

Introduction

Ce texte illustre l'apport potentiel des techniques particulières au domaine des communications numériques à l'aide d'un cas d'école : une transmission monoporteuse sur un canal lentement variable en présence d'un résidu de porteuse. Le premier paragraphe présente succinctement le fonctionnement d'un filtre particulière élémentaire, le paragraphe 2 présente le problème de communication lui-même, le paragraphe 3 rappelle les solutions classiques tandis que le paragraphe 4 aborde la résolution particulière. Cette dernière partie se concentre sur le problème simple de l'estimation de phase pour illustrer quelques avantages des méthodes à base de particules.

1 Filtrage particulière

Le filtrage non linéaire [7] consiste à estimer un processus de Markov observé à travers une équation d'observation :

$$\begin{aligned}\xi_k &= f(\xi_{k-1}, \mathbf{w}_k) \\ y_k &= g(\xi_k, n_k)\end{aligned}$$

La première équation, appelée équation d'état, définit un processus markovien tandis que la seconde, appelée équation d'observation, donne la mesure de l'état à travers une fonction non linéaire g . La suite des vecteurs \mathbf{w}_k et le bruit de mesure n_k sont des suites blanches indépendantes. La théorie de l'estimation indique que toute l'information pour estimer ξ_k est contenue dans la densité de probabilité *a posteriori* $p(\xi_k | \mathbf{y}_{1:k})$, où $\mathbf{y}_{1:k} = \{y_1, \dots, y_k\}$. Par exemple, le filtre optimal en moyenne quadratique n'est autre que la moyenne *a posteriori*. On montre que la densité *a posteriori* suit l'équation de récursion

$$p(\xi_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{p(y_k | \xi_k) \int p(\xi_k | \xi_{k-1}) p(\xi_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\xi_{k-1}}{p(y_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} \quad (1)$$

La connaissance de cette récursion est la solution du filtrage non linéaire optimal. Toutefois, pour obtenir des estimateurs implémentables, il faut aller un peu plus loin et calculer par exemple la moyenne conditionnelle. Malheureusement, dès que l'équation d'état et/ou l'équation d'observation sont non linéaires, les calculs d'intégrales pour l'obtention d'estimateurs sont en général impossibles analytiquement. Il faut alors avoir recours soit à des approximations (par exemple le filtre de Kalman étendu (FKE) qui considère le modèle linéarisé), soit à des techniques numériques. Parmi ces techniques, les méthodes Monte-Carlo conduisent au filtrage particulière.

Mise en œuvre particulière. Le filtrage particulière a été redécouvert et/ou étudié par de nombreux auteurs depuis le début des années 90 [9, 5, 6]. Une présentation unifiée est faite dans [6] en utilisant la notion d'échantillonnage d'importance.

Echantillonnage d'importance. Comme mentionné précédemment, une fois la densité *a posteriori* $p(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$ calculée, elle sert à l'évaluation d'estimateurs de la forme

$$E_p[f(\xi_{0:k})] = \int f(\xi_{0:k}) p(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\xi_{0:k}$$

L'approche Monte-Carlo pour évaluer cette intégrale consiste à utiliser des réalisations d'une variable aléatoire distribuée suivant la loi *a posteriori* pour calculer des moyennes empiriques. Cette approche est intéressante dès que l'on sait échantillonner selon la loi *a posteriori*. Malheureusement, ceci est rarement le cas, et la technique d'échantillonnage d'importance est un remède intéressant. Cette méthode utilise une autre densité $q(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$, dite densité instrumentale, dont le support contient celui de $p(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$ et suivant laquelle il est facile d'échantillonner. En utilisant :

$$\begin{aligned}E_p[f(\xi_{0:k})] &= \int f(\xi_{0:k}) \frac{p(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})}{q(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})} q(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\xi_{0:k} \\ &= E_q[f(\xi_{0:k}) \frac{p(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})}{q(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})}]\end{aligned}$$

et N réalisations $\mathbf{x}_{0:k}(i) \sim q(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$, $i = 1, \dots, N$, l'estimateur précédent est approché par la quantité

$$\begin{aligned}\hat{E}_p[f(\xi_{0:k})] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_{0:k}(i)) w^*(i) \\ w^*(i) &= \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}(i) | \mathbf{y}_{1:k})}{q(\mathbf{x}_{0:k}(i) | \mathbf{y}_{1:k})}\end{aligned}$$

où les quantités $w^*(i)$ sont appelées poids d'importance. La loi des grands nombres permet alors de montrer que cette approximation converge presque sûrement vers $E_p[f(\xi_{0:k})]$ quand N tend vers l'infini.

