

Résonance Stochastique

un aperçu

Pierre-Olivier Amblard

Groupe Non Linéaire



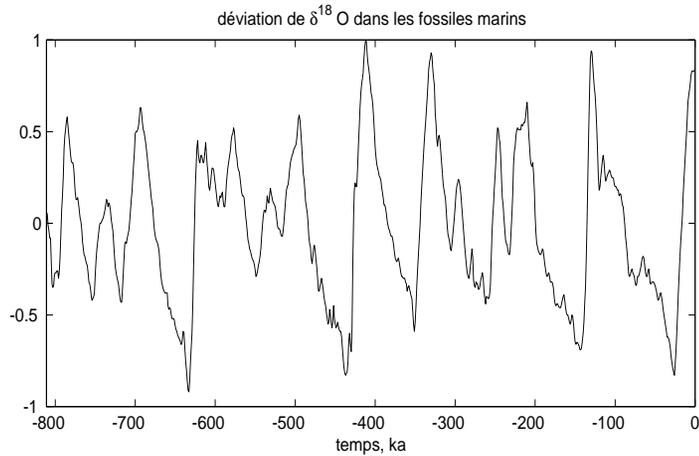
Laboratoire
des Images
&
des Signaux

A.G. GdR ISIS, mai 2001

RÉSONANCE STOCHASTIQUE, UN APERÇU

1. (a) Du bruit dans le climat
 - (b) Du bruit dans les neurones
 - (c) Un exemple synthétique
2. Un peu de zoologie des modèles et mesures
3. Franchissement de seuil induit par le bruit (FSIB) :
“dithering” pour la quantification.
4. Détection de signaux faibles

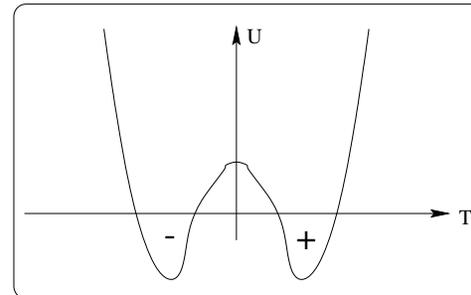
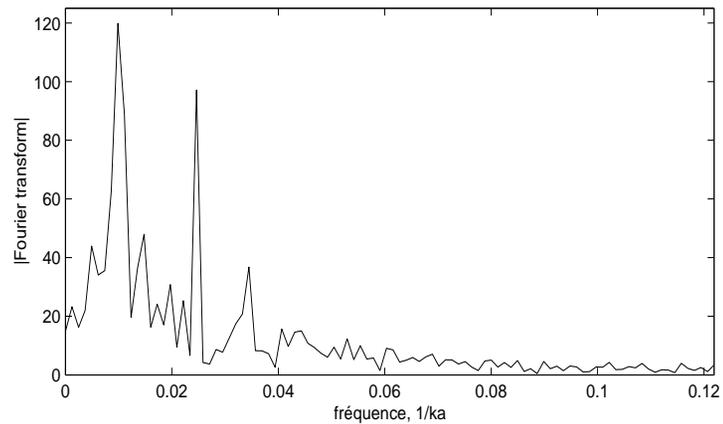
PÉRIODICITÉ DES GLACIATIONS



Modèle de Benzi (1981)

$$C \frac{dT}{dt} = R_{in} - R_{out}$$

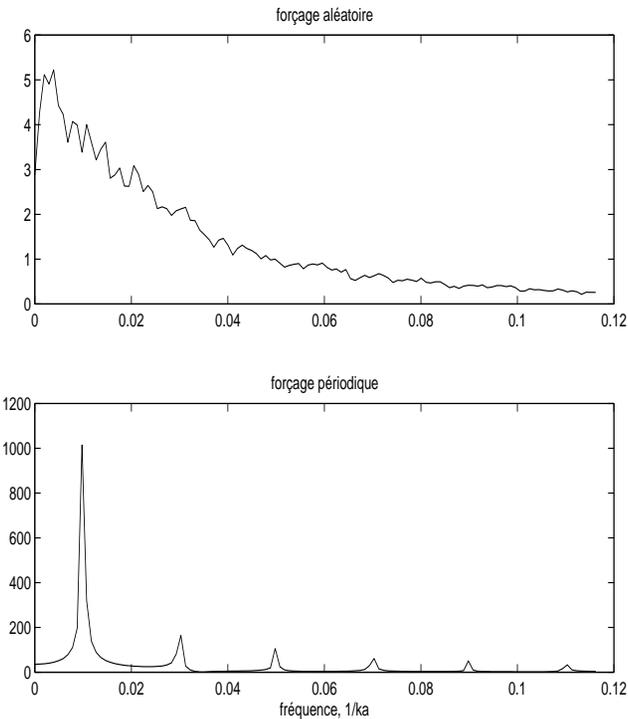
$$= -\nabla_T U(T)$$



Comment basculer + \longleftrightarrow -

Deux idées pour aider le système

1. forçage aléatoire
(fluctuations “internes”)
naissance de la périodicité?
2. forçage périodique
(force externe, excentricité)
*variation de l'excentricité :
0.1 %, insuffisant!*



