

FRACTALES (et ondelettes)

Pierre-Olivier Amblard

Laboratoire des Images et des Signaux, UMR CNRS 5083

Groupe Non Linéaire



Fractales, 2ème des signaux fractals, 2ème

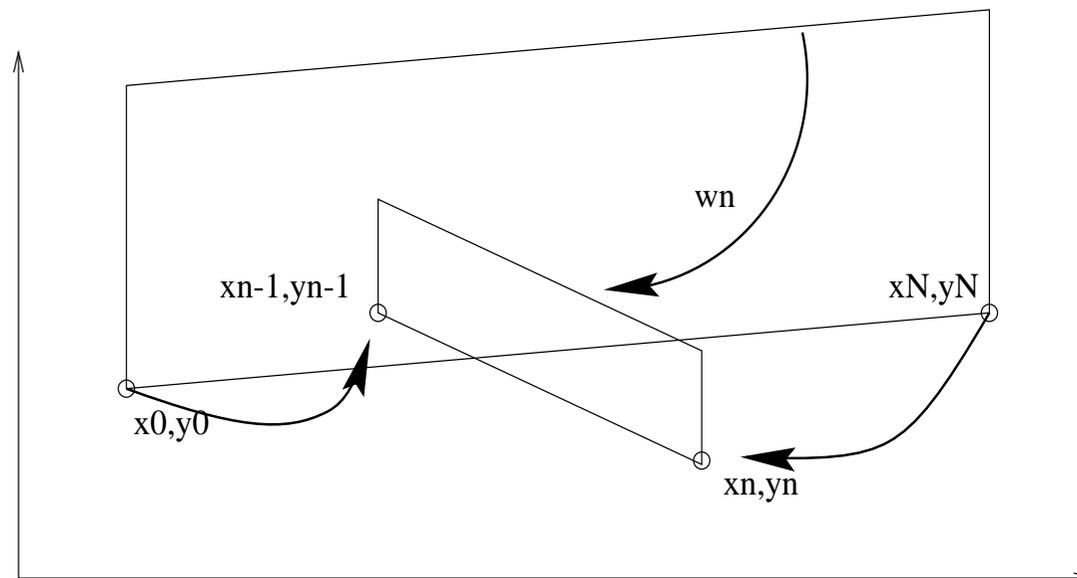
- ⊗ des signaux comme points fixes d'opérateurs
- ⊗ extension aux signaux aléatoires, opérateurs aléatoires
- ⊗ mouvements Browniens fractionnaires

IFS pour les signaux

idée : \mathcal{H} est un espace fonctionnel, métrique et complet.

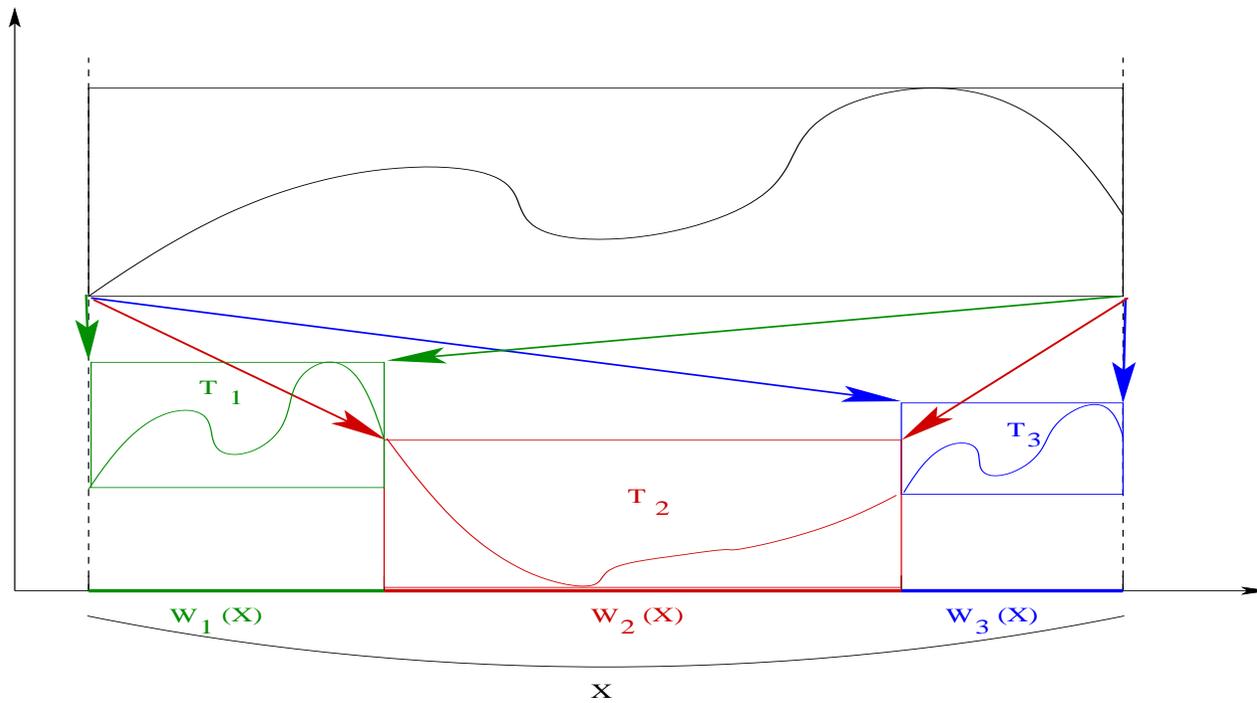
Forme des opérateurs ? IFS de \mathbb{R}^2 dont l'attracteur est le graphe d'une fonction.