Il reste toutefois un problème puisqu'en écrivant

$$w^*(i) = \frac{p(\mathbf{y}_{1:k} | \mathbf{x}_{0:k}(i)) p(\mathbf{x}_{0:k}(i))}{p(\mathbf{y}_{1:k}) q(\mathbf{x}_{0:k}(i) | \mathbf{y}_{1:k})}$$

on s'aperçoit que l'évaluation des poids requiert le calcul de l'intégrale $p(\mathbf{y}_{1:k}) = \int p(\mathbf{y}_{1:k} | \xi_{0:k}) p(\xi_{0:k}) d\xi_{0:k}$, calcul en général irréalisable. Mais remarquer que

$$\begin{aligned}p(\mathbf{y}_{1:k}) &= \int \frac{p(\mathbf{y}_{1:k} | \xi_{0:k}) p(\xi_{0:k})}{q(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})} q(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) d\xi_{0:k} \\ &= E_q\left[\frac{p(\mathbf{y}_{1:k} | \xi_{0:k}) p(\xi_{0:k})}{q(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})}\right]\end{aligned}$$

permet de montrer que la forme

$$E_p[f(\xi_{0:k})] = \frac{E_q\left[f(\xi_{0:k}) \frac{p(\mathbf{y}_{1:k} | \xi_{0:k}) p(\xi_{0:k})}{q(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})}\right]}{E_q\left[\frac{p(\mathbf{y}_{1:k} | \xi_{0:k}) p(\xi_{0:k})}{q(\xi_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})}\right]}$$

est exploitable pour l'approximation. On a en effet

$$\begin{aligned}\hat{E}_p[f(\boldsymbol{\xi}_{0:k})] &= \frac{\sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_{0:k}(i))w(i)}{\sum_{i=1}^N w(i)} \\ w(i) &= \frac{p(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{x}_{0:k}(i))p(\mathbf{x}_{0:k}(i))}{q(\mathbf{x}_{0:k}(i)|\mathbf{y}_{1:k})}\end{aligned}$$

Cette approximation est toutefois biaisée pour un nombre N fini de réalisations, mais converge toujours presque sûrement quand N tend vers l'infini.

Filtre particulaire. La suite du développement consiste à rendre récursif l'algorithme d'échantillonnage d'importance. Une condition suffisante pour obtenir une forme récursive est que la loi instrumentale $q(\boldsymbol{\xi}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ factorise en $q(\boldsymbol{\xi}_{0:k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})q(\xi_k|\boldsymbol{\xi}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})$ [6]. Dans ce cas, à l'étape k de l'algorithme, on ne rééchantillonne pas $\mathbf{x}_{0:k}(i)$ suivant tout le passé, mais uniquement suivant $x_k(i) \sim q(\xi_k|\boldsymbol{\xi}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})$, les réalisations devenant $(\mathbf{x}_{0:k-1}(i), x_k(i))$. La terminologie *particulaire* vient de là : $x_k(i)$ représente une particule dont la dynamique est gérée par la densité $q(\xi_k|\boldsymbol{\xi}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})$. On montre alors facilement que les poids sont mis à jour récursivement selon

$$\begin{aligned}w_k(i) &= \tilde{w}_{k-1}(i) \frac{p(y_k|\mathbf{x}_k(i))p(\mathbf{x}_k(i)|\mathbf{x}_{k-1}(i))}{q(\mathbf{x}_k(i)|\mathbf{x}_{0:k-1}(i), \mathbf{y}_{1:k})} \\ \tilde{w}_k(i) &= \frac{w_k(i)}{\sum_{j=1}^N w_k(j)}\end{aligned}$$

