs de la position du pic, peuvent être adoptées pour s'assurer du bon accrochage.

4.2.3 Synchronisation fine

Les boucles de synchronisation du rythme vues précédemment s'adaptent très simplement aux signaux à spectre étalé. Le signal observé en sortie du filtre adapté à l'ensemble de la chaîne de transmission est toujours de la forme :

$$y(t) = \sum_n a_n p(t - nT) + n(t)$$

et la vraisemblance des observations est proportionnelle à :

$$\exp \left[\sum_k \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Re} (a_k y^*(kT + \tau)) \right]$$

Pratiquement, en remplaçant les données inconnues a_k par une décision sur la sortie du filtre adapté (fonction signe en BPSK), la maximisation de la vraisemblance peut être atteinte à l'aide d'une procédure itérative :

$$\tau_{k+1} = \tau_k - \gamma \operatorname{Sign} [y(t)] \operatorname{Re} \{y(t + \Delta t) - y[t - \Delta t]\} |_{kT + \tau_k}$$

Dans le contexte de l'étalement de spectre par séquence directe, cet algorithme est appelé une boucle à verrouillage de délai (ou boucle early-late) du fait qu'elle utilise la corrélation du signal reçu par le

⁴ou étalement de spectre par évocation de fréquences. Cette technique consiste à changer de porteuse de manière pseudo aléatoire très fréquemment en cours de transmission.

⁵Et des intercorrélations faibles avec les impulsions des autres utilisateurs.

⁶Lorsque le canal est lui-même convolutif et que sa dispersion temporelle est inférieure à la durée du code (ce qui devrait toujours être le cas dans la philosophie CDMA ...), il faut ajouter le filtre adapté au canal de transmission. Si la réponse impulsionnelle du canal se compose de trajets multiples, *i.e.* si elle est de la forme $h(\tau) = \sum_{n=0}^N \alpha_n \delta(\tau - \tau_n)$. Le filtre adapté peut être implanté de manière à tirer profit de cette particularité. On commence alors à réaliser une corrélation par l'impulsion de mise en forme $g(t)$. Ensuite, la corrélation par $h(t)$ peut être réalisée en corrélant le signal obtenu par des versions décalées de τ_n du code puis en sommant les sorties des corrélateurs pondérées par les amplitudes complexes α_n^* . Cette mise en œuvre du corrélateur porte le nom de récepteur en rateau, ou Rake.

code pour trois valeurs du retard ($-\Delta t$, 0 et $+\Delta t$). La valeur Δt est le plus souvent réglée à la moitié de la durée du chip⁷.

Même si les algorithmes s'écrivent formellement de la même façon pour des signaux avec ou sans étalement, il existe tout de même quelques différences de comportement liées aux propriétés des codes utilisés.

Pour certains codes (*e.g.* les séquences binaires de longueur maximale), la fonction de corrélation est constante, et proche de zéro, pour toutes les valeurs du retard, sauf celles comprises entre $-T_c$ et $+T_c$ (voisinage du pic de corrélation). Ainsi, pour qu'une boucle early-late fonctionne, il est nécessaire qu'elle soit initialisée dans cette plage, d'où la nécessité de décomposer la synchronisation en une phase grossière consistant à se caler à un chip près (acquisition) et une phase fine durant laquelle un algorithme affine l'estimation du retard puis suit ses éventuelles variations. Si, au cours de son fonctionnement, la boucle sort de cette plage d'accrochage, le verrouillage est perdu : d'où la nécessité pratique de surveiller son fonctionnement pour décider, le cas échéant, d'une réacquisition, c'est-à-dire du déclenchement d'une nouvelle procédure d'acquisition. Notons qu'en pratique, la plage de recherche pourra tout de même être plus réduite que pour la première acquisition, mais que, fondamentalement, la démarche reste la même⁸.

D'autres remèdes à ce problème de perte d'accrochage peuvent être envisagés :

Corrélateurs étendus La construction d'une mesure de l'erreur non nulle sur une plage plus large est possible en combinant plus de deux sorties du filtre adapté au code, c'est l'idée des corrélateurs étendus. Naturellement, cette extension de la plage d'accrochage se traduit aussi par une augmentation du bruit dans la boucle.

Une estimation optimale... Il est important de noter que l'apparition de ces problèmes ne surgit que lorsque les méthodes de résolution utilisées sont sous optimales. Dans une approche du type filtrage non linéaire, il n'y a pas de raison de distinguer acquisition et poursuite. Cette remarque est déjà apparue lors de la comparaison des boucles de phase (Costas et remodulation) et du filtrage particulière dans laquelle il était clair que la force principale du filtre particulière réside dans sa capacité à traiter, sans les distinguer, les phases d'acquisition et de poursuite. Le gain était très clair lorsque la séparation de ces deux phases étaient la plus critique : la convergence initiale et les glissements de cycle... Notons toutefois qu'aucune méthode aveugle ne peut estimer le décalage absolu lorsque les signaux utilisés sont stationnaires (ou cyclostationnaires) sans redondance. Dans ce cas, le décalage ne peut être estimé que modulo la période symbole.