$$w_n \mathbf{r} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \mathbf{r} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$



Principe

$$(Tf)(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_i (f(w_i^{-1}(x)), w_i^{-1}(x)) \mathbf{1}_{w_i(X)}(x)$$



N applications contractantes w_i de facteurs de contraction c_i définis par

$$c_i = \sup_{(x,y) \in [0,1]^2} \frac{d(w_i(x), w_i(y))}{d(x, y)}$$

et qui réalisent une partition de $[0, 1]$, c'est-à-dire

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^N w_i([0, 1])$$

$$\mu(w_i([0, 1]) \cap w_j([0, 1])) = 0, \forall i \neq j$$

N fonctions $\varphi_i(t, s)$ uniformément lipschitz en leur première variable, c'est-à-dire $|\varphi_i(t_1, s) - \varphi_i(t_2, s)| \leq K_i |t_1 - t_2|$, où K_i est une constante

positive. On définit alors l'opérateur T suivant par

$$T : L^p([0, 1]) \longrightarrow L^p([0, 1])$$

$$f \longmapsto Tf = \sum_{i=1}^N T_i f$$

$$(T_i f)(x) = \varphi_i(f(w_i^{-1}(x)), w_i^{-1}(x)) \mathbf{1}_{w_i(X)}(x)$$

Espaces de travail

$$L^p([0, 1]) = \left\{ f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} / \int_0^1 |f(t)|^p dt < +\infty \right\}$$

La distance adoptée est alors la distance classique

$$d_p(f, g) = \left\{ \int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt \right\}^{1/p}$$

Premier résultat : T est contractant dans $(L^p(X), d_p)$ sous la condition $\sum_i c_i K_i^p < 1$.

Deuxième résultat : La suite $T^n f_0$ converge vers une limite f_* , avec une vitesse exponentielle.

Conditions de continuité

Soient α et β les points fixes respectifs de $\varphi_1(x, a_0)$ et $\varphi_N(x, a_N)$.

Alors f_\star est continue si

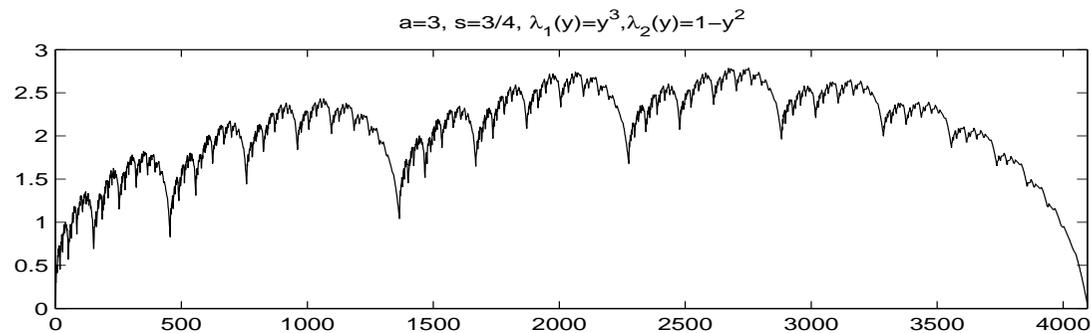
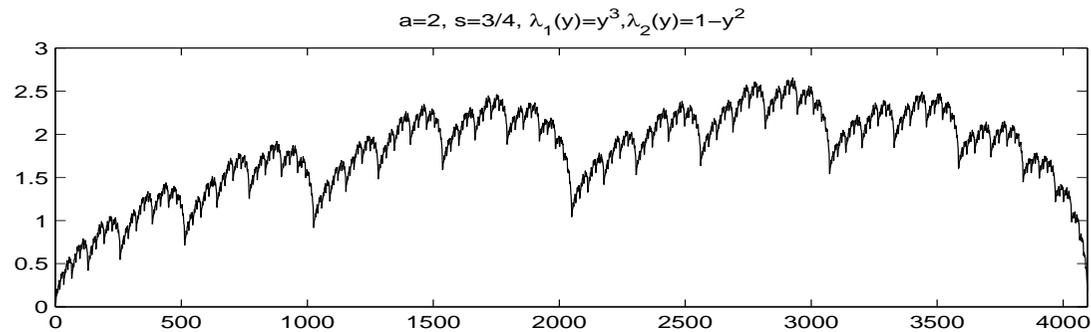
$$\varphi_i(\beta, a_N) = \varphi_{i+1}(\alpha, a_0)$$

Exemple

Soit $a \in]1, +\infty[$. On utilise

$$w_1(x) = \frac{x}{a} \quad \varphi_1(x, y) = s_1 x + \lambda_1(y)$$

$$w_2(x) = \frac{a-1}{a}x + \frac{1}{a} \quad \varphi_2(x, y) = s_2 x + \lambda_2(y)$$



Rendre aléatoire la construction?

Repose sur l'interprétation $Tf_\star = f_\star$ qui doit s'entendre en distribution...

On verra cela tout à l'heure, après d'autres modèles de fonction aléatoires fractales...