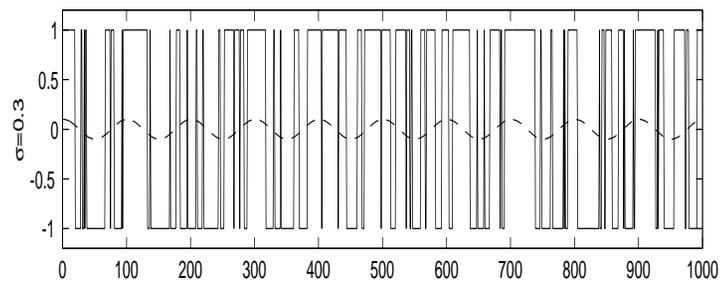
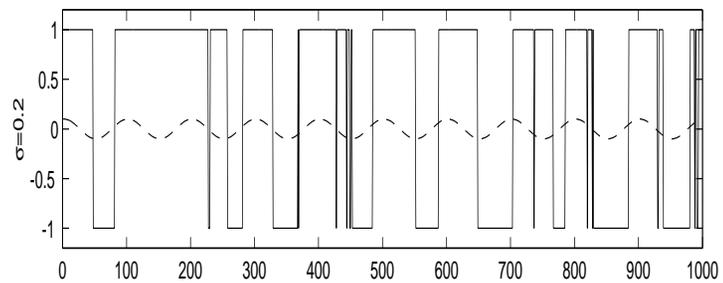
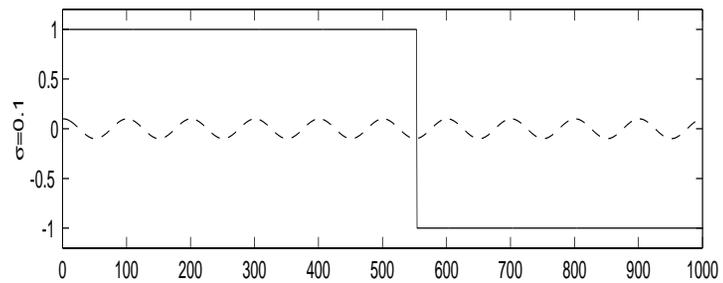
idée de R. Benzi *et. al.*, C. Nicolis

forçage conjoint : aléatoire + périodique

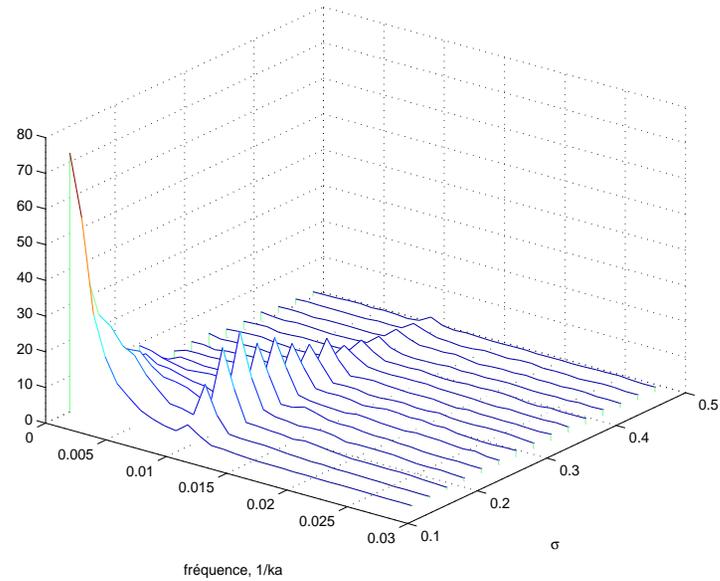
$$C\dot{T} = -\nabla U + \varepsilon \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_0) + \sigma b(t)$$

$$\nu_0 = 0.01 \text{ ka}^{-1}, \varepsilon = 0.1$$

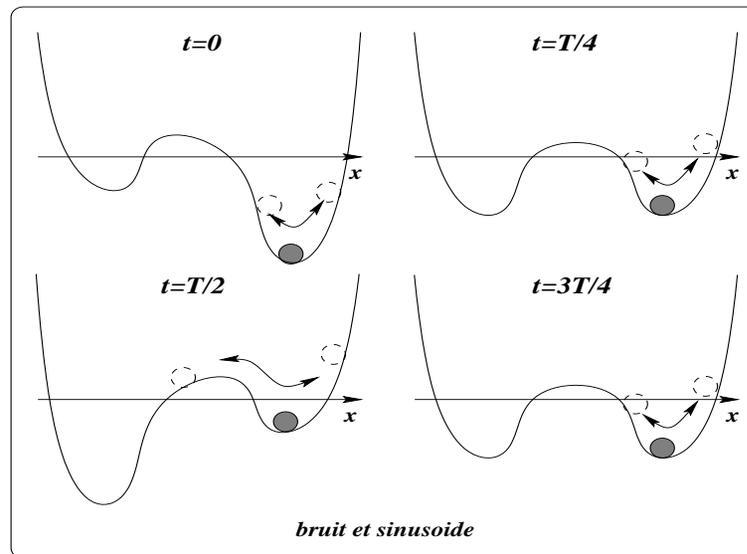
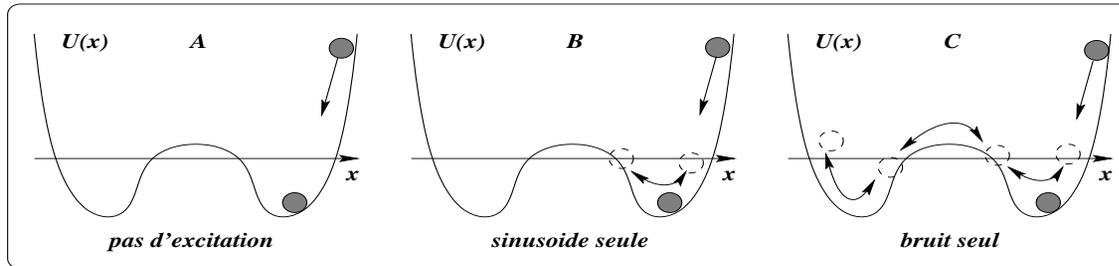
signaux entrée et sortie seuillée



