

# *FRACTALES (et ondelettes)*

Pierre-Olivier Amblard

Laboratoire des Images et des Signaux, UMR CNRS 5083

Groupe Non Linéaire

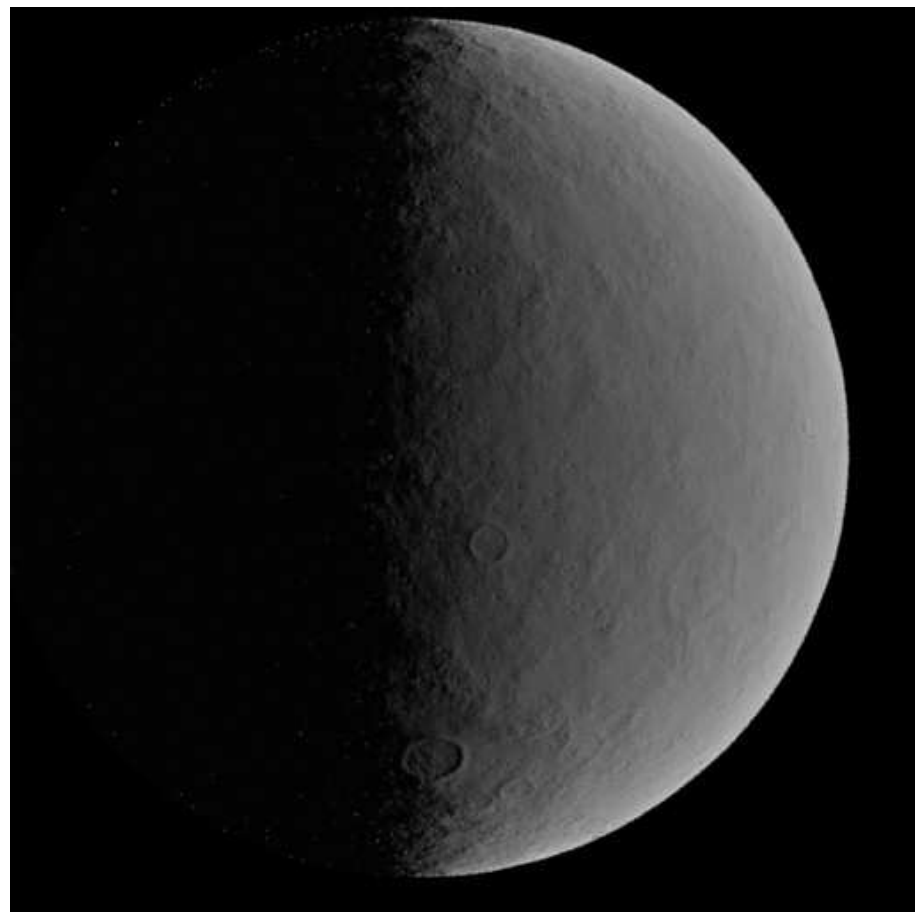


3 cours de 3 heures :

- ⊗ Introduction aux fractales, une méthode de construction (Systèmes de fonctions itérés, IFS)
- ⊗ Signaux fractals (IFS), signaux aléatoires : mouvement Brownien fractionnaire, IFS aléatoires
- ⊗ Analyse en ondelette des signaux fractals

les fractales?