Il est montré dans [6] que la loi instrumentale $q(\xi_k|\boldsymbol{\xi}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) = p(\xi_k|\xi_{k-1}, y_k)$ minimise la variance des poids, conditionnellement à $\boldsymbol{\xi}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}$. Cette loi est malheureusement rarement calculable, et d'autres lois instrumentales doivent être considérées. La plus simple est la loi *a priori* de l'état $p(\xi_k|\boldsymbol{\xi}_{k-1})$. Le problème de cet instrument est qu'il ne dépend pas de l'observation. Toutefois, quelle que soit la loi choisie, le problème le plus important est la dégénérescence de l'algorithme.

En effet, il peut être constaté (ou montré, voir par exemple [6]), que les poids des particules tendent tous vers 0 quand k tend vers l'infini, sauf pour une particule dont le poids tend vers 1. Cette dégénérescence se comprend bien lorsque la loi instrumentale est la loi *a priori* de l'état $p(\xi_k|\boldsymbol{\xi}_{k-1})$. Dans ce cas, chaque particule diffuse dans l'espace d'état et devient de moins en moins vraisemblable, les poids représentent la vraisemblance de la particule et tendent donc vers 0, sauf une évidemment qui correspond à la particule la plus vraisemblable. Cette dégénérescence est donc due au fait que N est fini.

Pour éviter cette dégénérescence, les particules doivent interagir entre elles d'une façon ou d'une autre. Cette interaction s'effectue en général à l'aide d'une *redistribution* selon la loi discrète définie par les poids. Quand une redistribution est effectuée, les particules les moins vraisemblables meurent, alors que les plus vraisemblables prolifèrent. Le point délicat est de décider d'une redistribution. Nous adoptons un point de vue heuristique. L'ensemble des particules est très efficace si les poids sont tous égaux à $1/N$. Cette efficacité est alors mesurée à l'aide de l'entropie de

la loi définie par les poids

$$H_k(\tilde{w}) = - \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k(i) \log_2 \tilde{w}_k(i)$$

L'entropie est maximale ($\log_2 N$ bits) quand l'ensemble de particules est le plus efficace, et est minimale lorsqu'une particule travaille seule. On décide donc de redistribuer lorsque l'entropie chute en dessous d'un seuil prédéfini.

2 Cas d'école en communication

Une suite $\{a_k\}$ de variables aléatoires i.i.d. uniformément distribuées sur une constellation de points du plan complexe (*e.g.* $a_k = \pm 1$) est émise. Après mise en forme par une impulsion $g(t)$ et translation autour d'une porteuse ν_0 , le signal émis s'écrit :

$$e_{HF}(t) = \text{Re} \left(e^{i2\pi\nu_0 t} \sum_n a_n g(t - nT) \right) \quad (2)$$

où T désigne la durée d'un symbole. En supposant le canal linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$ et le bruit $\nu(t)$ additif, blanc et gaussien, le signal modulé reçu est de la forme :

$$r_{HF}(t) = \text{Re} \left(e^{i2\pi\nu_0 t} \left(\sum_n a_n q(t - nT) + \nu(t) \right) \right)$$

avec $q = g * h$. L'enveloppe complexe de $r_{HF}(t)$ est :

$$r(t) = \sum_n a_n q(t - nT) + \nu(t)$$

Une statistique suffisante peut être construite en filtrant $r(t)$ par $q^*(-t)$, filtre adapté à $q(t)$, puis en échantillonnant de manière synchrone au rythme de un point par symbole. En notant $y(t)$ la sortie du filtre adapté et $y_k = y(kT)$, on a :

$$y_k = \left\{ \sum_n a_n p(t - nT) + n(t) \right\} \Big|_{t=kT}$$

avec $p(t) = q(t) * q^*(-t)$ et $n(t) = \nu(t) * q^*(-t)$. Le bruit complexe $\{n_k = n(kT)\}$ est supposé gaussien, blanc et circulaire, de variance $\sigma_n^2 = E|n_k|^2$.