densités spectrales en fonction de l'écart type du bruit d'entrée



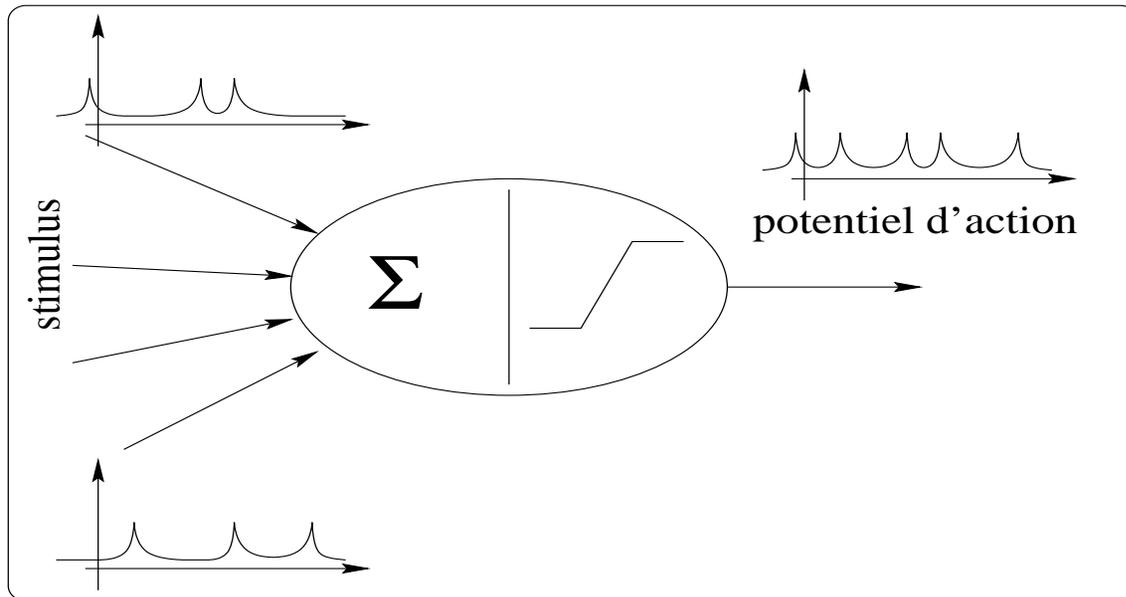
$$C\dot{T} = -\nabla U + \varepsilon \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_0) + \sigma b(t)$$



coopération sinusoïde-bruit : “résonance stochastique”

→ RS : scénario valable pour expliquer la périodicité du climat

RÉSONANCE STOCHASTIQUE CHEZ LES NEURONES



- délivrance d'une impulsion si la sommation de l'entrée dépasse un seuil.
- codage de l'information dans les trains de potentiels d'action.
- observation d'une synchronisation des trains d'impulsions avec un stimulus périodique.

Le bruit peut-il permettre aux neurones de réagir à un stimulus très faible?

Diverses expériences sur des systèmes neuronaux du vivant :

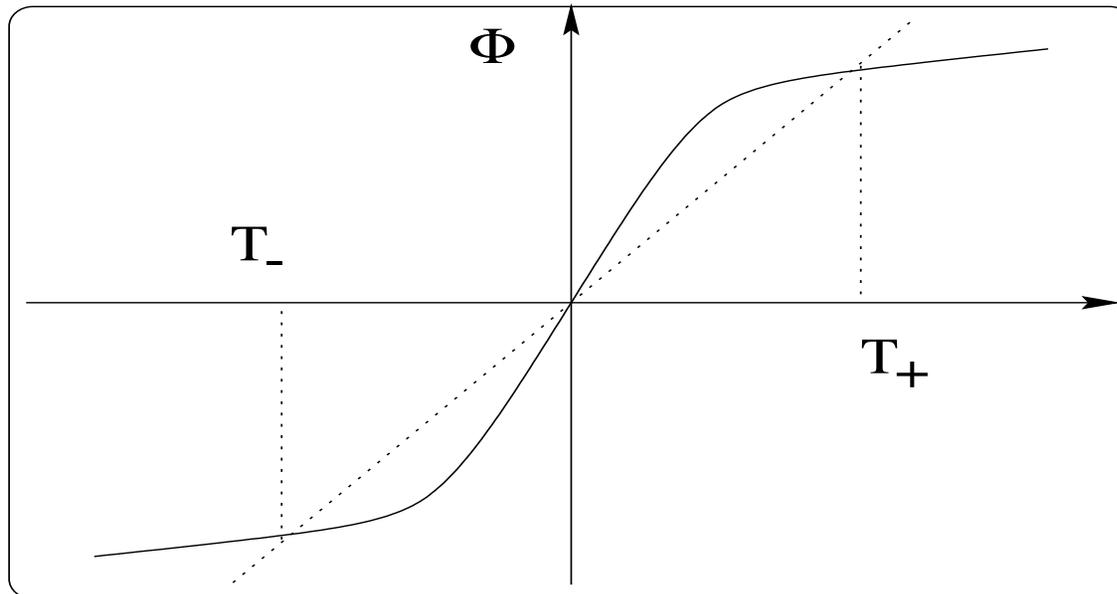
1. Cellules mécanoréceptrices des écrevisses
2. Cellules du système sensoriel du criquet
3. Cellules “CA 1 hippocampales” dans le cerveau du rat
4. ...

A chaque fois, évidences pour la résonance stochastique.

→ voyons chez le criquet ...