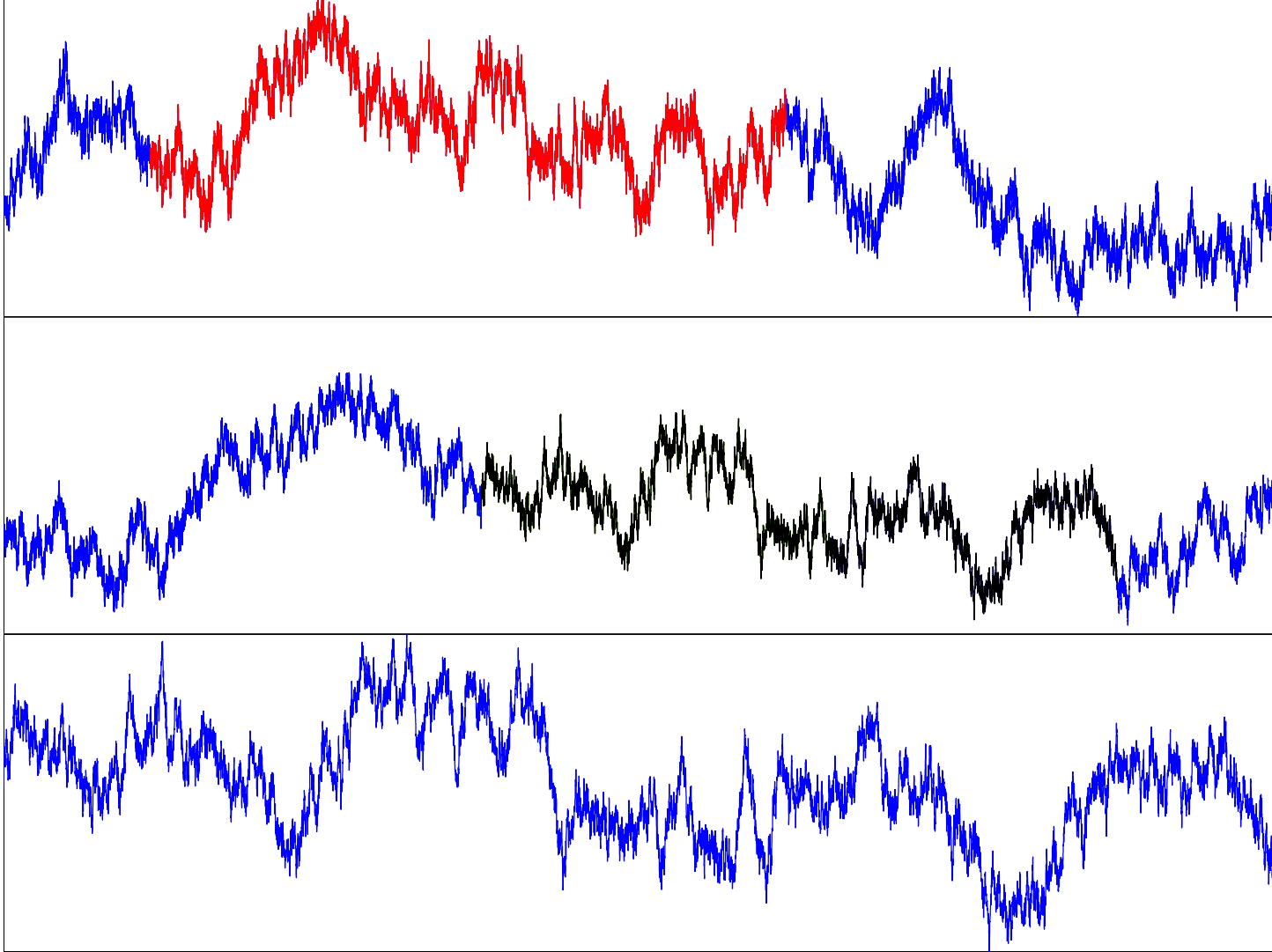
des modèles mathématiques pour la description de la nature...







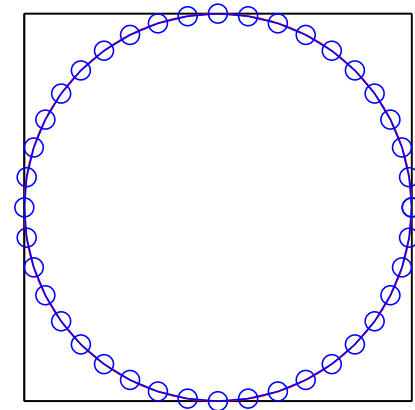
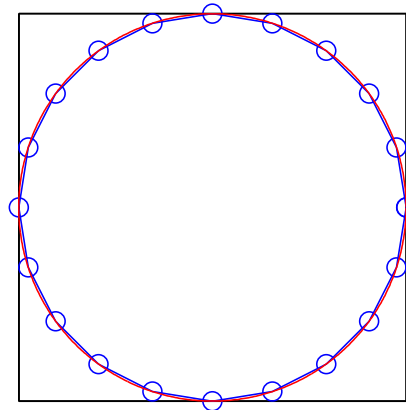
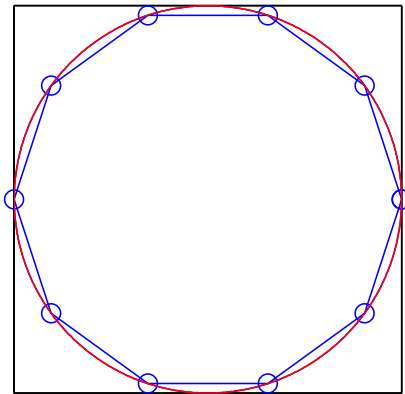






On y va...

## Mesurer des longueurs



le cercle...

la courbe de Von Koch...

## Dimension de Hausdorff

$$\mathcal{H}_\delta^s(S) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} |U_i|^s, \{U_i\} \text{ } \delta\text{-recouvrement de } S \right\}$$

$$\mathcal{H}^s(S) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(S) = \begin{cases} \infty & \text{pour } s \in [0, s_d[ \\ \mathcal{H}^{s_d}(S) & \text{pour } s = s_d \\ 0 & \text{pour } s > s_d \end{cases}$$

## Dimension de comptage de boîtes, de capacité, d'information

$$\dim_B(S) = \lim_{\delta \rightarrow 0} - \frac{\log(N_\delta(S))}{\log \delta}$$