En présence d'une erreur de synchronisation de phase $\theta(t)$, il est souvent intéressant de factoriser le déphasage $\theta_k = \theta(kT)$ afin de mettre en évidence, pour en tirer profit, l'existence de deux échelles de temps très différentes : la vitesse de variation du canal qui peut être très faible et celle de la phase de la porteuse généralement beaucoup plus rapide :

$$y_k = e^{i\theta_k} \sum_n a_n p(kT - nT) + n_k$$

En tronquant la réponse $\{p(kT)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, en groupant les coefficients du filtre RIF dans le vecteur \mathbf{p} et les symboles associés dans $\boldsymbol{\xi}_k$, l'observation s'écrit :

$$y_k = g(\boldsymbol{\xi}_k, n_k) = \mathbf{p}^T \boldsymbol{\xi}_k e^{i\theta_k} + n_k$$

L'état ξ_k évolue selon un modèle du type $\xi_k = f(\xi_{k-1}, a_k)$.

Sous quelles conditions cette séquence complexe $\{y_k\}$ peut-elle être utilisée par un détecteur au sens du MV (MLSE, Maximum Likelihood Sequence Estimation) ?

- Le canal de transmission doit être estimé pour alimenter le détecteur MLSE.
- L'enveloppe complexe du signal reçu doit être correctement estimée ; c'est le rôle de la **récupération de porteuse**. Notons que ce problème est inclus dans l'estimation du canal (si l'on ne factorise par θ_k) et qu'il n'a d'intérêt en lui-même que lorsque le canal respecte le critère de Nyquist ou que la phase est beaucoup plus rapide que le canal.
- Le pilotage de l'échantillonneur en sortie du filtre adapté doit être aligné sur le rythme d'émission des symboles ; c'est le rôle de la **synchronisation symbole**. Si l'échantillonnage respecte le théorème de Shannon, ce problème est inclus dans l'estimation du canal. En pratique, le calage du peigne d'échantillonnage peut-être supposé constant sur le bloc de données à traiter et, contrairement au cas de la phase, il n'est pas utile de factoriser le paramètre de synchronisation symbole.

3 Résolution classique

Résolution classique du problème de récupération de porteuse Intéressons nous à un canal qui respecte le critère de Nyquist associé à des filtres de mise en forme qui assurent l'absence d'interférences entre symboles (IES) ; l'observation se réduit alors à

$$y_k = a_k e^{i\theta_k} + n_k$$

Lorsque la démodulation analogique est imparfaite, il est nécessaire de récupérer le résidu de porteuse qui subsiste en bande de base, c'est-à-dire de compenser l'erreur de phase θ_k . La phase θ_k devra être estimée à partir de la suite $\{y_k\}$. On note $\varphi_k = \hat{\theta}_k$ le déphasage estimé par le récepteur. De sorte que les symboles peuvent être estimés par $\hat{a}_k = y_k e^{-i\varphi_k}$.

Porteuse non modulée. Pour un signal non modulé ($a_k = 1$), il est facile d'écrire l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) pour une phase constante. Si la phase varie, il devient plus difficile d'exploiter les solutions du MV ou du MAP (maximum *a posteriori*), une approche classique consiste alors à approcher la solution optimale par un FKE. Pour estimer θ_k à l'aide d'un FKE, il faut connaître un modèle d'évolution *a priori* de la phase. En pratique, il existe toujours un petit décalage fréquentiel entre deux oscillateurs ; la phase est alors bien représentée par un Brownien avec dérive (inconnue *a priori*). L'algorithme adaptatif correspondant s'écrit en faisant apparaître un **filtre de boucle** :

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{1 - z^{-1}} \right) \text{Im} [y_k e^{-i\varphi_{k-1}}] \quad (3)$$

On l'appelle une boucle de phase (PLL) du second ordre. Les pas optimaux se calculent à partir des paramètres du Brownien [4, 1].