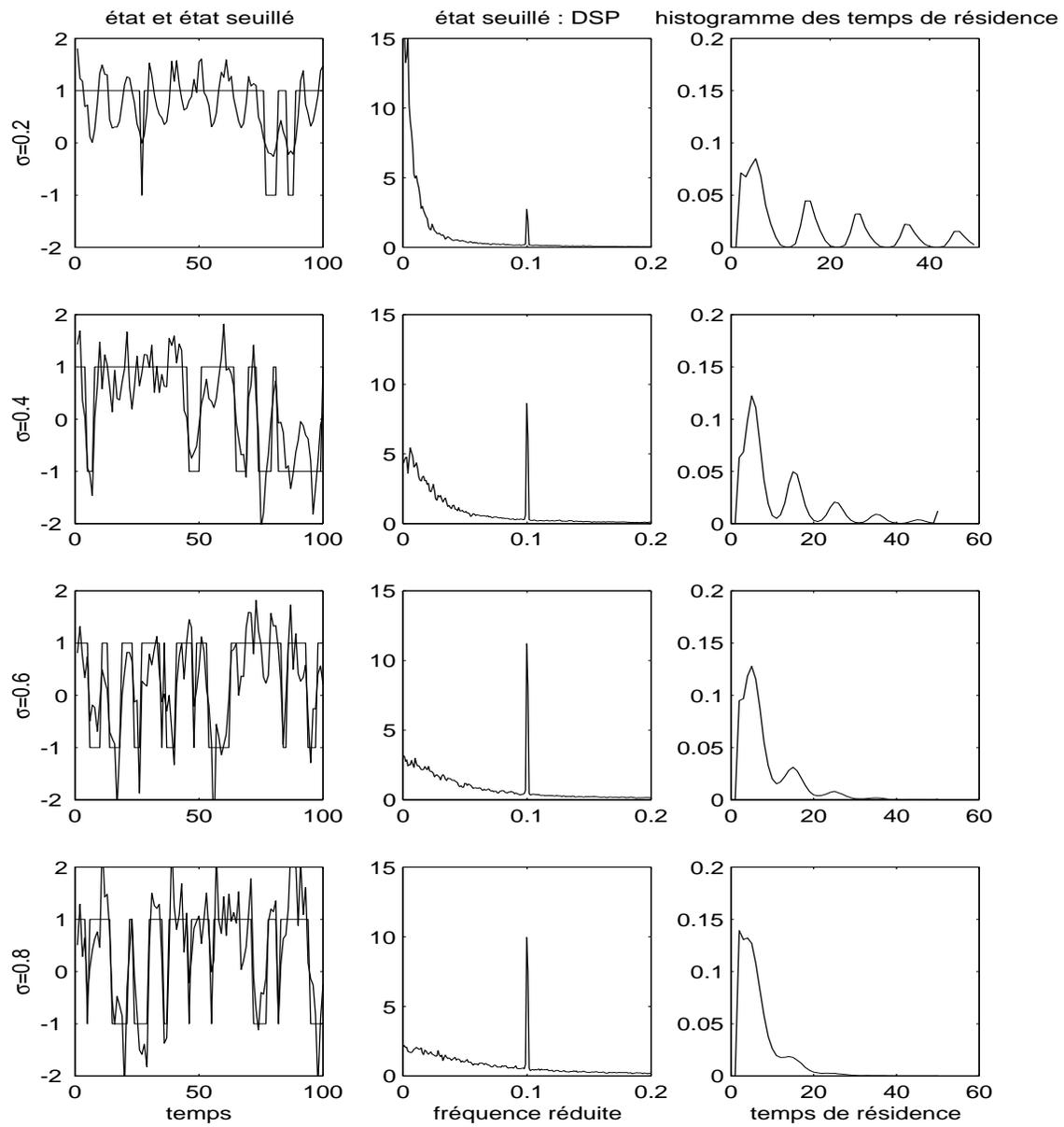
UN EXEMPLE SYNTHÉTIQUE À TEMPS DISCRET

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) + \varepsilon \cos(2\pi\lambda_0 n + \varphi_0) + \sigma b_n$$



Fonction itérée à deux points fixes stables

Comportement à temps discret équivalent au modèle à temps continu?



$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= \Phi(x_n) + \varepsilon \cos(2\pi\lambda_0 n + \varphi_0) + \sigma b_n \\ y_n &= \text{Sign}(x_n) \end{aligned} \right\} \text{cyclostationnaires}$$

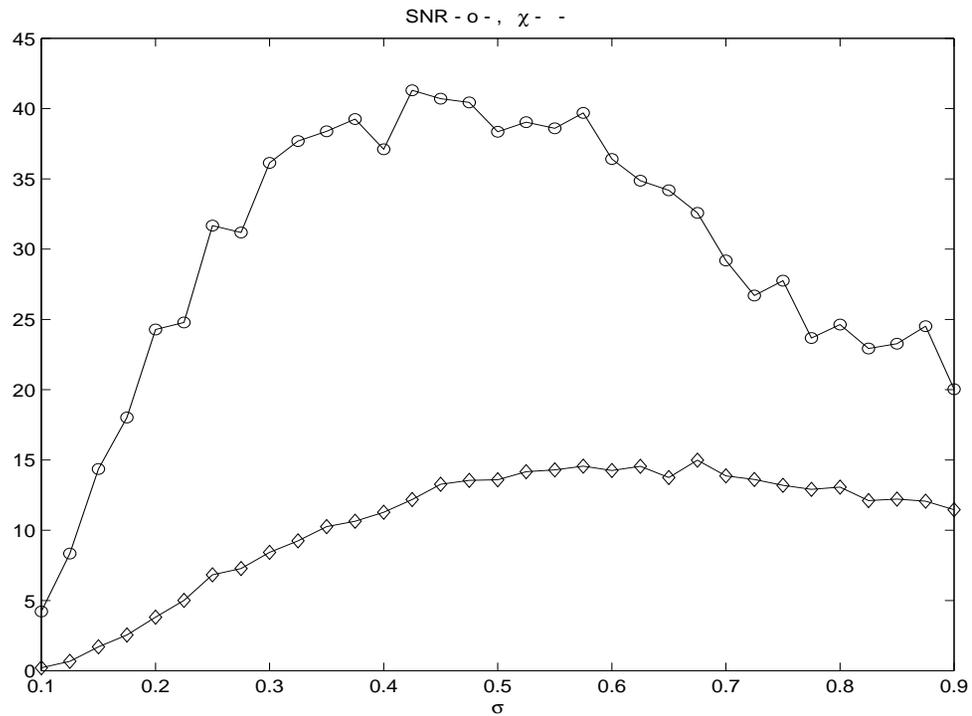
1. Calcul du RSB local \leftarrow calcul de la DSP de sortie à la fréquence cyclique nulle
2. DSP \leftarrow corrélation “moyenne” $\Gamma(q) = \langle E[y_n y_{n+q}] \rangle_n$