Mouvement Brownien (Fractionnaire)

Brown(1850), Einstein, Lévy, Wiener (1900→) ... Mandelbrot et Van Ness 1968

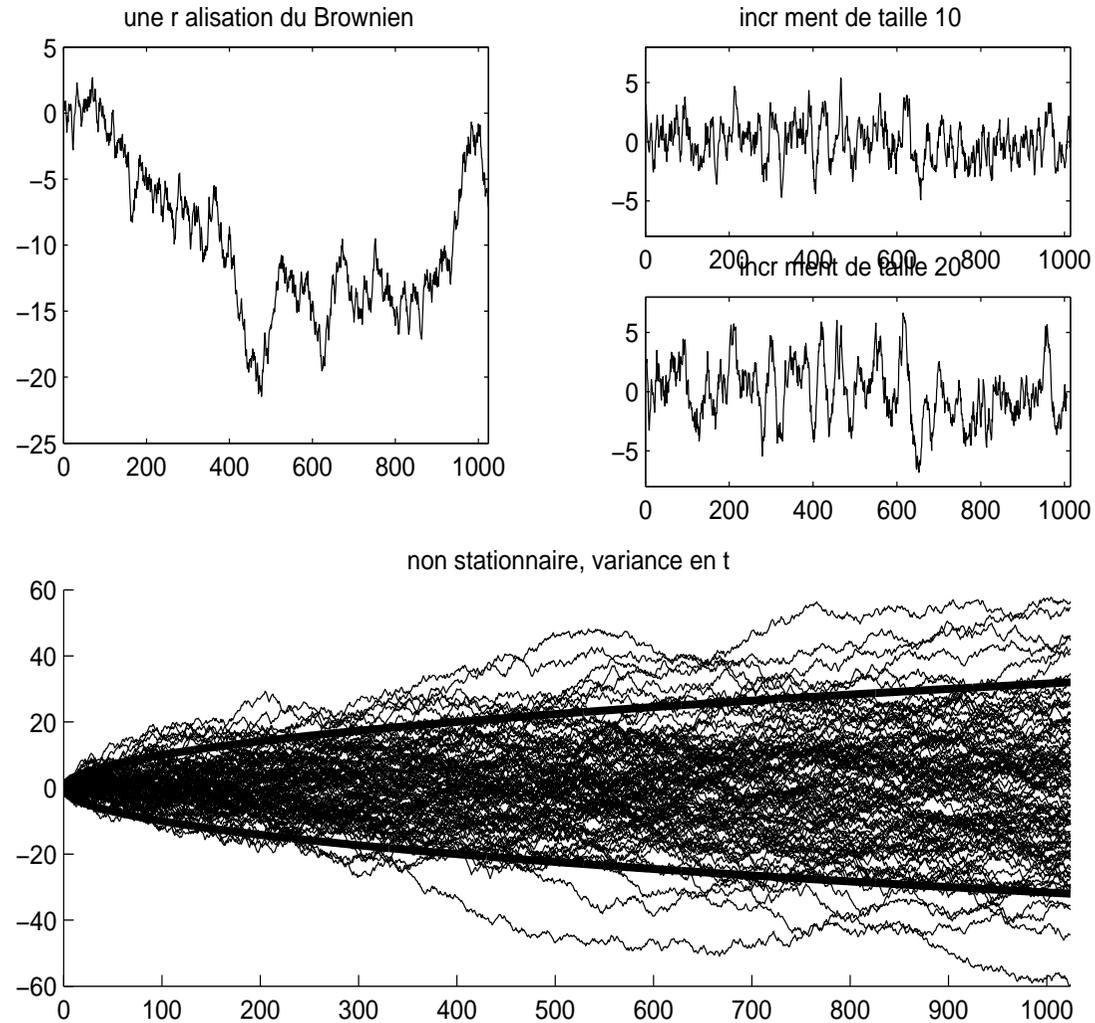
Mouvement Brownien : processus limite de

1. $x(0) = 0$,
2. $x(n.dt) = x((n - 1)dt) + a_n$, où a_n prend les valeurs $\pm\eta$ équiprobablement indépendamment des intervalles précédents. Pour les temps négatifs, la marche est définie de même.

Principales propriétés :

- ⊗ gaussien, non stationnaire
- ⊗ autosimilaire : $B(at) \stackrel{d}{=} a^{1/2}B(t)$
- ⊗ accroissements indépendants et stationnaires.

Mouvement Brownien : illustrons...



Mouvements browniens fractionnaires

le brownien : seul processus gaussien auto-similaire à accroissements indépendants stationnaires.

D'autres processus gaussiens auto-similaires ?

Un fBm d'index $H \in]0, 1[$ est défini par

$$\begin{aligned}
 B_H(0) &= 0 \\
 B_H(t) &= \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \left[\int_{-\infty}^0 \left(|t - \tau|^{H-1/2} - |\tau|^{H-1/2} \right) dB(\tau) \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^t |t - \tau|^{H-1/2} dB(\tau) \right]
 \end{aligned}$$