5 Conclusion

Ce document a présenté quelques algorithmes essentiels pour la synchronisation de porteuse et la synchronisation de rythme. Les performances complètes des estimateurs adaptatifs de phase ont été calculées dans des cas réalistes. La borne ultime associée au problème d'estimation d'une phase évoluant selon un modèle brownien avec dérive a également été calculée ; il est donc possible de situer tout estimateur par rapport à cette référence. En pratique, les schémas de modulation étant très variés : CDMA, multiporteuses, Ultra Wide Band, monoporteuse ... il nous a également semblé intéressant de présenter, sans les détailler, deux exemples : l'un consacré à la synchronisation des systèmes à étalement de spectre par séquence directe, l'autre à la synchronisation des multiporteuses. Cette ouverture montre que les algorithmes généraux présentés dans le cadre des monoporteuses peuvent être adaptés sans grandes difficultés à d'autres schémas de modulation.

Il est néanmoins clair que ce document ne constitue qu'une courte introduction à ces problèmes. De nombreux points ont été passés sous silence, parmi ceux-ci, nous pouvons citer les questions suivantes :

- Comment associer efficacement les dispositifs de synchronisation avec les traitements liés aux interférences entre symboles ?
- Comment synchroniser un système multi utilisateurs ?

⁷Notez que cet algorithme est de la forme de l'algorithme de Gardner.

⁸Le pendant de cette perte d'accrochage pour les boucles de phase classiques est le phénomène de glissement de cycle (saut d'un bassin d'attraction de la fonction de coût à un autre). Les glissements de cycles sont gênants mais ne conduisent pas à une perte de synchronisation de longue durée. *A contrario*, la perte d'accrochage pour une boucle early-late la place dans un état dans laquelle elle peut rester très longtemps ... Ceci peut être interprété en constatant que les différents minima de la fonction de coût d'une boucle early-late sont séparés par des zones plates dans lesquelles la boucle est, en moyenne, bloquée.

- Comment synchroniser un récepteur doté d'un réseau d'antennes ?
- etc ...

Pour aller plus loin, le lecteur intéressé pourra consulter les articles et ouvrages cités en références.

6 Annexes

6.1 Borne de Cramér-Rao *a posteriori* hors ligne

Nous devons calculer la matrice de Fisher :

$$I(\xi_{0:k}, \mathbf{y}_{0:k}) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\xi_{0:k}, \mathbf{y}_{0:k})}{\partial \xi_{0:k} \partial \xi_{0:k}} \right]$$

Nous avons seulement besoin de l'information de Fisher contenue dans $p(\mathbf{y}_{1:k}|\xi_{0:k})$ et $p(\xi_{0:k})$. On a :

$$\begin{aligned} \log p(\mathbf{y}_{1:k}|\xi_{0:k}) &= \log \prod_{i=1}^k p(y_i|\xi_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \log p(y_i|\xi_i) \end{aligned}$$

La log vraisemblance s'écrit en fonction de ξ_i de la manière suivante :

$$\log p(y_i|\xi_i) = \text{cte} + \log \left[\cosh \left(\frac{2}{\sigma_b^2} \text{Re}(y_i e^{-i\xi_i}) \right) \right]$$

Ainsi, la vraisemblance à l'instant i est indépendante des instants passés ou futurs ; d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(\mathbf{y}_{1:k}|\xi_{0:k})}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial \ln p(y_i|\xi_i)}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial^2 \ln p(\xi_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k})}{\partial \xi_i \partial \xi_j} &= \frac{\partial^2 \ln p(y_i|\xi_i)}{\partial \xi_i^2} \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln p(y_i|\xi_i)}{\partial \xi_i^2} &= -\frac{2}{\sigma_b^2} \text{Re}(y_i e^{-i\xi_i}) \tanh \left(\frac{2}{\sigma_b^2} \text{Re}(y_i e^{-i\xi_i}) \right) \\ &+ \frac{4}{\sigma_b^2} \text{Im}^2(y_i e^{-i\xi_i}) \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{2}{\sigma_b^2} \text{Re}(y_i e^{-i\xi_i}) \right) \right] \end{aligned}$$

En supposant que le rapport signal sur bruit est bon, la tangente hyperbolique peut être approchée par la fonction signe. Dans ce cas, nous avons approximativement :