En première approximation (Théorie de la réponse linéaire)

$$\Gamma(q) = \Gamma_b(q) + \frac{\varepsilon^2}{2} |\chi_\sigma(\lambda_0)|^2 \cos(2\pi\lambda_0 q)$$

$$\text{RSB local en } \lambda_0 : RSB(\lambda_0) = \frac{\varepsilon^2 |\chi_\sigma(\lambda_0)|^2}{4S_b(\lambda_0)}$$

Exemple de $\Phi(x) = \text{Sign}(x)$, $\varepsilon = 0.1$, $\lambda_0 = 0.1$



maximum caractéristique de la résonance stochastique

UN PEU DE ZOOLOGIE

Historique :

→ RS dans systèmes dynamiques bistables forcés périodiquement et soumis à des fluctuations internes (Benzi, Nicolis, Fauve, Mc Namara & Wiesenfeld, ...)

Mesures : RSB en sortie (voir le gain), temps de résidence (Gammaitoni, Bulsara)

valables pour tous les systèmes non linéaires engendrant de la résonance stochastique (monostable, statique ...) pour des excitations périodiques

→ RS apériodique : signaux bande large, systèmes dynamiques ou statiques. Autres mesures (cohérence entrée sortie, mesures d'information ...)

Choix d'une mesure

Dépend du type de fonction réalisée et du résonateur présumé

1. classification, détection, ... discrimination signal-bruit en sortie
2. transmission, codage, ... ressemblance entrée-sortie

Exemple de mesures :

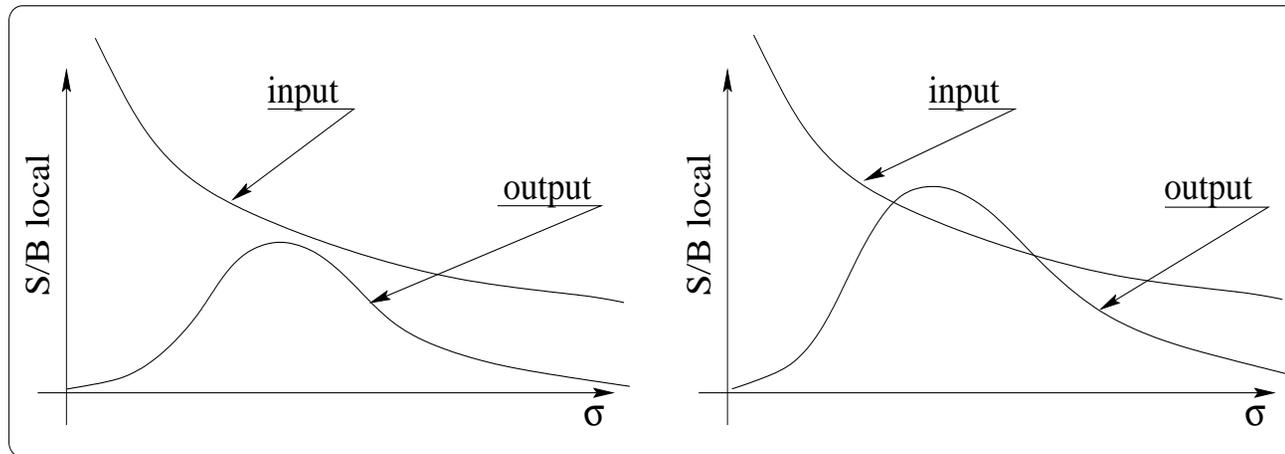
1. RSB local de sortie, gain (très étudié)
2. Mesures d'information (assez récent, en expansion)

→ illustrons cela ...

SUR LE RSB ET LE GAIN ...

comparer le RSB local de sortie à celui de l'entrée

$$G(\lambda_0) = \frac{RSB(\lambda_0)}{\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2}}$$