En général,

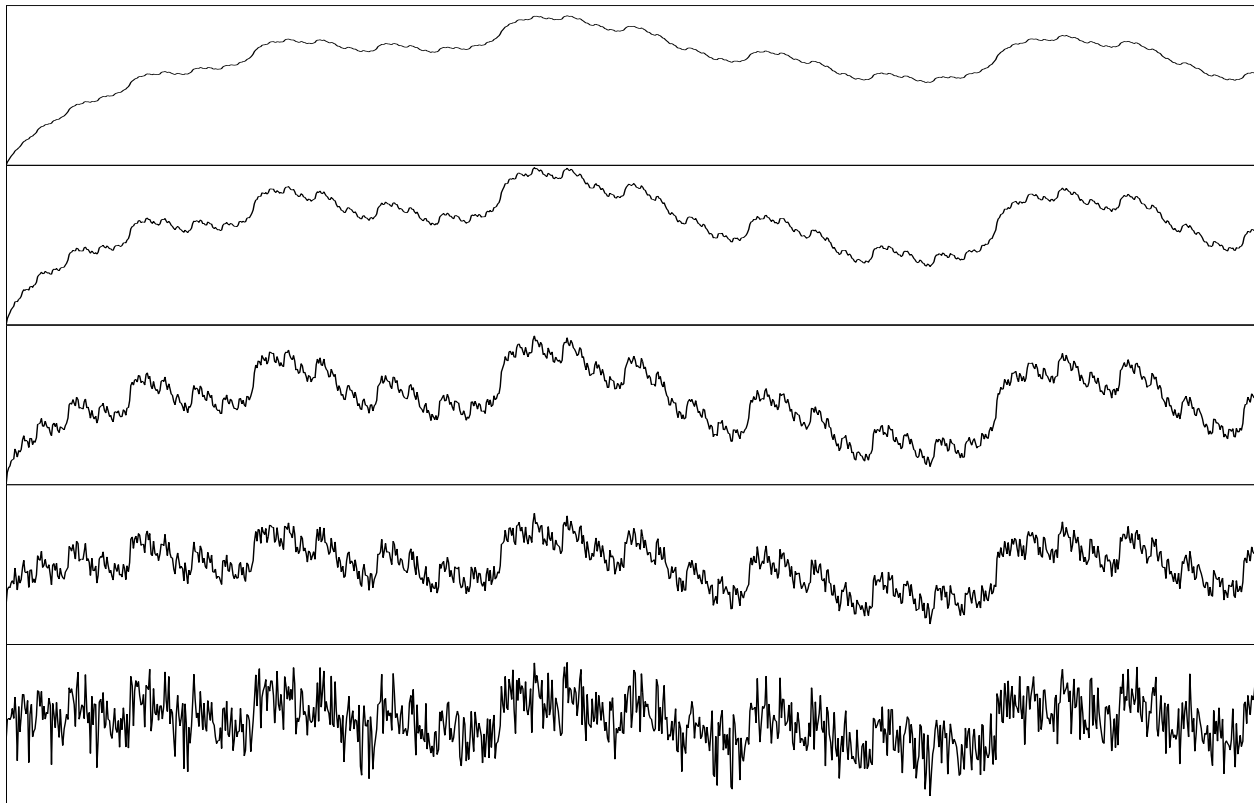
$$\dim_B(S) \geq \mathcal{H}^{s_d}(S)$$

voyons pour l'ensemble de Cantor...

### **une définition**

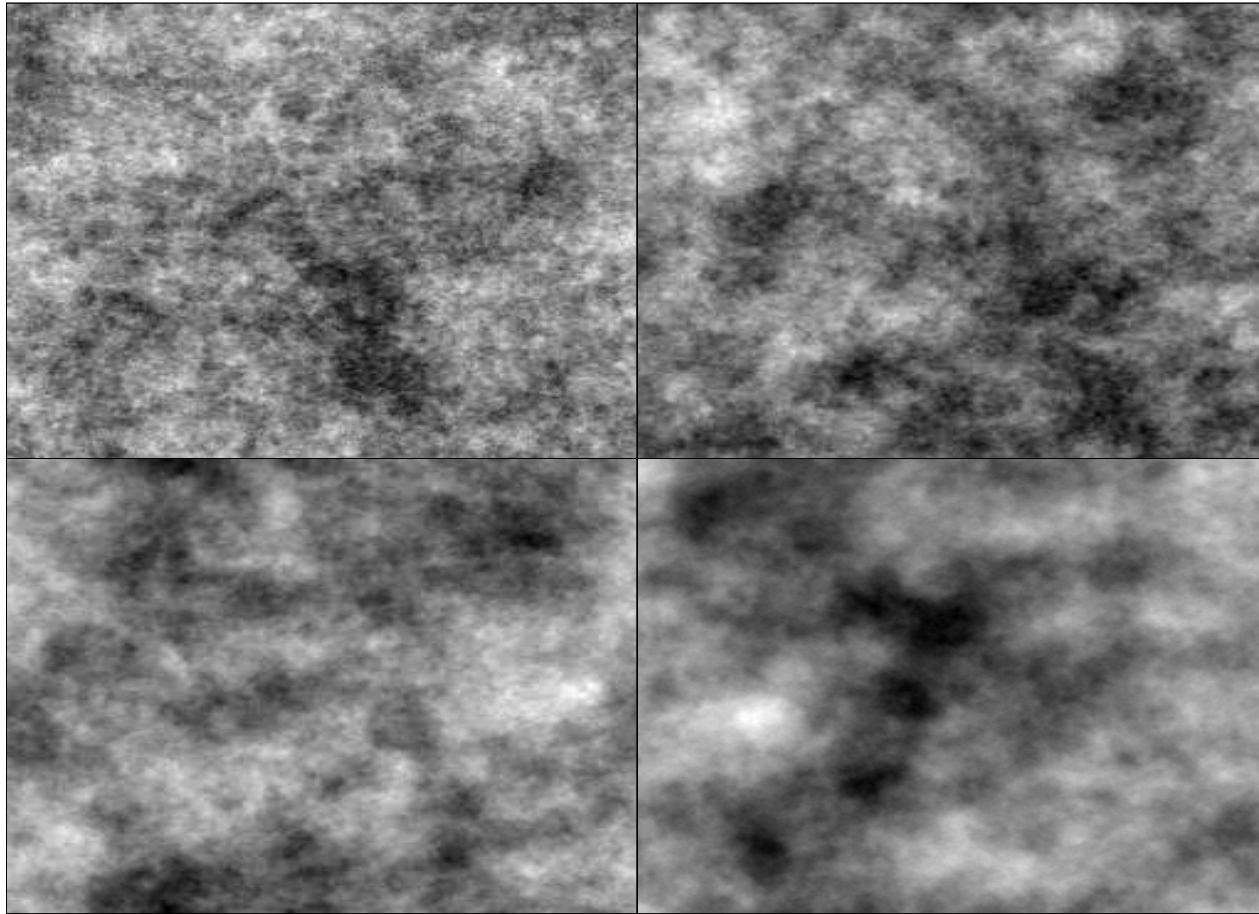
*Un ensemble est fractal si sa dimension de Hausdorff est supérieure à sa dimension topologique*