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\partial^2 \ln p(y_i|\xi_i)}{\partial \xi_i^2} \right] &= -E \left[\frac{2}{\sigma_b^2} \text{Re}(y_i e^{-i\xi_i}) \text{Sign}(\text{Re}(y_i e^{-i\xi_i})) \right] \\ &= -\frac{2}{\sigma_b^2} E[(a_i + X) \text{Sign}(a_i + X)] \end{aligned}$$

où $X = \text{Re}(n_i \exp(-i\xi_i))$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\sigma_b^2/2$ (le bruit d'observation étant supposé circulaire). Ainsi, en notant $\Phi(x) = 2 \int_0^x e^{-t^2}/\sqrt{\pi} dt$ la fonction d'erreur erf, nous obtenons finalement :

$$-E \left[\frac{\partial^2 \ln p(y_i|\xi_i)}{\partial \xi_i^2} \right] = \frac{2}{\sigma_b \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma_b^2}} + \frac{2}{\sigma_b^2} \Phi\left(\frac{1}{\sigma_b}\right)$$

Intéressons nous maintenant à l'information de Fisher contenue dans $p(\xi_{0:k})$. En exploitant le caractère markovien de l'état $\xi_k = \xi_{k-1} + \varepsilon + w_k$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(\xi_{0:k})}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial \ln p(\xi_{i+1}|\xi_i)}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \ln p(\xi_i|\xi_{i-1})}{\partial \xi_i} \\ &= \frac{\xi_{i+1} - \xi_i - \varepsilon}{\sigma_w^2} - \frac{\xi_i - \xi_{i-1} - \varepsilon}{\sigma_w^2} \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi l'information de Fisher contenue dans la connaissance *a priori* :

$$\begin{aligned} -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\xi_{0:k})}{\partial \xi_i^2} \right] &= \frac{2}{\sigma_w^2} \\ -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\xi_{0:k})}{\partial \xi_{i+1} \partial \xi_i} \right] &= -\frac{1}{\sigma_w^2} \\ -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\xi_{0:k})}{\partial \xi_{i-1} \partial \xi_i} \right] &= -\frac{1}{\sigma_w^2} \end{aligned}$$

et zéro sinon.

L'information de Fisher contenue dans $p(\mathbf{y}_{1:k}, \xi_{0:k})$ se résume à la matrice tridiagonale symétrique suivante :

$$I_k = \begin{pmatrix} f(\sigma_b, \sigma_w) & -\frac{1}{\sigma_w^2} & 0 & \cdots & & & 0 \\ -\frac{1}{\sigma_w^2} & f(\sigma_b, \sigma_w) & -\frac{1}{\sigma_w^2} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{\sigma_w^2} & f(\sigma_b, \sigma_w) & -\frac{1}{\sigma_w^2} & & & \\ & \ddots & -\frac{1}{\sigma_w^2} & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\sigma_w^2} & 0 \\ \vdots & & & & -\frac{1}{\sigma_w^2} & f(\sigma_b, \sigma_w) & -\frac{1}{\sigma_w^2} \\ 0 & \cdots & & & 0 & -\frac{1}{\sigma_w^2} & f(\sigma_b, \sigma_w) \end{pmatrix}$$

avec

$$f(\sigma_b, \sigma_w) = \frac{2}{\sigma_b \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma_b^2}} + \frac{2}{\sigma_b^2} \Phi\left(\frac{1}{\sigma_b}\right) + \frac{2}{\sigma_w^2}$$

Cette matrice est de la forme :

$$I_k = b \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & a \end{pmatrix} = b J_k$$

et il est facile de montrer que le déterminant d_k de J_k vérifie $d_k = a d_{k-1} - d_{k-2}$ avec $d_0 = 1, d_1 = a$. Soit I_k^{ii} le i ème élément de la diagonale de l'inverse de I_k , on a :

$$\begin{aligned} I_k^{ii} &= \frac{\text{Det} I_{i-1} \times \text{Det} I_{k-i}}{\text{Det} I_k} \\ &= b^{-1} \frac{d_{i-1} d_{k-i}}{d_k} \end{aligned}$$

En particulier :

$$I_k^{kk} = b^{-1} \frac{d_{k-1}}{d_k}$$

Posons $u_k = d_{k-1}/d_k$. A partir de l'équation de récurrence vérifiée par d_k , nous trouvons pour u_k

$$u_k = \frac{1}{a - u_{k-1}}$$

Si cette suite converge, sa limite u vérifie l'équation du point fixe $u^2 - au + 1 = 0$, dont les solutions sont :

$$u_{\pm} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{f(\sigma_b, \sigma_w)}{-1/\sigma_w^2} \\
&= -\sigma_w^2 f(\sigma_b, \sigma_w) \\
&= -\frac{2\sigma_w^2}{\sigma_b\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma_b^2}} - \frac{2\sigma_w^2}{\sigma_b^2} \Phi\left(\frac{1}{\sigma_b}\right) - 2
\end{aligned}$$

qui est clairement une quantité négative inférieure à -2 . u_+ est un point fixe stable tandis que u_- est instable. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\lim I_k^{kk} &= -\sigma_w^2 \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \\
a &= -\frac{2\sigma_w^2}{\sigma_b\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma_b^2}} - \frac{2\sigma_w^2}{\sigma_b^2} \Phi\left(\frac{1}{\sigma_b}\right) - 2
\end{aligned}$$