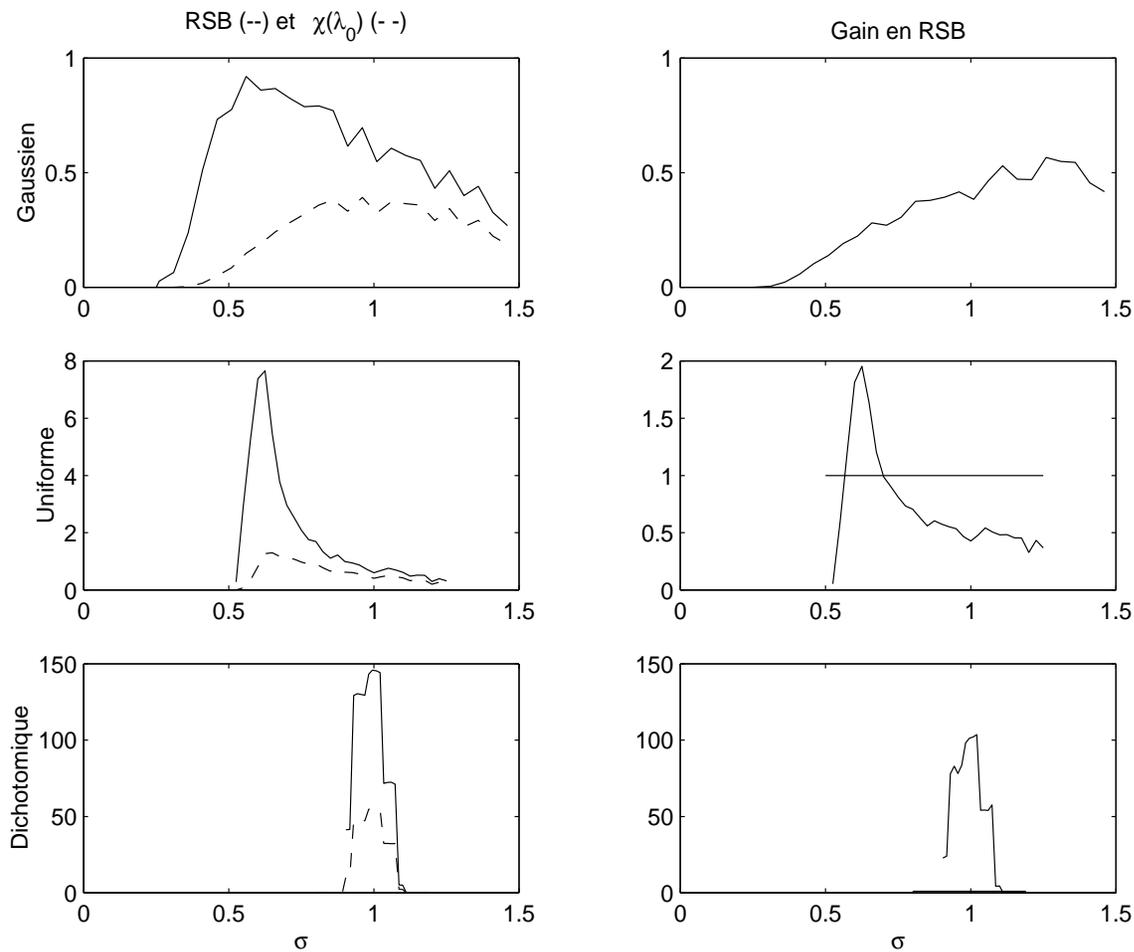


$$G(\lambda_0) < 1$$

← ? →

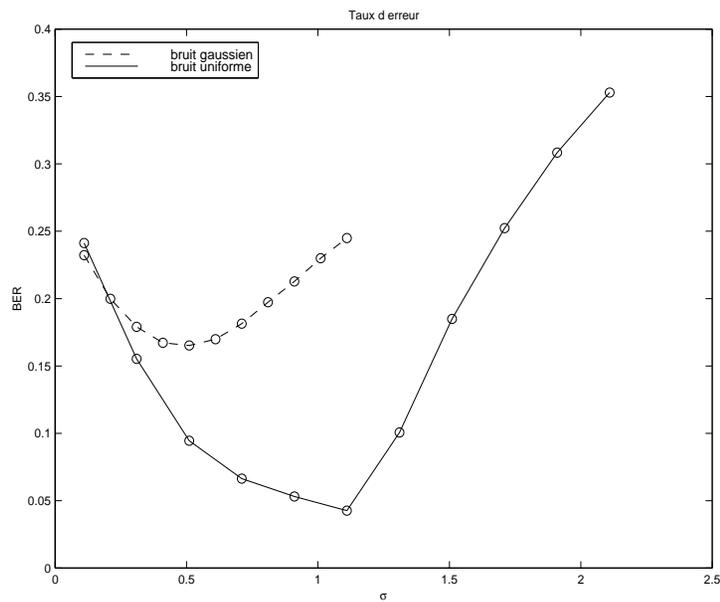
$$G(\lambda_0) > 1$$

$G(\lambda_0) \stackrel{>}{<} 1$? dépend de la nature du bruit



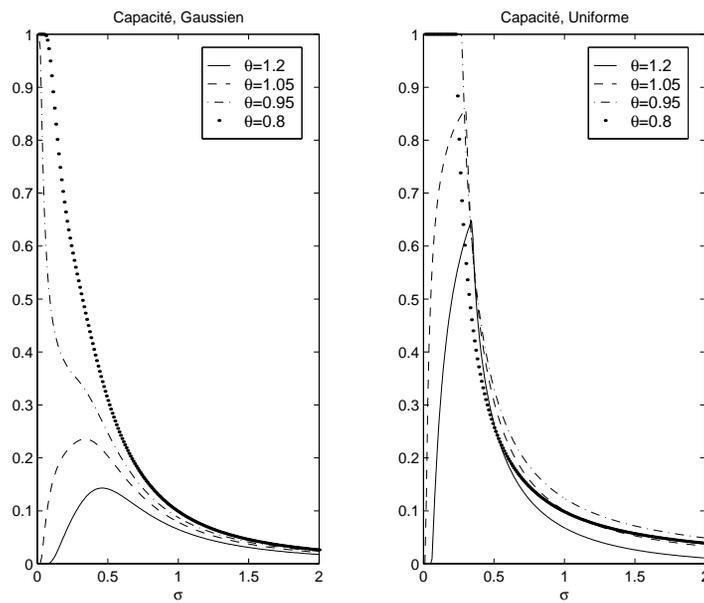
\implies intérêt en détection pour des situations non gaussiennes

Taux d'erreur



$$\theta = 1.2$$

Capacité du canal



Possibilité d'améliorer la capacité
avec du bruit si $\theta > 1$

ET DES APPLICATIONS?