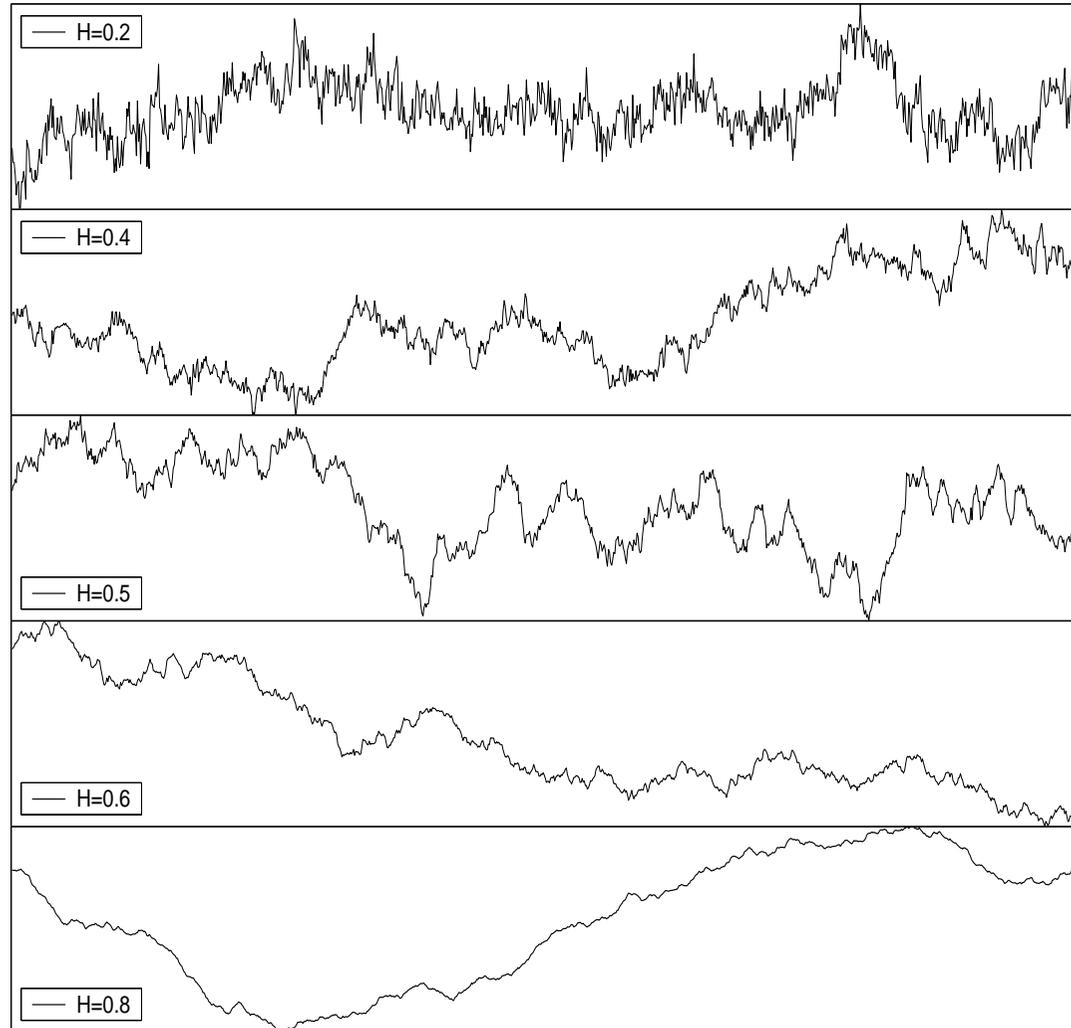
Moyenne mobile qui conserve l'autosimilarité et la stationnarité des incréments...

Traces fractales

Les réalisations du mouvement brownien fractionnaire ont presque-sûrement une dimension de Hausdorff

$$D = 2 - H$$

Mouvement brownien fractionnaire : illustrons...



Propriétés

- ⊗ structure de corrélation
- ⊗ processus gaussien non stationnaire
- ⊗ autosimilaire d'index H : $B_H(t) \stackrel{d}{=} \lambda^{-H} B_H(\lambda t)$
- ⊗ continuité et dérivabilité des traces, coefficient de Hölder
- ⊗ incréments, longue dépendance

Structure à l'ordre 2

processus évidemment centré, de fonction de corrélation :

$$E[B_H(t_1)B_H(t_2)] = \frac{V_H}{2} (|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H})$$

car la variance des incréments $B_\delta(t) = B_H(t + \delta) - B_H(t)$

$$E[B_\delta(t)^2] = V_H |\delta|^{2H}$$

où

$$V_H = \text{Var}[B_H(1)] = \sigma^2 \Gamma(1 - 2H) \cos(\pi H) / (\pi H)$$

Gaussianité et non stationnarité

calcul de la fonction de corrélation \implies processus non stationnaire

Comme transformée linéaire d'un processus gaussien \implies gaussien :

$$P_{B_H(t)}(x; t) \sim \mathcal{N}(0, V_H |t|^{2H})$$

et à deux dates

$$\mathcal{N} \left(\mathbf{0}, \frac{V_H}{2} \begin{pmatrix} 2|t_1|^{2H} & |t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H} \\ |t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H} & 2|t_2|^{2H} \end{pmatrix} \right)$$

Autosimilarité

A l'aide des densités de probabilités on montre facilement

$$B_H(t) \stackrel{d}{=} \lambda^{-H} B_H(\lambda t), \forall \lambda > 0$$

Continuité et dérivabilité

Les traces du fBm sont presque sûrement continu, mais non dérivable (dur à montrer).

Limitons nous à la moyenne quadratique.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{E[(B_H(t + \delta) - B_H(t))^2]}{\delta^2} = \infty$$

le fBm n'est donc pas dérivable en MQ. Mais

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{E[(B_H(t + \delta) - B_H(t))^2]}{\delta^{2\alpha}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < H \\ \infty & \text{si } \alpha > H \\ C & \text{si } \alpha = H \end{cases}$$

un signal aléatoire $x(t)$ a un exposant de Hölder $H < 1$ si

$$\sup_{\alpha} \left\{ \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{E[(x(t + \delta) - x(t))^2]}{\delta^{2\alpha}} < +\infty \right\} = H$$

Incréments, notion de longue dépendance

Pour régulariser le fBm, on l'intègre selon

$$B_H(t, \delta) = \delta^{-1} \int_t^{t+\delta} B_H(s) ds = \int B_H(s) \varphi(t-s) ds$$

où $\varphi(t) = \delta^{-1} \mathbf{1}_{[0, \delta]}(t)$. Si φ est choisie plus douce, on entre dans la théorie des distributions ! Le processus $B_H(t, \delta)$ est dérivable et l'on obtient

$$B'_H(t, \delta) = \delta^{-1} (B_H(t + \delta) - B_H(t))$$

bruit gaussien fractionnaire... de corrélation

$$C_H(\tau, \delta) = E[B'_H(t, \delta) B'_H(t + \tau, \delta)] = \frac{V_H \delta^{-2}}{2} (|\tau + \delta|^{2H} + |\tau - \delta|^{2H} - 2|\tau|^{2H})$$