dimension fractale, un indice de rugosité...



Fonction de Weierstrass

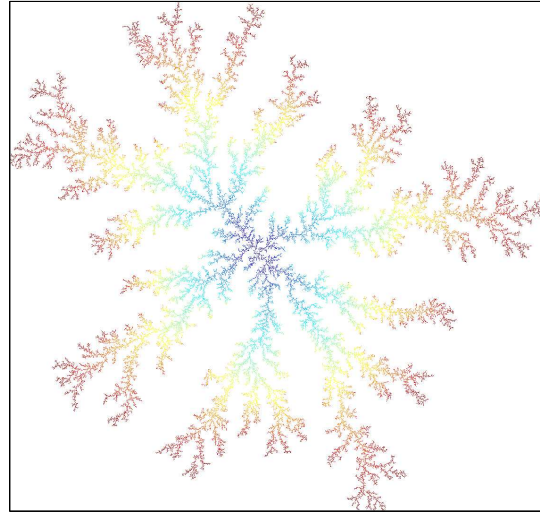
Dimensions fractales de haut en bas : 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9.



Mouvements Brownien fractionnaire 2D

Dimensions fractales en haut 2.8 et 2.6; en bas 2.4 et 2.2

les fractales, de meilleurs modèles pour décrire les formes naturelles?



DLA...



marbre de Bavière

**les fractales, de meilleurs modèles pour décrire les formes naturelles?**

encore faut-il pouvoir modéliser...

nous verrons des modèles de signaux (Weierstrass, fBm, points fixes d'opérateurs,...)

nous allons voir une construction :

    Systèmes de Fonctions Itérés, Iterated Function System pour IFS



## Rappels de Topologie, Espaces métriques

- ⊗ distance,
- ⊗ espace métrique,
- ⊗ suite de Cauchy,
- ⊗ suite convergente,
- ⊗ espace complet,
- ⊗ points limites et fermeture d'un ensemble, ensemble fermé,
- ⊗ sous-ensembles compacts, sous-ensembles bornés,
- ⊗ les compacts sont les fermés-bornés.

## Applications contractantes

$f : X \rightarrow X$ ,  $(X, d)$  étant un espace métrique est *contractante* s'il existe un réel  $s \in [0, 1[$  tel que

$$d(f(x), f(y)) \leq sd(x, y), \forall x, y \in X$$

### Théorème du point fixe

Soit  $f : X \rightarrow X$  une application contractante de  $(X, d)$ , espace métrique complet. Alors,  $f$  a un unique point fixe  $x_f \in X$ , et de plus,  $\forall x \in X$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = x_f$ .