Porteuse modulée. Lorsque le signal est modulé, la situation devient moins simple et il est nécessaire, d'une manière ou d'une autre, d'éliminer la modulation. En utilisant une approche de type MV et en intégrant sur la constellation, on trouve un estimateur analogue à la PLL vue précédemment :

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \gamma \text{Im} \left[y_k e^{-i\varphi_k} \tanh \left(\frac{2}{\sigma_n^2} \text{Re} (y_k e^{-i\varphi_k}) \right) \right]$$

Selon le rapport signal sur bruit, le terme \tanh peut être approché linéairement ou par une fonction signe. Ces deux approximations conduisent à la boucle de Costas (RSB faible) et à la boucle à remodulation (RSB fort). Il est toujours possible d'inclure des connaissances *a priori* quant à l'évolution de la phase dans un filtre de boucle puis de calculer les pas optimaux ainsi que l'EQM associée.

Correctement optimisés, ces algorithmes offrent des performances très proches de l'optimum en régime asymptotique pour la poursuite de non stationnarités lentes. Cependant, de part la nature même des approximations du type FKE, la convergence initiale et le comportement face à des ruptures est médiocre. Cet antagonisme entre les régimes transitoire et asymptotique est la conséquence directe du caractère sous optimal de l'approche adoptée.

Le remède classique à ce dilemme consiste à surveiller l'erreur de l'algorithme adaptatif pour déclencher une procédure de ré-acquisition ad-hoc en cas de rupture (détection, estimation et finalement compensation de la rupture avant de redonner la main à l'algorithme adaptatif).

L'alternative consiste à recourir à une méthode (plus) optimale.

Résolution classique du problème complet En présence d'IES et d'une dérive de phase, le traitement classique consiste à utiliser une PLL suivie d'un algorithme de détection des symboles a_k . En pratique, la détection optimale requière l'estimation du canal et la solution du MV dépend de toute la séquence transmise par le biais de l'estimation du canal : tout algorithme de complexité finie est alors sous optimal. L'objectif pratique est de construire le récepteur ayant les meilleures performances à complexité imposée.

Parmi les solutions classiques, citons l'algorithme PSP (Per Survivor Processing) proposé par Raheli[8] qui intègre l'estimation des paramètres dans la structure de l'algorithme de Viterbi [11, 12].

4 Résolution particulière

Résolution particulière du problème de récupération de porteuse Le problème de l'estimation d'une phase variant selon une dynamique, aux propriétés statistiques connues, observée au travers d'une fonction non linéaire est un problème de filtrage optimal. Bien que la non linéarité sur l'observation rende ce problème insoluble analytiquement, des mises en œuvre pratiques peuvent être obtenues par des linéarisations telles que le FKE ou grâce à des méthodes de simulation de type monte carlo telles que le filtrage particulière ou les méthodes MCMC (Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov).

Pour les raisons évoquées précédemment, nous supposons que la phase est une marche aléatoire avec dérive linéaire, *i.e.* $\theta_k = \theta_{k-1} + \varepsilon + w_k$, où la dérive ε est constante mais inconnue, et où le bruit de dynamique w_k est supposé gaussien, centré de variance σ_w^2 et indépendant du bruit d'observation. Dans tout ce qui suit, les variances des bruits seront supposées connues. Le modèle est :

$$\text{équation d'état} : \begin{cases} \theta_k &= \theta_{k-1} + \varepsilon_{k-1} + w_k \\ \varepsilon_k &= \varepsilon_{k-1} \end{cases}$$

$$\text{équation d'observation} : y_k = a_k e^{i\theta_k} + n_k$$

Les deux paramètres à estimer constituent les deux coordonnées des particules, que l'on notera

$$\mathbf{x}_k(i) = \begin{pmatrix} x_k^1(i) &= \hat{\theta}_k \\ x_k^2(i) &= \hat{\varepsilon}_k \end{pmatrix}$$

Le filtre particulaire consiste alors en l'algorithme suivant :

1. Initialisation : $\forall i = 1, \dots, N$

Initialiser N particules $\mathbf{x}_0(i)$ selon $p(\theta, \varepsilon)$.