Le comportement de la fonction de corrélation du fGn dépend de H et du comportement de τ/δ . En écrivant

$$C_H(\tau, \delta) = \frac{V_H \delta^{2H-2}}{2} \left(\left| \frac{\tau}{\delta} + 1 \right|^{2H} + \left| \frac{\tau}{\delta} - 1 \right|^{2H} - 2 \left| \frac{\tau}{\delta} \right|^{2H} \right)$$

on montre en effectuant un développement limité que

1. si $|\tau|/\delta \gg 1$:

$$C_H(\tau, \delta) \approx V_H H (2H - 1) |\tau|^{2H-2}$$

2. si $|\tau|/\delta \ll 1$:

$$C_H(\tau, \delta) \approx C_H(0, \delta) + V_H \delta^{-2} |\tau|^{2H}$$

Comportement asymptotique

Quand $|\tau| \rightarrow +\infty$, $|\tau|/\delta \gg 1$ et

1. $H > 1/2$: La corrélation est positive, et en $+\infty$, elle décroît vers zéro comme τ^{2H-2} et $2H - 2 \in] - 1, 0[$. La décroissance de la fonction de corrélation est donc plus lente que $1/\tau$ de sorte que la corrélation n'est pas sommable!

dépendance ou mémoire longue

2. $H < 1/2$: La corrélation est négative pour τ suffisamment grand. On peut alors montrer que la somme de la corrélation est nulle, de sorte que l'on se trouve dans un cas plus classique, bien que la décroissance à l'infini soit lente.

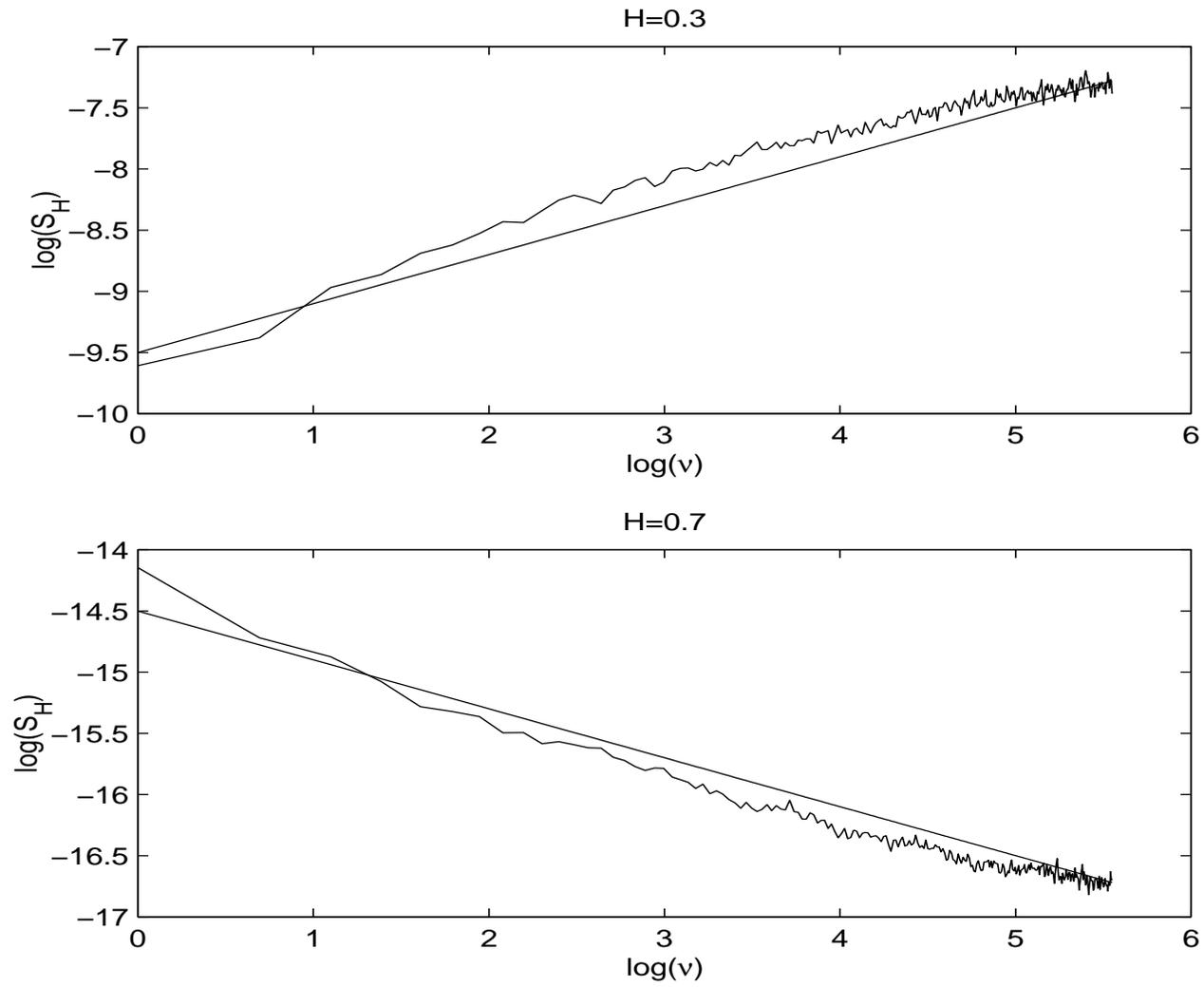
Comportement spectral

heuristique :

$$\begin{aligned}\gamma_H(\nu, \delta) &= \int^{+\infty} |\tau|^{2H-2} e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{|\nu|^{2H-1}} \int^{+\infty} |u|^{2H-2} e^{-2i\pi u} du\end{aligned}$$

$$\gamma_H(\nu, \delta) \longrightarrow \frac{C(H)}{|\nu|^{2H-1}} \quad \text{quand } \nu \longrightarrow 0$$

Illustrons...



et pour le fBm?