**et les fractales dans tout cela?**

$(X, d)$  un espace métrique, typiquement  $(\mathbb{R}^2, d_e)$ . Alors

$$\mathcal{H} = \{\text{compacts de } X\}$$

muni de

$$d(x, B) = \min(d(x, y), y \in B)$$

$$d(A, B) = \max(d(x, B), x \in A)$$

$$d_H(A, B) = \max(d(A, B), d(B, A))$$

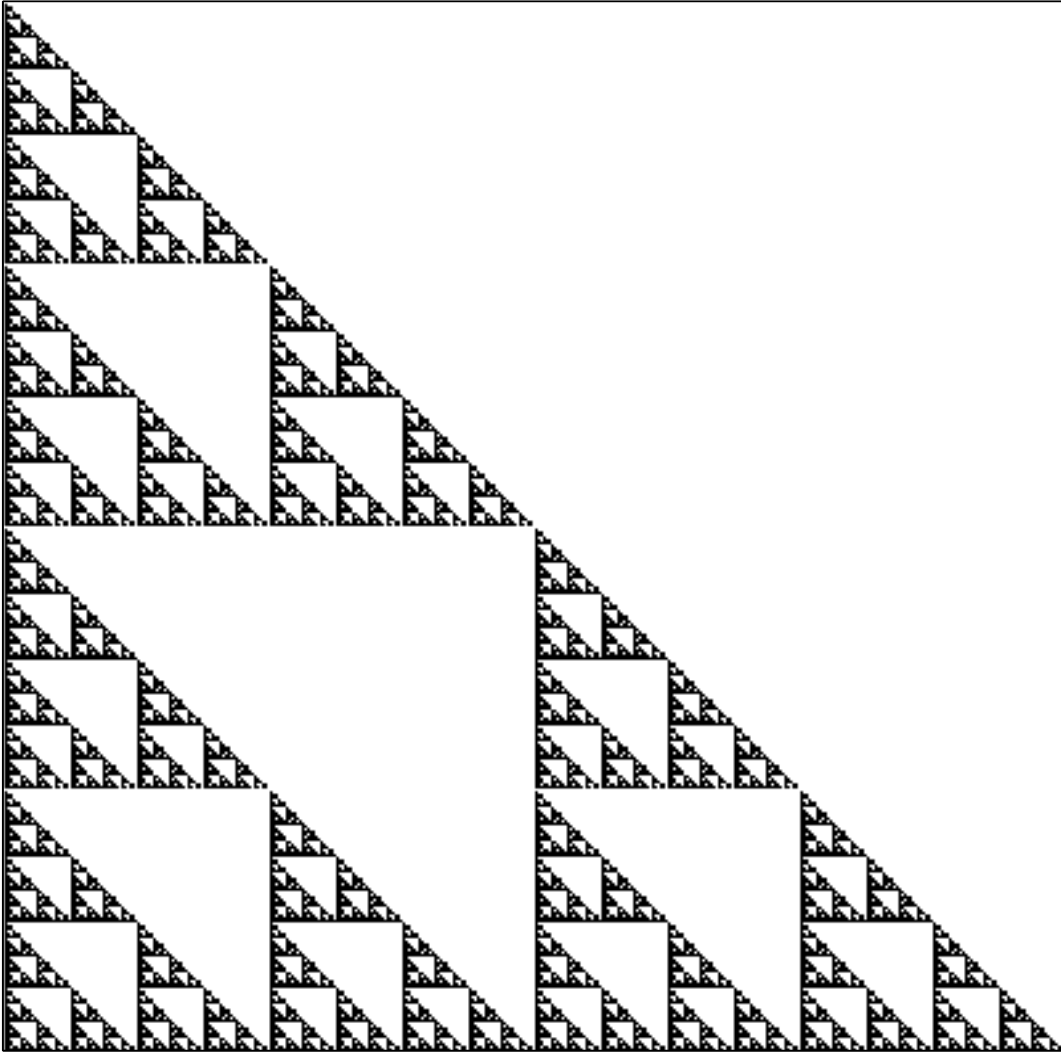
est un *espace métrique complet*.