6.2 Borne de Cramér-Rao *a posteriori* séquentielle

En utilisant les résultats de [27], nous pouvons calculer la borne de Cramér-Rao *a posteriori*. Le modèle considéré est le suivant :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k &= \varepsilon_{k-1} \\
\xi_k &= \xi_{k-1} + \varepsilon_{k-1} + w_k \\
y_k &= a_k e^{i\xi_k} + n_k
\end{aligned}$$

Posons $p_n = p(\xi_{n+1}|\xi_n, \varepsilon_n)p(y_{n+1}|\xi_{n+1})$, $H_n^{11} = E\left[-\frac{\partial^2 \log p_n}{\partial \xi_n^2}\right]$, $H_n^{12} = E\left[-\frac{\partial^2 \log p_n}{\partial \xi_n \partial \varepsilon_n}\right]$, $H_n^{13} = E\left[-\frac{\partial^2 \log p_n}{\partial \xi_n \partial \xi_{n+1}}\right]$, $H_n^{22} = E\left[-\frac{\partial^2 \log p_n}{\partial \varepsilon_n^2}\right]$, $H_n^{23} = E\left[-\frac{\partial^2 \log p_n}{\partial \varepsilon_n \partial \xi_{n+1}}\right]$ et $H_n^{33} = E\left[-\frac{\partial^2 \log p_n}{\partial \xi_{n+1}^2}\right]$. Partitionons la matrice d'information de Fisher de $(\xi_n \varepsilon_n)$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} J_n^{11} & J_n^{12} \\ J_n^{21} & J_n^{22} \end{pmatrix}$$

Alors, il est montré dans [27] que

$$\begin{aligned}
J_{n+1}^{11} &= H_n^{33} - \frac{(H_n^{13})^2}{J_n^{11} + H_n^{11}} \\
J_{n+1}^{12} &= H_n^{23} - \frac{H_n^{13}(J_n^{12} + H_n^{12})}{J_n^{11} + H_n^{11}} \\
J_{n+1}^{22} &= J_n^{22} + H_n^{22} - \frac{(J_n^{12} + H_n^{12})^2}{J_n^{11} + H_n^{11}}
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant

$$p(y_{n+1}|\xi_{n+1}) = \frac{1}{\pi\sigma_b^2} \exp\left(-\frac{|y_{n+1}|^2 + 1}{\sigma_b^2}\right) \cosh\left(-\frac{2}{\sigma_b^2} \operatorname{Re}(y_{n+1} e^{-i\xi_{n+1}})\right)$$

et

$$p(\xi_{n+1}|\xi_n, \varepsilon_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{(\xi_{n+1} - \xi_n - \varepsilon_n)^2}{2\sigma_w^2}\right)$$

Ainsi $H_n^{11} = \frac{1}{\sigma_w^2}$, $H_n^{12} = \frac{1}{\sigma_w^2}$, $H_n^{13} = -\frac{1}{\sigma_w^2}$, $H_n^{22} = \frac{1}{\sigma_w^2}$, $H_n^{23} = -\frac{1}{\sigma_w^2}$ et

$$\begin{aligned}
H_n^{33} &= \frac{1}{\sigma_b^2} + E\left[\frac{2}{\sigma_b^2} \operatorname{Re}(y_i e^{-i\xi_i}) \tanh\left(\frac{2}{\sigma_b^2} \operatorname{Re}(y_i e^{-i\xi_i})\right)\right] \\
&\quad - E\left[\frac{4}{\sigma_b^2} \operatorname{Im}^2(y_i e^{-i\xi_i}) \left[1 - \tanh^2\left(\frac{2}{\sigma_b^2} \operatorname{Re}(y_i e^{-i\xi_i})\right)\right]\right]
\end{aligned}$$

Soit a tel que $H_n^{33} = \frac{1}{\sigma_w^2} + a$. En supposant que la suite J_{n+1}^{11} converge, nous obtenons pour sa limite J_∞ l'équation du point fixe suivante :

$$J_\infty = \frac{1}{\sigma_w^2} + a - \frac{1}{\sigma_w^4 (J_\infty + 1/\sigma_w^2)}$$

ou de façon équivalente $J_\infty^2 - aJ_\infty - a/\sigma_w^2 = 0$ dont les solutions sont :

$$J_\infty = \frac{a \pm \sqrt{a(a + 4/\sigma_w^2)}}{2}$$

De plus, $J_\infty^{12} = -1/\sigma_w^2$ et J_∞^{22} diverge. Ceci est lié au fait que la vraisemblance ne voit pas ε_n . Ainsi, il suffit de supposer que le paramètre ε_n est connu. Sous cette hypothèse, l'information de Fisher J_n obtenue est la même que J_n^{11} . L'information de Fisher satisfait l'équation récurrente :