Initialiser leurs poids à $\tilde{w}_0(i) = \frac{1}{N}$.

2. Pour $k \geq 1$ faire

(a) Etape de prédiction :

bouger les particules selon la loi instrumentale

$$\mathbf{x}_k(i) \sim q(\theta_k, \varepsilon_k | \mathbf{x}_{0:k-1}(i), \mathbf{y}_{1:k}), \forall i = 1, \dots, N$$

et poser $\mathbf{x}_{0:k}(i) = (\mathbf{x}_{0:k-1}(i), \mathbf{x}_k(i))$

(b) Etape de correction :

$\forall i = 1, \dots, N$ mise à jour des poids selon

$$w_k(i) = \tilde{w}_{k-1}(i) \frac{p(y_k | \mathbf{x}_k(i)) p(\mathbf{x}_k(i) | \mathbf{x}_{k-1}(i))}{q(\mathbf{x}_k(i) | \mathbf{x}_{0:k-1}(i), \mathbf{y}_{1:k})}$$

$$\tilde{w}_k(i) = \frac{w_k(i)}{\sum_{j=1}^N w_k(j)}$$

(c) Etape de redistribution.

Si l'entropie $H_p(k)$ est inférieure à un seuil prédéfini, alors redistribuer suivant la loi définie par les poids

$\tilde{w}_k(i)$, et poser $\tilde{w}_k(i) = 1/N, \forall i = 1, \dots, N$

(d) Etape d'estimation :

$$\hat{\theta}_k = \hat{E}[\theta_k | \mathbf{y}_{1:k}] = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k(i) x_k^1(i)$$

$$\hat{\varepsilon}_k = \hat{E}[\varepsilon_k | \mathbf{y}_{1:k}] = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k(i) x_k^2(i)$$

Dans toute la suite, la densité instrumentale sera $p(\mathbf{x}_k(i) | \mathbf{x}_{k-1}(i))$ de sorte que le calcul des poids est très simple. Il ne fait en effet intervenir que la vraisemblance. Si l'on suppose que les symboles sont binaires ± 1 avec probabilité $1/2$, celle-ci vaut :

$$p(y_k | \theta_k, \varepsilon_k) = \frac{\exp\left(-\frac{|y_k|^2 + 1}{\sigma_n^2}\right)}{\pi \sigma_n^2} \cosh\left(-\frac{2}{\sigma_n^2} \operatorname{Re}(y_k e^{-i\theta_k})\right)$$

Comparaison avec une boucle à remodulation. Dans ce paragraphe, nous illustrons à l'aide de quelques simulations les performances de l'estimateur particulaire de phase par rapport aux PLL classiques. La modulation numérique est binaire ; les paramètres définissant l'évolution de la phase sont $\varepsilon = 0.5, \sigma_w = 0.1$. Ces conditions sont assez sévères. On suppose ici que les variances des bruits sont connues. Cette connaissance est prise en compte dans l'implantation particulaire à travers les lois *a priori* de l'état et la vraisemblance. Pour comparer le filtre particulaire à une boucle à remodulation, il faut donc que la connaissance des variances des bruits soit également prise en compte par l'algorithme adaptatif. Pour ce faire, les pas optimaux sont choisis.