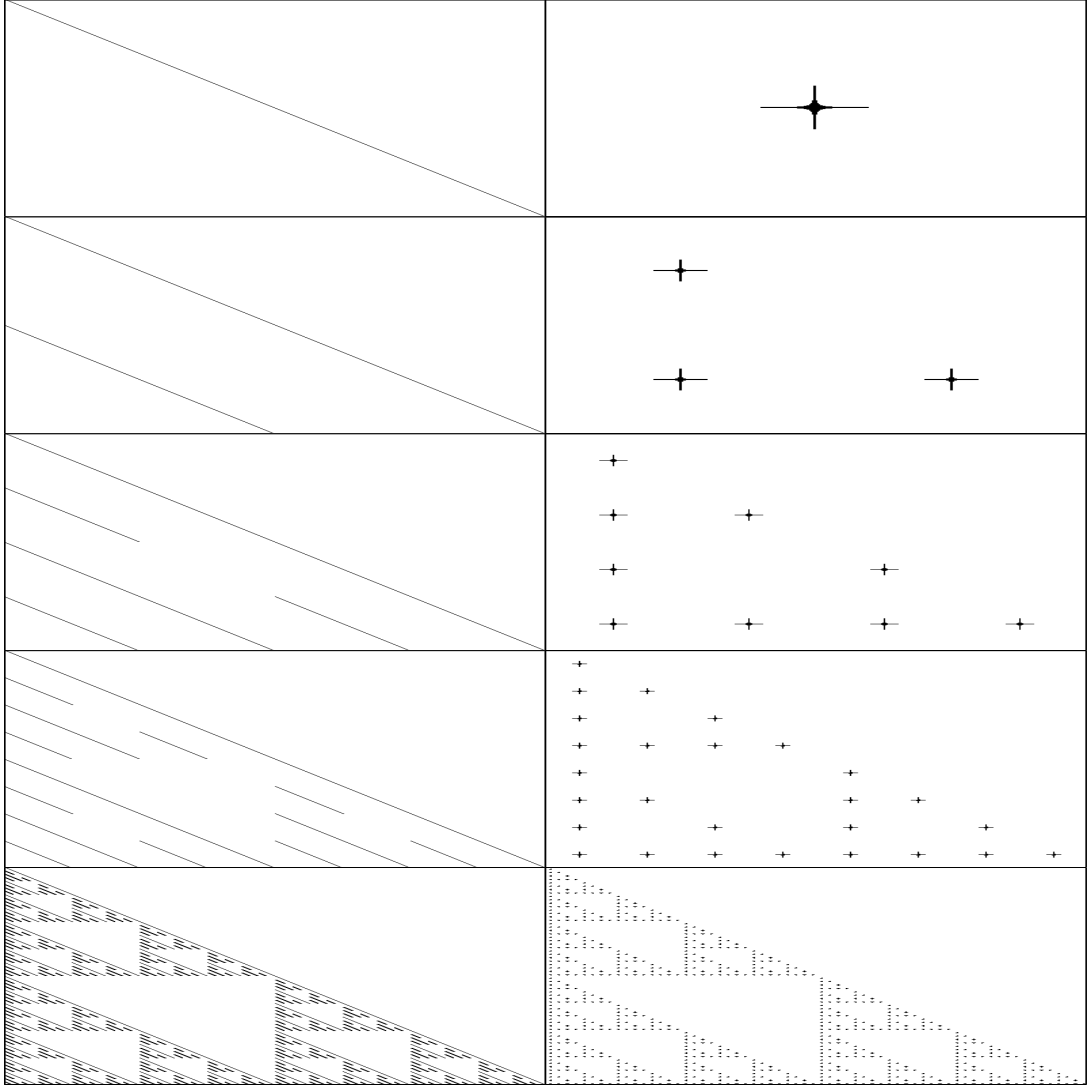
# Systeme de Fonctions

## Systeme de Fonctions Itérés

## Exemples

- ⊗ retour sur Cantor
- ⊗ retour sur Von Koch
- ⊗ Tapis de sierpinski







## Algorithme aléatoire pour la génération d'IFS

A l'IFS  $\{w_i\}_{i=1,\dots,N}$  on associe un jeu de probabilités  $\{p_i\}_{i=1,\dots,N}$ .

$p_i$  est la probabilité pour que la variable aléatoire discrète  $k$  prenne la valeur  $i$

Considérons alors la suite de points de  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_n &= w_{k_n} \mathbf{r}_{n-1} \end{aligned}$$

où  $\{k_n\}_{n=1,\dots,\infty}$  est une suite de variables aléatoires discrètes, indépendantes, identiquement distribuées selon les probabilités  $\{p_i\}_{i=1,\dots,N}$