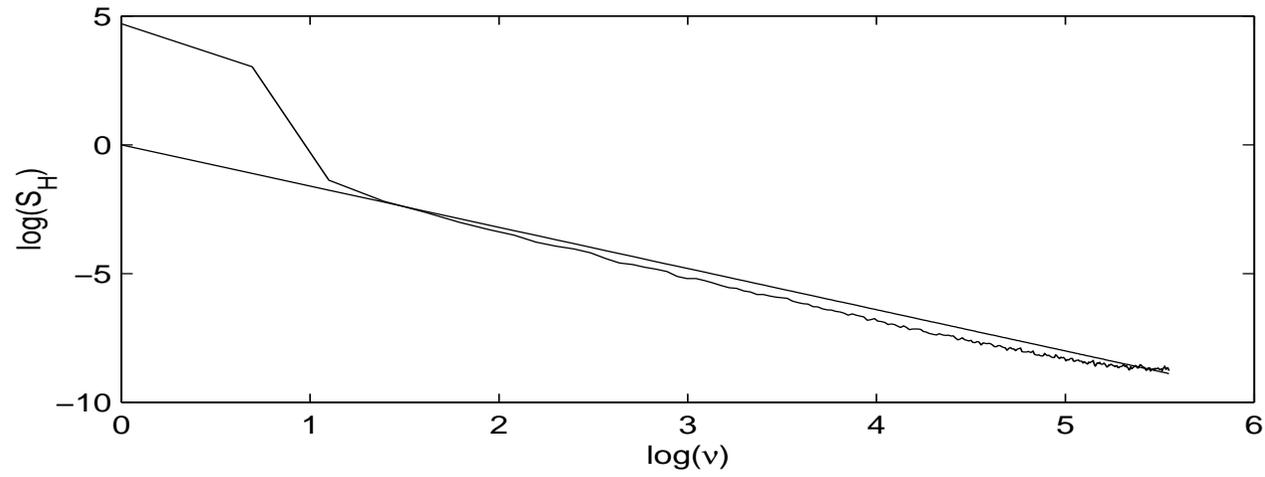
la notion de spectre n'a pas de sens, mais, approche temps-fréquence :
 “spectre” de Wigner-Ville

$$\begin{aligned} W_B(t, \nu) &= \int r_B\left(t - \frac{\tau}{2}, t + \frac{\tau}{2}\right) e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau \\ &= (1 - 2^{1-2H} \cos(4\pi\nu t)) \frac{1}{|2\pi\nu|^{2H+1}} \end{aligned}$$

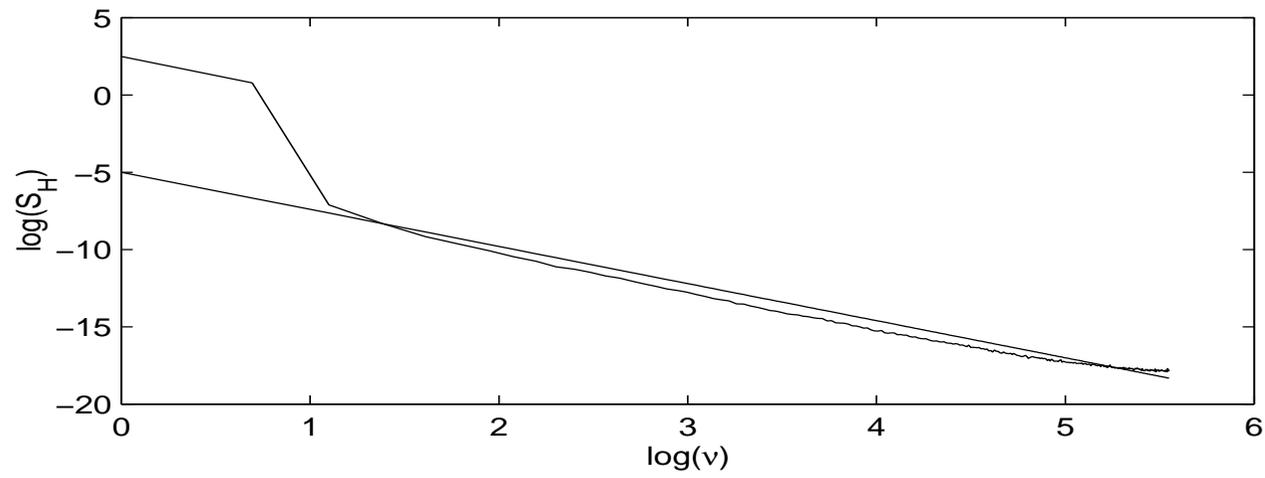
$$\frac{1}{T} \int_0^T W_B(t, \nu) dt = \frac{1}{|2\pi\nu|^{2H+1}} \quad \text{si } T = k/4\nu.$$

Illustrons...