Résonance stochastique : effet présent dans de nombreux systèmes non linéaires

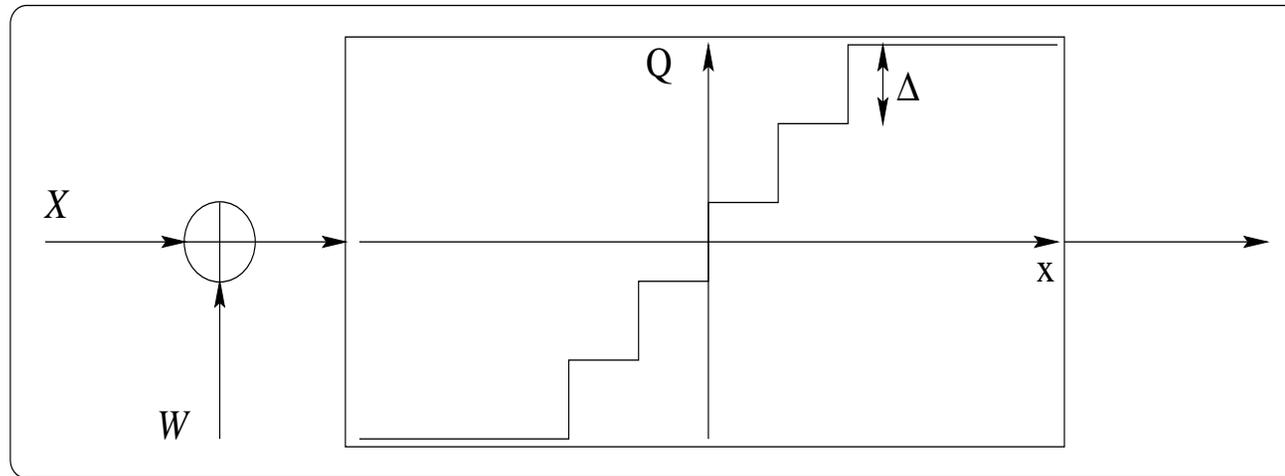
modèles physiques , modèles biologiques, modèles chimiques, ...

Son étude est en soi *intéressante* et *fondamentale* pour l'explication de phénomènes naturels

Applications en traitement du signal :

- “dithering” pour l'amélioration de la quantification.
- Détection de signaux faibles dans des bruits non gaussiens
- ...

QUANTIFICATION ET AJOUT DE BRUIT



Ajout de bruit pour détruire perceptuellement l'effet de la quantification (Roberts 1962)

Etudes classiques : conditions pour rendre indépendant le signal x et le bruit de quantification $Q(x + w) - x$ et/ou l'erreur $Q(x + w) - x - w$

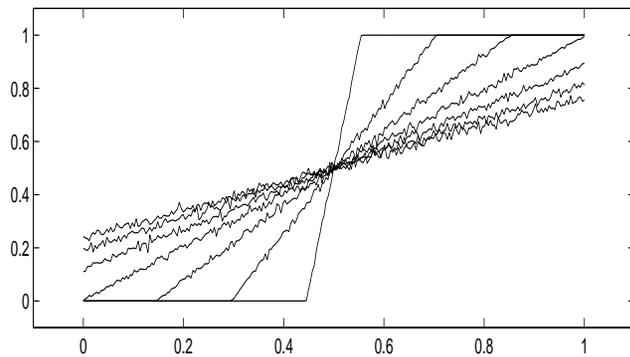
Comportement moyen pour 1 seuil

Réponse moyenne du quantificateur avec dither à une rampe

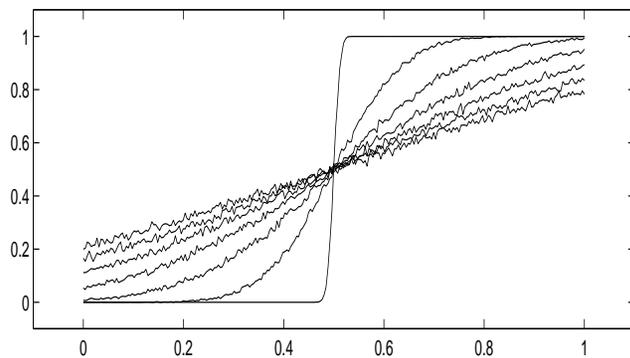
$$D = \left(\int_0^1 (E[Q(x+w)] - x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$D = 0 \text{ ssi } W \sim U\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

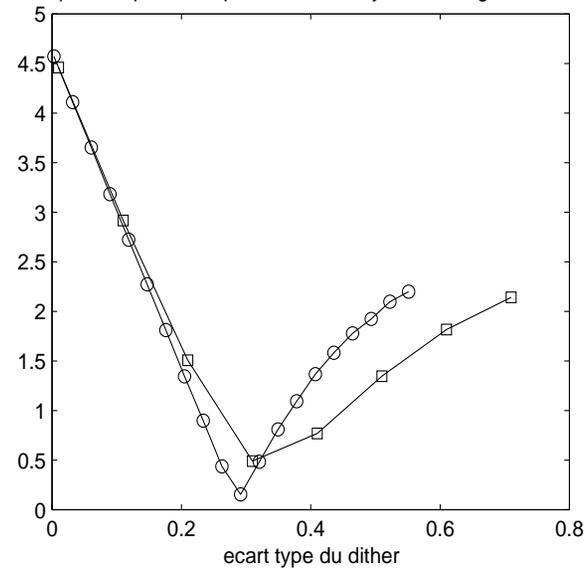
dither uniforme $U[-\sigma/2, \sigma/2]$, $\sigma=0.1$ à 1.9 par pas de 0.3



dither gaussien $N(0, \sigma)$, $\sigma=0.01$ à 0.61 par pas de 0.1



Ecart quadratique de la quantification moyenne au signal, $\sigma: U, \square: N$



APPLICATIONS EN DÉTECTION

1. Détection de sinusoïde : profit du gain > 1 en non gaussien
2. Est-ce que des détecteurs peuvent être des résonateurs stochastiques?
3. Est-ce que l'ajout de bruit peut améliorer la détectabilité?

RÉSONANCE STOCHASTIQUE DANS DES DÉTECTEURS?