Une feuille de fougère pour illustrer



## Algorithme aléatoire et texture

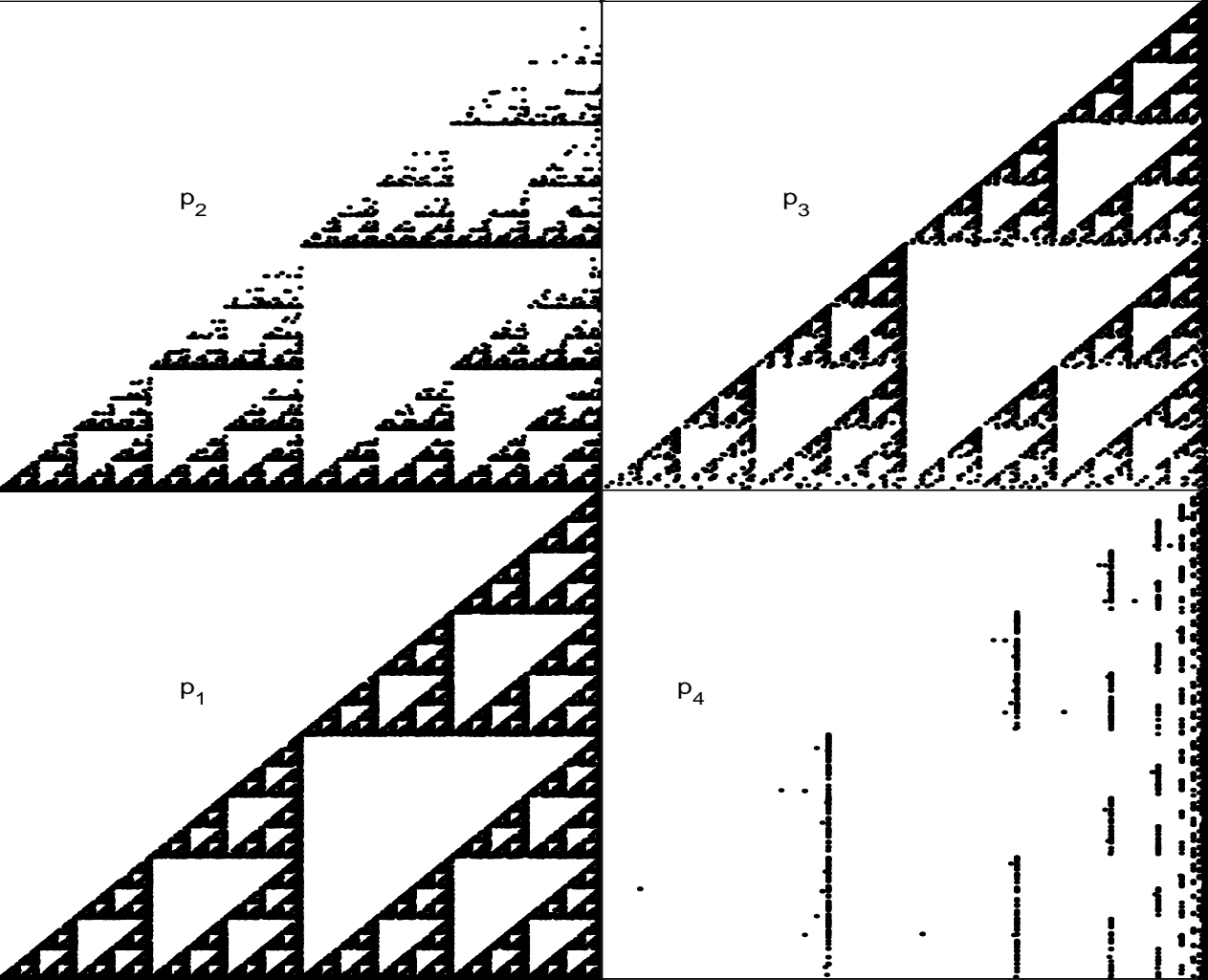
$$\mathbf{p}_1 = [0.5, 0.5, 0.5]$$

$$\mathbf{p}_2 = [0.4, 0.5, 0.1]$$

$$\mathbf{p}_3 = [0.2, 0.2, 0.6]$$

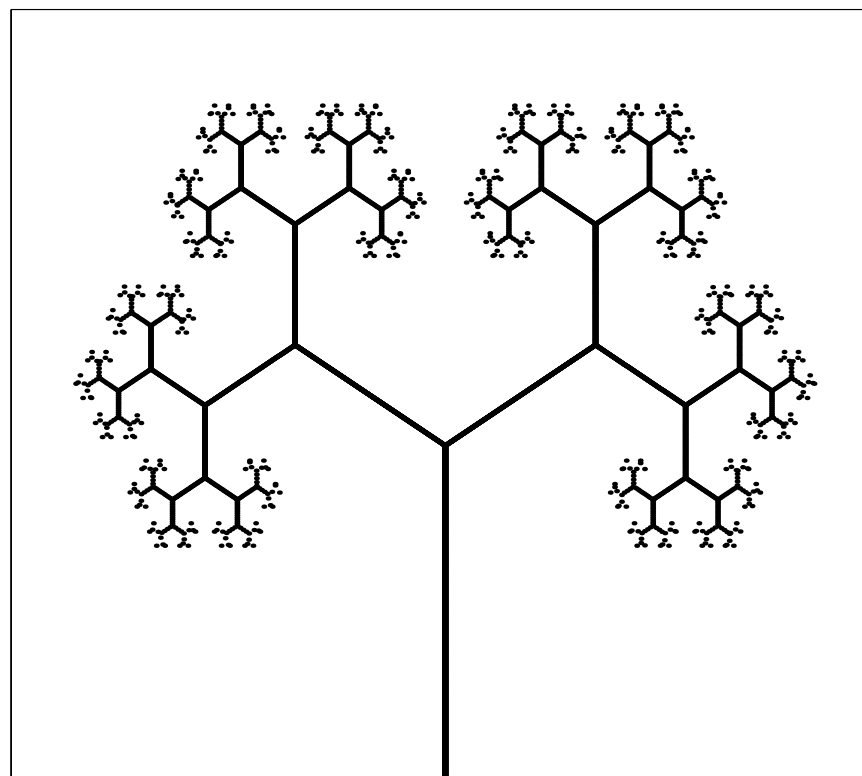
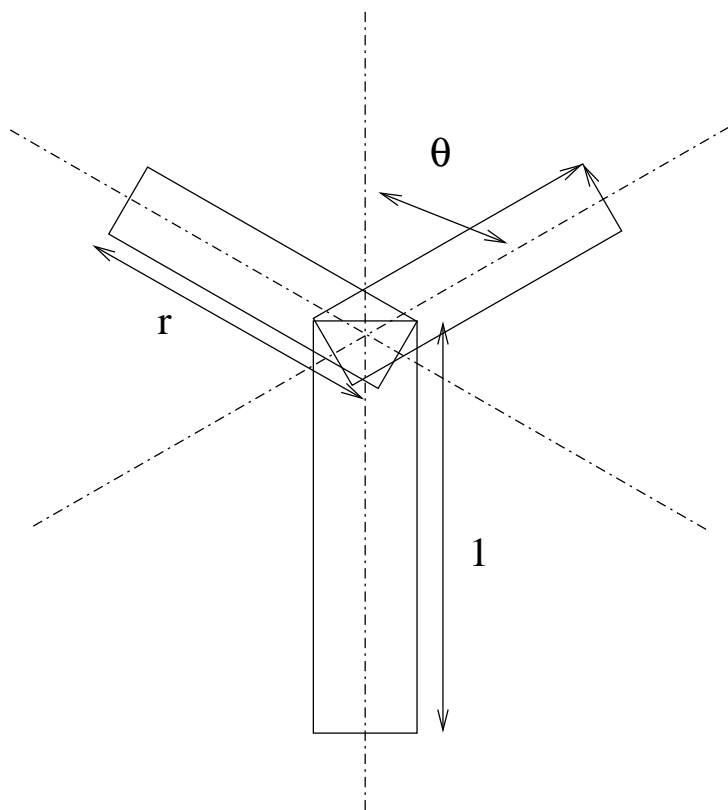
$$\mathbf{p}_4 = [0.01, 0.39, 0.6]$$