H=0.3



H=0.7

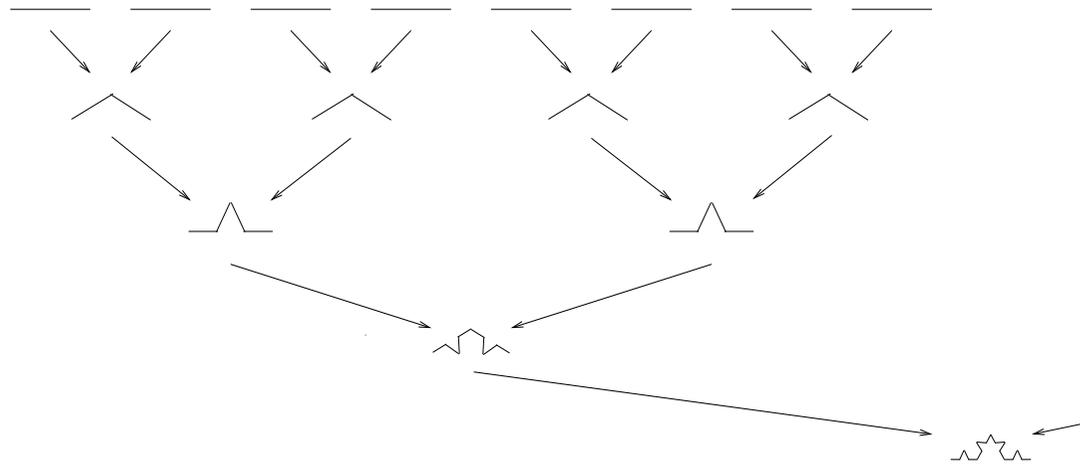


IFS aléatoires

$$A_\star = W(A_\star)$$

s'interprète comme

1. séquentiellement : on calcule la suite $W^n(A_0)$
2. récursivement : $W^n(A_0) = \cup_{i=1}^N W_i(W^{n-1}(A_0))$



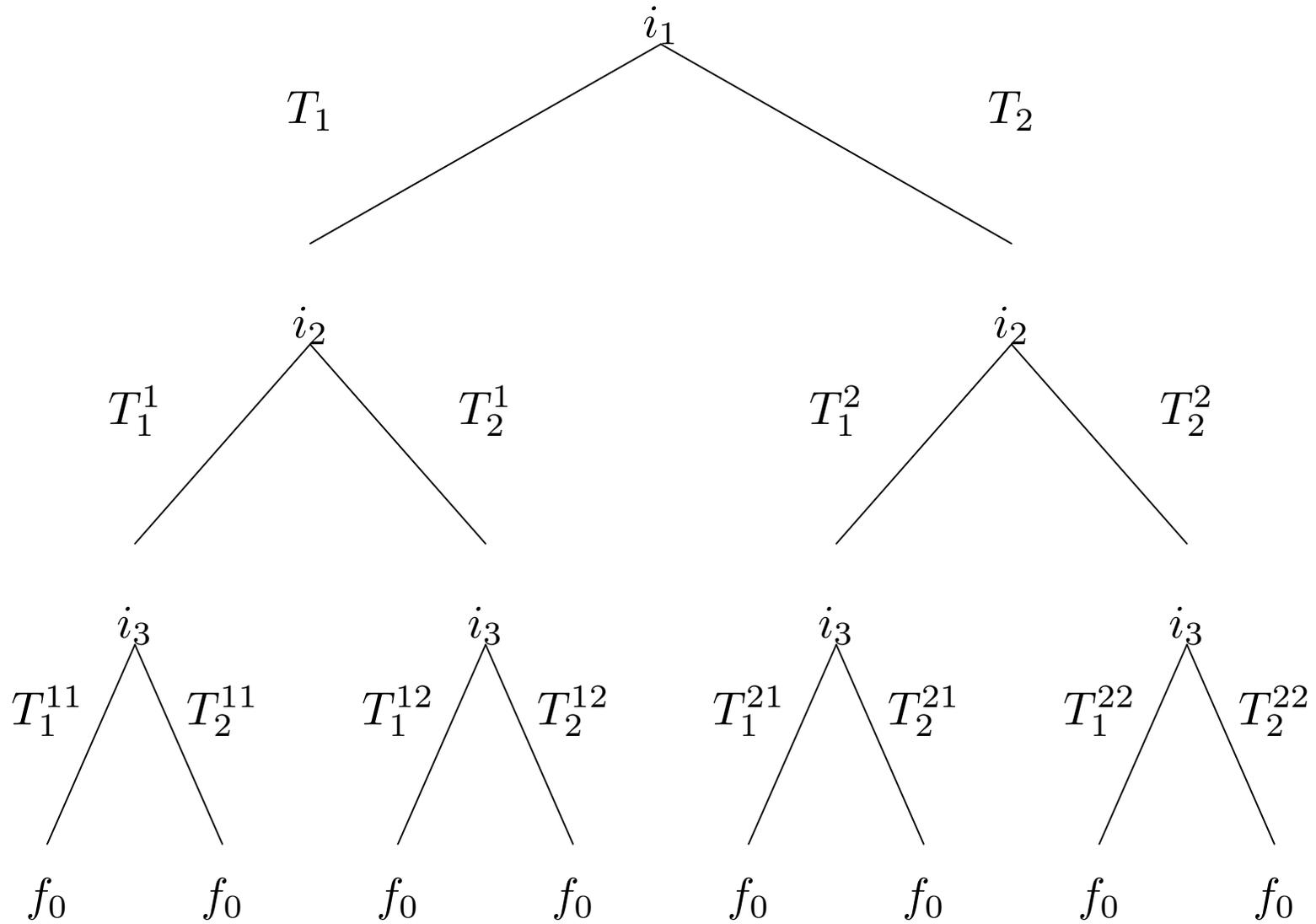
$w_{1,2}$: contraction, réflexion, rotation