$$J_{n+1} = \frac{(a + 1/\sigma_w^2)J_n + a/\sigma_w^2}{J_n + 1/\sigma_w^2}$$

d'où la borne de Cramér-Rao C_n

$$C_{n+1} = \frac{\sigma_w^2 + C_n}{(a\sigma_w^2 + 1) + aC_n}$$

En supposant la convergence de cette suite, la borne asymptotique est donnée par la condition du point fixe, on trouve :

$$C_\infty = \frac{-a\sigma_w^2 + \sqrt{a^2\sigma_w^4 + 4a\sigma_w^2}}{2a}$$

En supposant maintenant que le rapport signal sur bruit est bon, la tangente hyperbolique peut être approchée par la fonction signe. Dans ce cas, nous avons approximativement :

$$\begin{aligned} a &= E \left[\frac{2}{\sigma_b^2} \text{Re}(y_i e^{-i\xi_i}) \text{Sign}(\text{Re}(y_i e^{-i\xi_i})) \right] \\ &= -\frac{2}{\sigma_b^2} E[(a_i + X) \text{Sign}(a_i + X)] \end{aligned}$$

où $X = \text{Re}(n_i \exp(-i\xi_i))$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\sigma_b^2/2$ (le bruit d'observation est supposé circulaire). En notant $\Phi(x) = 2 \int_0^x e^{-t^2} / \sqrt{\pi} dt$ la fonction d'erreur, nous obtenons finalement :

$$a = \frac{2}{\sigma_b \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma_b^2}} + \frac{2}{\sigma_b^2} \Phi\left(\frac{1}{\sigma_b}\right)$$

6.3 Performances des boucles de Costas et DFL

Pour le modèle :

$$\xi_k = \xi_{k-1} + \varepsilon + w_k \quad (15)$$

$$y_k = a_k e^{i\xi_k} + n_k \quad (16)$$

les boucles du second ordre s'écrivent :

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1} + \gamma_1 \chi_k \quad (17)$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1} + \gamma_2 \chi_k \quad (18)$$

avec

$$\chi_k = \text{Im}(y_k^2 e^{-2i(\varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1})}) \text{ pour la boucle de Costas}$$

$$\chi_k = \text{Im}(y_k e^{-i(\varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1})}) \text{Sign}(\text{Re}(y_k e^{-i(\varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1})})) \text{ pour la boucle à remodulation}$$

Posons $\tilde{\varphi}_k = \varphi_k - \xi_k$, l'erreur sur la phase et $\tilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k - \varepsilon$ l'erreur sur la pente, ainsi :

$$\tilde{\varphi}_k = \tilde{\varphi}_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_{k-1} - w_k + \gamma_1 \chi_k \quad (19)$$

$$\tilde{\varepsilon}_k = \tilde{\varepsilon}_{k-1} + \gamma_2 \chi_k \quad (20)$$

6.3.1 Boucle de Costas

Posons $\alpha_k = \tilde{\varphi}_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_{k-1} - w_k$. Pour la boucle de Costas, nous avons :

$$\chi_k = -\sin(2\alpha_k) + 2a_k \operatorname{Im}(n_k e^{i(\xi_{k-1} + \varepsilon + w_k - 2\varphi_{k-1} - 2\varepsilon_{k-1})}) + \operatorname{Im}(n_k^2 e^{-2i(\varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1})})$$

Analyse de la moyenne

n_k étant un bruit gaussien circulaire, il satisfait $E[n_k^2] = 0$, d'où :

$$E[\chi_k] = -E[\sin(2\alpha_k)]$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} E[\tilde{\varphi}_k] \\ E[\tilde{\varepsilon}_k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\gamma_1 & 1 - 2\gamma_1 \\ -2\gamma_2 & 1 - 2\gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E[\tilde{\varphi}_{k-1}] \\ E[\tilde{\varepsilon}_{k-1}] \end{pmatrix}$$

Lorsque les pas sont suffisamment petits (les valeurs propres de la matrice sont intérieures au cercle unité), cette équation prouve la convergence moyenne (du système linéarisé).