pour le tapis de Sierpinski



## IFS avec ensemble de condensation

On ajoute  $w_0 : A \rightarrow w_0(A) = C$ .



### Problème inverse : le théorème du collage

On se place dans l'espace métrique  $(\mathbb{R}^2, d)$ . Soit  $L \in (\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_H)$ . Soit un IFS  $\{w_0, w_1, \dots, w_N\}$  de facteur de contraction  $s = \max(s_n)$  tel que

$$d_H(L, \bigcup_{n=0}^N w_n(L)) \leq \varepsilon$$

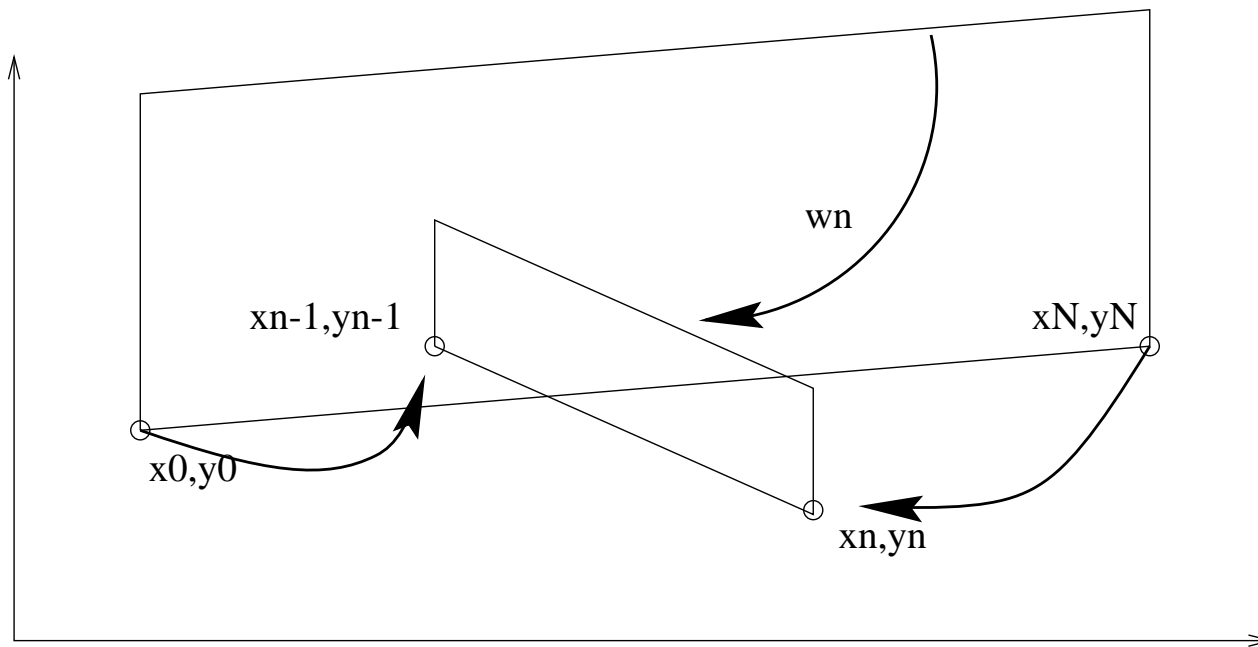
Alors l'attracteur  $A$  de l'IFS vérifie

$$d_H(L, A) \leq \frac{\varepsilon}{1-s}$$

## Fonctions d'interpolation

Points  $\{(x_i, y_i)\}_{i=0, \dots, N}$  à interpoler. IFS :

$$w_n \mathbf{r} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \mathbf{r} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$



Contraintes satisfaites pour

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0} \\
 e_n &= \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0} \\
 c_n &= \frac{y_n - y_{n-1} - d_n (y_N - y_0)}{x_N - x_0} \\
 f_n &= \frac{x_N y_{n-1} - x_0 y_n - d_n (x_N y_0 - x_0 y_N)}{x_N - x_0}
 \end{aligned}$$

$d_n$  représente un paramètre libre. On montre que si  $\sum_i |d_i| > 1$  alors

$$\sum_{n=1}^N |d_n| a_n^{D-1} = 1$$