Détection d'un signal déterministe de faible amplitude :

$$\begin{cases} H_0 & : & r_t & = & n_t \\ H_1 & : & r_t & = & s_t + n_t \end{cases} \quad \text{pour } t = t_1, \dots, t_N$$

Densité du bruit :

$$p_n(x) = \frac{1}{Z} \exp(-U(x; \theta))$$

Log-rapport de vraisemblance :

$$\begin{aligned} l(\mathbf{r}) &= - \sum_{t=t_1}^{t_N} U(r_t - s_t; \theta) - U(r_t; \theta) \\ &\approx \sum_{t=t_1}^{t_N} s_t U'(r_t; \theta) \end{aligned}$$

Détecteur localement optimal

Filtre adapté après transformée non linéaire des observations :

$$d(\mathbf{r}) = \sum_{t=t_1}^{t_N} s_t U'(r_t; \theta)$$

Performances :

$$D(d) = \frac{(E_1[d] - E_0[d])^2}{\text{Var}_0[d]} \quad \leftarrow \text{deflexion}$$

$$P_d = \text{erfc}(\text{erfc}^{-1}(P_{fa}) - \sqrt{D(d)}) \quad \leftarrow \text{courbes COR}$$

erfc : fonction décroissante de son argument

\implies à P_{fa} fixée, P_d varie comme D_d .

Mais $D(d)$ a la signification d'un RSB ... , et dépend de θ ...

Interprétation : faire varier la non-linéarité ...

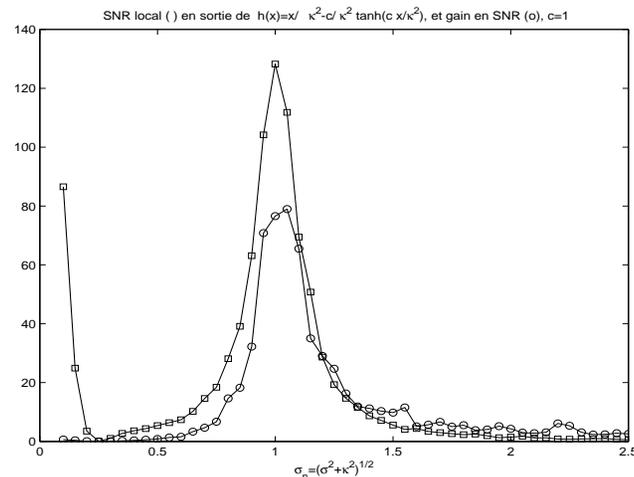
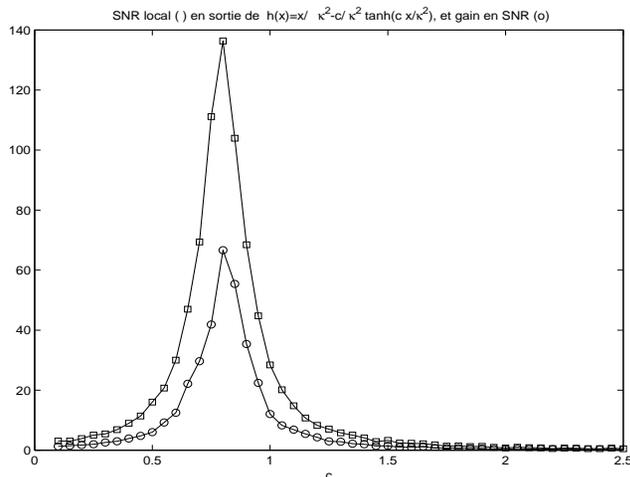
$$s_t = A \cos(2\pi \lambda_0 t) \qquad p_n(x) = \frac{1}{2Z} \left(e^{-\frac{(x-\sigma)^2}{2\kappa^2}} + e^{-\frac{(x+\sigma)^2}{2\kappa^2}} \right)$$

$$d(\mathbf{r}) = \sum_{t=t_1}^{t_N} s_t U'(r_t, \mathbf{c}) \qquad U'(x, \sigma) = \frac{x}{\kappa^2} - \frac{\sigma}{\kappa^2} \tanh\left(\frac{\sigma x}{\kappa^2}\right)$$

Dans cet exemple : RSB local = déflexion \implies performances

Banc de filtres : c varie, $\sigma = 0.8$

Un filtre $c = 1$, σ_n varie



\implies famille de résonateurs ; LOD : résonateur optimal

DÉTECTION ET RÉSONANCE STOCHASTIQUE : AUTRE POINT DE VUE

Peut-on améliorer la détection en ajoutant du bruit?

exemple de Kay (2000) : détection d'une constante positive dans un mélange de gaussiennes:

$$\begin{cases} H_0 & : & r_t & = & n_t \\ H_1 & : & r_t & = & A + n_t \end{cases} \quad \text{pour } p_n(x) = \frac{1}{2Z} \left(e^{-\frac{(x-\sigma)^2}{2\kappa^2}} + e^{-\frac{(x+\sigma)^2}{2\kappa^2}} \right)$$

Détecteur optimal : lourd et difficile à implanter

Détecteur simple : $d(\mathbf{r}) = \sum_i (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Sign}(r_i))$

Détecteur "bruité" : $d(\mathbf{r} + \mathbf{u}) = \sum_i (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Sign}(r_i + u_i))$,
 $u_i \sim N(0, \alpha^2)$

Probabilité de détection varie comme $\text{Proba}(\text{seuil franchi}/H_1)$

→ analogie avec le franchissement de seuil induit par le bruit

POUR TERMINER

le bruit n'est pas toujours nuisible ...

étude des interactions *bruit* \longleftrightarrow *systèmes non linéaires* :

fondamentale dans des sciences aussi diverses que biologie ou physique

compréhension du fonctionnement de systèmes réels pour la définition de traitements artificiels de l'information.

axes très actuels :

→ mesures d'information et discrimination aidée par le bruit

→ bruit dans les systèmes biologiques

→ formation de structures induite par le bruit, ...