Passage au cas aléatoire pour les fonctions

$(T^n f_0) = \sum_{i=1}^N (T_i(T^{n-1} f_0))$, $T = \{T_i\}_{i=1,\dots,N}$ aléatoire

T_i est une application Lipschitzienne aléatoire, les w_i étant déterministes elles sont tirées à chaque itération suivant une même loi, indépendamment les unes des autres :

1. itération 1 : $T^1 f_0 = \sum_{i_1} T_{i_1} f_0$ où les T_{i_1} tirés suivant la loi des $T_{i=1\dots N}$
2. itération 1 : $T^2 f_0 = \sum_{i_1, i_2} T_{i_1} \circ T_{i_2}^{i_1} f_0$ où les $T_{i_2}^{i_1}$ ($i_{1,2} = 1 \dots N$) tirés suivant la loi des $T_{i=1\dots N}$, indépendamment des T_{i_1} , et $T_{i_2}^i$ indépendant de $T_{i_2}^j$ si $i \neq j$
3. itération n : $T^n f_0 = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} T_{i_1} \circ T_{i_2}^{i_1} \circ \dots \circ T_{i_n}^{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} f_0$ où les $T_{i_n}^{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}$ tirés suivant la loi des $T_{i=1\dots N}$, indépendamment des itérations précédentes. De plus, $T_{i_n}^{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}$ et $T_{i_n}^{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}}$ indépendants si $i \neq j$.



Alors

Soient $\{(\varphi_i(x))_{i=1,\dots,N}\}$ N fonctions aléatoires lipschitziennes, avec les constantes (aléatoires) r_i ; soient N fonctions contractantes w_i qui forment une partition de $\mathbb{X} = [0, 1]$, avec les facteurs de contraction p_i ; supposons que $\lambda_p = E[\sum_i p_i r_i^p] < 1$ et $E[\sum p_i |\varphi_i(0)|^p] < \infty$ pour $1 < p < \infty$. Alors, $\forall f_0 \in L_p(\mathbb{X})$

$$E^{1/p}[d_p^p(T^n f_0, f_\star)] \leq \frac{\lambda_p^{n/p}}{1 - \lambda_p^{1/p}} E^{1/p}[d_p^p(f_0, T f_0)] \longrightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$.

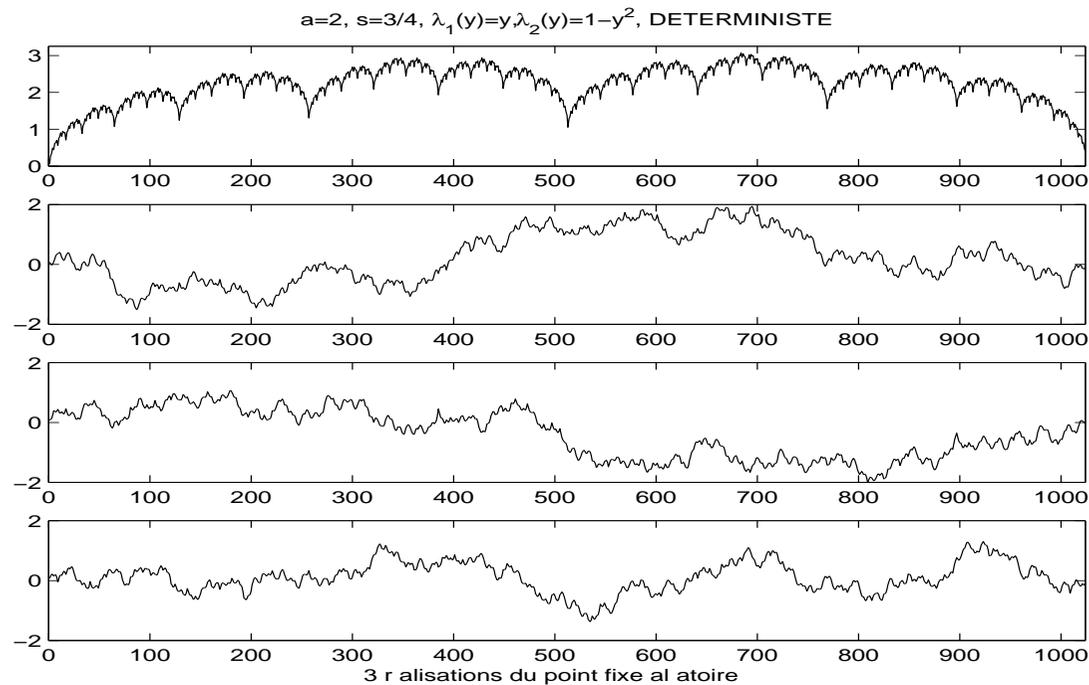
De plus, en distribution, f_\star est un point fixe de T .

Exemple

Soit $a \in]1, +\infty[$. Soit $\varepsilon = \pm 1$ avec probabilité $1/2$

$$w_1(x) = \frac{x}{a} \quad \varphi_1(x, y) = s_1 x + \varepsilon \lambda_1(y)$$

$$w_2(x) = \frac{a-1}{a} x + \frac{1}{a} \quad \varphi_2(x, y) = s_2 x + \varepsilon \lambda_2(y)$$



et les statistiques sont des IFS déterministes...

$$\text{Cum}_n[f_\star(x)] = \text{Cum}_n[\varepsilon] \sum_{\nu=1}^{+\infty} s^{n(\nu-1)} \lambda_{q_\nu}^n (w_{\mathbf{q}}^{-1}(x))$$