Analyse de l'erreur quadratique

Nous avons besoin des quantités $E[\tilde{\varphi}_k^2]$, $E[\tilde{\varepsilon}_k^2]$, $E[\tilde{\varphi}_k \tilde{\varepsilon}_k]$. Les calculs font apparaître le terme :

$$\begin{aligned} E[\chi_k^2] &= E[\sin(2\alpha_k)^2] + 4E[\alpha_k^2] E[\operatorname{Im}^2(n_k e^{i(\xi_{k-1} + \varepsilon + w_k - 2\varphi_{k-1} - 2\varepsilon_{k-1})})] \\ &\quad + E[\operatorname{Im}^2(n_k^2 e^{-2i(\varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1})})] \\ &\approx 4E[\alpha_k^2] + 2\sigma_b^2 + \sigma_b^4 \end{aligned}$$

Le terme

$$\begin{aligned} E[\alpha_k \chi_k] &= -E[\alpha_k \sin(2\alpha_k)] \\ &\approx -2E[\alpha_k^2] \\ &= -2E[(\tilde{\varphi}_{k-1})^2] - 2E[(\tilde{\varepsilon}_{k-1})^2] - 4E[\tilde{\varphi}_{k-1} \tilde{\varepsilon}_{k-1}] - 2\sigma_w^2 \end{aligned}$$

De la même manière :

$$\begin{aligned} E[\tilde{\varepsilon}_{k-1} \chi_k] &= -E[\tilde{\varepsilon}_{k-1} \sin(2\alpha_k)] \\ &\approx -2E[\tilde{\varphi}_{k-1} \tilde{\varepsilon}_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_{k-1}^2] \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} E[\tilde{\varphi}_k^2] &= E[\alpha_k^2] + 2\gamma_1 E[\alpha_k \chi_k] + \gamma_1^2 E[\chi_k^2] \\ E[\tilde{\varepsilon}_k^2] &= E[\tilde{\varepsilon}_{k-1}^2] + 2\gamma_2 E[\tilde{\varepsilon}_{k-1} \chi_k] + \gamma_2^2 E[\chi_k^2] \\ E[\tilde{\varphi}_k \tilde{\varepsilon}_k] &= E[\tilde{\varphi}_{k-1} \tilde{\varepsilon}_{k-1}] + E[\tilde{\varepsilon}_{k-1}^2] + \gamma_1 E[\tilde{\varepsilon}_{k-1} \chi_k] + \gamma_2 E[\alpha_k \chi_k] + \gamma_1 \gamma_2 E[\chi_k^2] \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} E[\tilde{\varphi}_k^2] \\ E[\tilde{\varepsilon}_k^2] \\ E[\tilde{\varphi}_k \tilde{\varepsilon}_k] \end{pmatrix} = \\ &+ \begin{pmatrix} (1 - 2\gamma_1)^2 & (1 - 2\gamma_1)^2 & 2(1 - 2\gamma_1)^2 \\ 4\gamma_2^2 & (1 - 2\gamma_2)^2 & 8\gamma_2^2 - 4\gamma_2 \\ -2\gamma_2 + 4\gamma_1\gamma_2 & (1 - 2\gamma_1)(1 - 2\gamma_2) & (1 - 2\gamma_1)(1 - 4\gamma_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E[\tilde{\varphi}_{k-1}^2] \\ E[\tilde{\varepsilon}_{k-1}^2] \\ E[\tilde{\varphi}_{k-1} \tilde{\varepsilon}_{k-1}] \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} (1 - \gamma_1)^2 \sigma_w^2 + \gamma_1^2 (2\sigma_b^2 + \sigma_b^4) \\ \gamma_2^2 (\sigma_w^2 + 2\sigma_b^2 + \sigma_b^4) \\ \gamma_1 \gamma_2 (2\sigma_b^2 + \sigma_b^4) + (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_2) \sigma_w^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.3.2 DFL

Posons $\alpha_k = \tilde{\varphi}_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_{k-1} - w_k$. Nous avons alors pour la boucle à remodulation :

$$\begin{aligned}\chi_k &= \left(-a_k \sin(\alpha_k) + \text{Im}(n_k e^{i(\varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1})}) \right) \text{Sign} \left(-a_k \cos(\alpha_k) + \text{Re}(n_k e^{i(\varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1})}) \right) \\ \alpha_k &= \tilde{\varphi}_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_{k-1} - w_k\end{aligned}$$

Analyse de la moyenne

Nous avons :

$$\begin{aligned}E[\chi_k] &= -E \left[\sin(\alpha_k) \Phi \left(\frac{\cos(\alpha_k)}{\sigma_b} \right) \right] \\ &\approx -\Phi \left(\frac{1}{\sigma_b} \right) (E[\tilde{\varepsilon}_{k-1}] + E[\tilde{\varphi}_{k-1}])\end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, posons $\Phi = \Phi \left(\frac{1}{\sigma_b} \right)$. Il vient alors :

$$\begin{pmatrix} E[\tilde{\varphi}_k] \\ E[\tilde{\varepsilon}_k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \Phi\gamma_1 & 1 - \Phi\gamma_1 \\ -\Phi\gamma_2 & 1 - \Phi\gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E[\tilde{\varphi}_{k-1}] \\ E[\tilde{\varepsilon}_{k-1}] \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (2 - \Phi\gamma_1 - \Phi\gamma_2)\lambda + 1 - \Phi\gamma_1$$

Les valeurs propres sont donc réelles si $(2 - \Phi\gamma_1 - \Phi\gamma_2)^2 - 4(1 - \Phi\gamma_1) \geq 0$ ou $\Phi^2(\gamma_1 + \gamma_2)^2 - 4\Phi\gamma_2 \geq 0$. Les pas γ sont supposés positifs. Les valeurs propres sont donc réelles pour $\gamma_1 \geq -\gamma_2 + 2\sqrt{\gamma_2/\Phi}$.