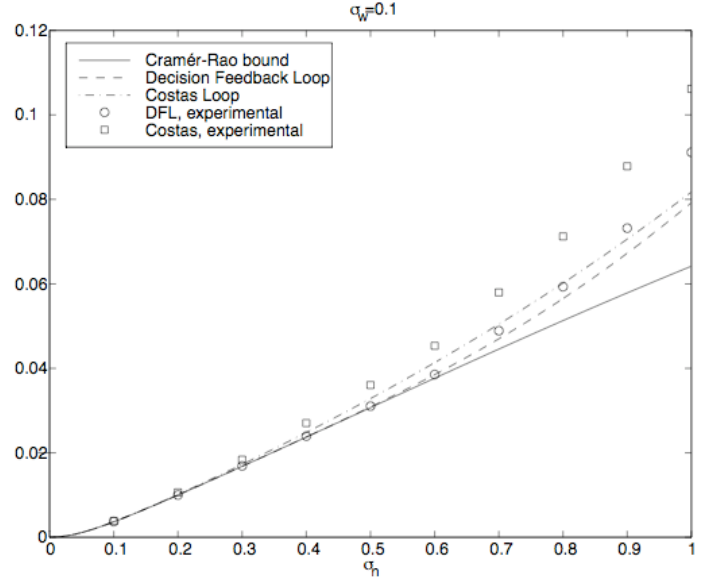


FIG. 1 – Performances asymptotiques de la boucle de Costas, de la boucle à remodulation et performances ultimes (Cramér-Rao). Les courbes représentent l'erreur quadratique moyenne des estimateurs en fonction de l'écart type du bruit d'observation, lorsque les pas γ_1 et γ_2 sont optimaux. Les courbes sont tracées pour un écart type du bruit de dynamique $\sigma_w = 0.1$

La figure 1 représente la borne de Cramér-Rao séquentielle [10, 1] en dessous de laquelle aucun algorithme ne peut descendre et les performances obtenues par le filtre particulaire et deux PLL classiques. Il apparaît que le filtre particulaire et les PLLs sont des dispositifs sensiblement équivalents du point de vue des performances asymptotiques.

La supériorité du filtre particulaire ne réside donc pas dans cette variance, mais bien plutôt dans sa vitesse de convergence, bien supérieure à celle d'une boucle à remodulation. Cette caractéristique est claire si l'on se réfère aux histogrammes de temps de convergence de la figure 2. Cette rapidité de convergence implique également une meilleure capacité de réaction face à des ruptures de modèle. Le filtrage particulaire constitue une solution pratique de référence aussi bien pour la convergence initiale que pour la poursuite.

Un autre avantage pratique très important du filtre particulaire ré-

side dans sa plus grande robustesse par rapport aux glissements de cycles, c'est-à-dire aux changements de détermination de la phase estimée en cours de fonctionnement.

La force principale du filtre particulaire réside dans sa capacité à traiter, sans les distinguer, les phases d'acquisition et de poursuite. Le gain est très clair lorsque la séparation de ces deux phases est la plus critique : la convergence initiale et les glissements de cycle.

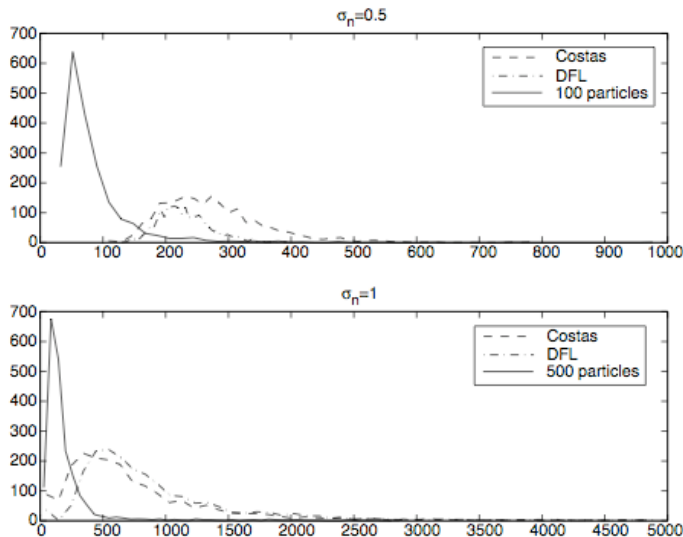


FIG. 2 – Histogramme des temps d'acquisition des PLL et du particulaire évalués sur 2000 réalisations. Chaque histogramme est calculé sur 50 classes également réparties entre les valeurs minimale et maximale. Pour $\sigma_n = 0.5$, le filtre particulaire utilise 100 particules, 500 pour $\sigma_n = 1$.