Analyse de l'erreur quadratique Nous avons besoin de $E[\tilde{\varphi}_k^2]$, $E[\tilde{\varepsilon}_k^2]$, $E[\tilde{\varphi}_k \tilde{\varepsilon}_k]$. Les calculs font intervenir le terme :

$$\begin{aligned}E[\chi_k^2] &= E \left[\left(-a_k \sin(\alpha_k) + \text{Im}(n_k e^{i(\varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1})}) \right)^2 \right] \\ &= E [\sin(\alpha_k)^2] + \frac{\sigma_b^2}{2} \\ &\approx E [(\tilde{\varphi}_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_{k-1} - w_k)^2] + \frac{\sigma_b^2}{2}\end{aligned}$$

le terme

$$\begin{aligned}E[\alpha_k \chi_k] &= -E \left[\alpha_k \sin(\alpha_k) \Phi \left(\frac{\cos(\alpha_k)}{\sigma_b} \right) \right] \\ &\approx -E [(\tilde{\varphi}_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_{k-1} - w_k)^2] \Phi\end{aligned}$$

Nous avons de la même manière :

$$\begin{aligned}E[\tilde{\varepsilon}_{k-1} \chi_k] &= E \left[\tilde{\varepsilon}_{k-1} \sin(\alpha_k) \Phi \left(\frac{\cos(\alpha_k)}{\sigma_b} \right) \right] \\ &\approx E [(\tilde{\varphi}_{k-1} \tilde{\varepsilon}_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_{k-1}^2)] \Phi\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}E[\tilde{\varphi}_k^2] &= E [(\tilde{\varphi}_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_{k-1} - w_k)^2] + 2\gamma_1 E [(\tilde{\varphi}_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_{k-1} - w_k) \chi_k] + \gamma_1^2 E[\chi_k^2] \\ E[\tilde{\varepsilon}_k^2] &= E[\tilde{\varepsilon}_{k-1}^2] + 2\gamma_2 E[\tilde{\varepsilon}_{k-1} \chi_k] + \gamma_2^2 E[\chi_k^2] \\ E[\tilde{\varphi}_k \tilde{\varepsilon}_k] &= E[\tilde{\varphi}_{k-1} \tilde{\varepsilon}_{k-1}] + E[\tilde{\varepsilon}_{k-1}^2] + \gamma_1 E[\tilde{\varepsilon}_{k-1} \chi_k] + \gamma_2 E[\alpha_k \chi_k] + \gamma_1 \gamma_2 E[\chi_k^2]\end{aligned}$$

Notons que :

$$E [(\tilde{\varphi}_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_{k-1} - w_k)^2] = E [(\tilde{\varphi}_{k-1})^2] + E [(\tilde{\varepsilon}_{k-1})^2] + 2E [\tilde{\varphi}_{k-1} \tilde{\varepsilon}_{k-1}] + \sigma_w^2$$

Nous obtenons finalement :

$$\begin{pmatrix} E[\tilde{\varphi}_k^2] \\ E[\tilde{\varepsilon}_k^2] \\ E[\tilde{\varphi}_k \tilde{\varepsilon}_k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\Phi\gamma_1 + \gamma_1^2 & 1 - 2\Phi\gamma_1 + \gamma_1^2 & 2(1 - 2\Phi\gamma_1 + \gamma_1^2) \\ \gamma_2^2 & 1 - 2\Phi\gamma_2 + \gamma_2^2 & 2\gamma_2^2 - 2\gamma_2\Phi \\ -\gamma_2\Phi + \gamma_1\gamma_2 & 1 - (\gamma_1 + \gamma_2)\Phi + \gamma_1\gamma_2 & 1 - (\gamma_1 + 2\gamma_2)\Phi + 2\gamma_1\gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E[\tilde{\varphi}_{k-1}^2] \\ E[\tilde{\varepsilon}_{k-1}^2] \\ E[\tilde{\varphi}_{k-1} \tilde{\varepsilon}_{k-1}] \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} (1 - \gamma_1)^2 \sigma_w^2 + \gamma_1^2 \sigma_b^2 / 2 \\ \gamma_2^2 (\sigma_w^2 + \sigma_b^2 / 2) \\ \gamma_1 \gamma_2 \sigma_b^2 / 2 + (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_2 \Phi) \sigma_w^2 \end{pmatrix}$$