Extension à la résolution particulaire du problème complet Supposons pour simplifier que la dérive de phase est suffisamment lente pour être intégrée dans le canal. Que peut apporter l'approche particulaire dans cette situation ?

L'algorithme de Viterbi est optimal conditionnellement à la connaissance du canal, il est donc naturel de conserver la structure de cet algorithme lorsque le canal est constant. Cela n'est en revanche plus le cas pour un canal aléatoire. Ainsi, le problème de l'estimation conjointe et aveugle des données et du canal peut être reconsidéré du point de vue du filtrage optimal dans l'espoir d'obtenir, à complexité fixée, des récepteurs plus performants que ceux qui conservent la structure de Viterbi. Une approche particulaire brute étant d'une complexité rédhibitoire et ne tirant pas parti de la structure du problème d'estimation conjointe pour un état mixte continu-discret, il est judicieux de marier particulaire et approches classiques.

Deux décompositions du problèmes sont alors possibles : lorsque les symboles transmis sont connus, l'estimation du canal est un problème linéaire gaussien ; lorsque le canal est connu, l'algorithme de Viterbi est optimal. Ces décompositions conduisent à des algorithmes performants (cf. [2])

5 Conclusion

Grâce aux moyens pratiques qu'elles fournissent pour résoudre des problèmes de filtrage non linéaire, les techniques particulières constituent une piste intéressante dans le domaine des communications numériques dans de nombreux cas : caractère non gaussien des symboles et éventuellement du bruit, état hybride continu-discret, estimation conjointe aveugle du canal et des symboles, prise en compte de non stationnarités lentes et de ruptures, unification du régime transitoire et du régime de poursuite. La complexité de mise en œuvre, quoique non négligeable, est tout à fait réaliste à moyen terme grâce à l'association du particulaire avec des méthodes plus classiques telles que le filtre de Kalman ou l'algorithme de Viterbi.

Références

- [1] P.O. AMBLARD, J.M. BROSSIER, E. MOISAN, Phase tracking : what do we gain from optimality ? Particle filtering versus phase-locked loops. *Signal Processing*, vol. 83, 1, January 2003.
- [2] F. BEN SALEM, Réception particulaire pour canaux multi-trajets évanescents en communications numérique. *Thèse de l'université Paul Sabatier de Toulouse*, 2002.
- [3] A. BENVENISTE, M. MÉTIVIER, P. PRIOURET, Algorithmes adaptatifs et approximations stochastiques, théorie et applications, *Masson*, 1987.
- [4] J.M. BROSSIER, Signal et communication numérique : égalisation et synchronisation, *Editions Hermès*, 1997.
- [5] P. DEL MORAL, J.C. NOYER, G. RIGAL, AND G. SALUT. Résolution particulaire et traitement non-linéaire du signal : Applications radar/sonar, *Traitement du Signal*, 12(4) :287–301, 1995.
- [6] A. DOUCET. Algorithmes Monte-Carlo pour l'estimation bayésienne de modèles markoviens cachés. Application au traitement de signaux de rayonnements. *PhD thesis, Université d'Orsay*, 1997.
- [7] A.H. JAZWINSKI Stochastic processes and filtering theory. *Academic Press*, 1970.
- [8] R. RAHELI, A. POLYDOROS, C.K. TZOU Survivor processing : a general approach to approximate and adaptive MLSE. *IEEE Trans. on Com.*, 43(2/3/4) :354–364, 1995.
- [9] G. RIGAL, G. SALUT L'estimation particulaire dans les problèmes non-linéaires généraux. *GdR Traitement du Signal*, Paris, octobre 1992.
- [10] P. TICHAVSKY, C.H. MURAVCHIK, AND A. NEHORAI. Posterior Cramér-Rao bounds for discrete time nonlinear filtering. *IEEE Trans. on SP*, 46(5) :1386–1396, 1998.
- [11] A.J. VITERBI, Principles of Coherent Communication, *McGraw Hill*, 1966.
- [12] A.J. VITERBI, J.K. OMURA, Principles of Digital Communication and Coding, *McGraw Hill*, 1979.