Références

- [1] A. BENVENISTE, Introduction à la méthode de l'ODE pour les algorithmes récursif, Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du signal. *Editions du C.N.R.S.*, vol. 1, Paris.
- [2] A. BENVENISTE, M. JOINDOT, P. VANDAMME, Analyse théorique des boucles de phase numériques en présence de canaux dispersifs, *Note technique NT/MER/TSF/1, CNET Lannion B.*, janvier 1980.
- [3] A. BENVENISTE, M. MÉTIVIER, P. PRIOURET, Algorithmes adaptatifs et approximations stochastiques, théorie et applications, *Masson*, 1987.
- [4] A. BLANCHARD, Technique des boucles 'asservissement de phase, *Cours de l'Ecole supérieur d'électricité*, Paris, 1975.
- [5] J.M. BROSSIER, Signal et communication numérique : égalisation et synchronisation, *Editions Hermes*, 1997.
- [6] CHUI, CHEN, Kalman Filtering with Real Time Applications, *Springer Verlag*, Berlin 1987.
- [7] R.E. CROCHÈRE, L.R. RABINER, Interpolation and decimation of digital signals - A tutorial review, *IEEE Proc.*, vol. 69, n. 3, march 1981.
- [8] R.E. CROCHÈRE & L.R. RABINER, Multirate Digital Signal Processing, *Prentice Hall*, 1983.
- [9] P. DEL MORAL, J.C. NOYER, G. RIGAL, AND G. SALUT. Résolution particulière et traitement non-linéaire du signal : Applications radar/sonar, *Traitement du Signal*, 12(4) :287–301, 1995.
- [10] N. AL-DHAHIR, J.M. CIOFFI, Optimum finite-length equalization for multicarrier transceivers, *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 44, n. 1, pp. 56-64, jan. 1996.
- [11] A. DOUCET. Algorithmes Monte-Carlo pour l'estimatiopn bayésienne de modèles markoviens cachés. Application au traitement de signaux de rayonnements. *PhD thesis, Université d'Orsay*, 1997.
- [12] F.M. GARDNER, Phaselock Techniques, *Wiley*, 1968.
- [13] M. GIRARD, Boucles à verrouillage de phase, *Ediscience*, 1993.
- [14] A. GLAVIEUX, M. JOINDOT, Communications numériques. Introduction, *Masson*, 1996.
- [15] N.J. GORDON, D.J. SALMOND, AND A.F.M. SMITH. Novel approach to nonlinear/nonGaussian Bayesian state estimation. *IEE-proceedings F*, 140(2) :107–113, 1993.
- [16] A.H. JAZWINSKI Stochastic processes and filtering theory. *Academic Press*, 1970.
- [17] M. KUNT, Traitement numérique des signaux, *Presses Polytechniques Romandes*.
- [18] T. LENEZ, Egalisation et synchronisation en communication numérique. Application au modem VDSL, *Thèse de l'INPG*, 2001.
- [19] R.W. LUCKY, J. SALZ, E.J. WELDON, Principle of Data Communication, *Mc Graw Hill*, 1968.
- [20] L. MAZET, Egalisation en milieu non-coopératif, *Thèse de doctorat, Université de Marne la Vallée*, 2000.
- [21] H. MEYR, M. MOENECLAEY, S.A. FECHTEL, Digital Communications Receivers : Synchronization, Channel Estimation and Signal Processing, *John Wiley & Sons*, 1998.
- [22] H. MEYR, G ASCHIED, Synchronization in digital communications - Volume 1, *John Wiley & Sons*, 1989.
- [23] L.B. OLSSON, DMT synchronization using frequency domain information, *Telia Research document*, june 1997.
- [24] B. PICINBONO, Signaux aléatoires, *Dunod*, 3 tomes, 1993.
- [25] T. POLLET, M. PEETERS, The advantages of a Data Aided Multi Carrier Based Timing Synchronization, T1E1.4/97-052, Minneapolis, 22-26 September 1997.
- [26] T. POLLET, M. PEETERS, Synchronization with DMT Modulation, *IEEE Communications Magazine*, April 1999.
- [27] P. TICHAVSKY, C.H. MURAVCHIK, AND A. NEHORAI. Posterior Cramér-Rao bounds for discrete time nonlinear filtering. *IEEE Trans. on SP*, 46(5) :1386–1396, 1998.

- [28] P.P VAIDYANATHAN, Multirate systems and filter banks, *Prentice Hall*, ed. 1993.
- [29] J.J. VAN DE BEEK, M. SANDELL, P.O. BORJESSON, ML estimation of Time and Frequency Offset in OFDM systems, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, n. 7, July 1997, pp. 1800-1805.
- [30] H. L. VAN TREES, Detection, Estimation and Modulation theory : Part I, *John Wiley & Sons*, ed. 1968.
- [31] A.J. VITERBI, Principles of Coherent Communication, *McGraw Hill*, 1966.
- [32] A.J. VITERBI, J.K. OMURA, Principles of Digital Communication and Coding, *McGraw Hill*, 1979.