FRACTALES (et ondelettes)

Pierre-Olivier Amblard

Laboratoire des Images et des Signaux, UMR CNRS 5083

Groupe Non Linéaire

Fractales–3ème, analyse en ondelettes

- Ondelettes continues
- Ondelettes et signaux höldériens
- Analyse en ondelette des signaux fractals

Représentation en temps, en fréquence,...

espace L^2 des signaux déterministes,

$$E_x = ||x(t)||^2 = \int |x(t)|^2 dt < +\infty$$

Le signal admet une transformée de Fourier

$$X(\nu) = \int x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

La transformée de Fourier est unitaire : elle conserve les produits scalaires.

Encombrements temporel et fréquentiel

$$\begin{aligned}
\Delta t^2 &= \frac{1}{E_x} \int (t - m_x)^2 |x(t)|^2 dt \\
\Delta \nu^2 &= \frac{1}{E_x} \int (\nu - m_X)^2 |X(\nu)|^2 d\nu
\end{aligned}$$

alors,

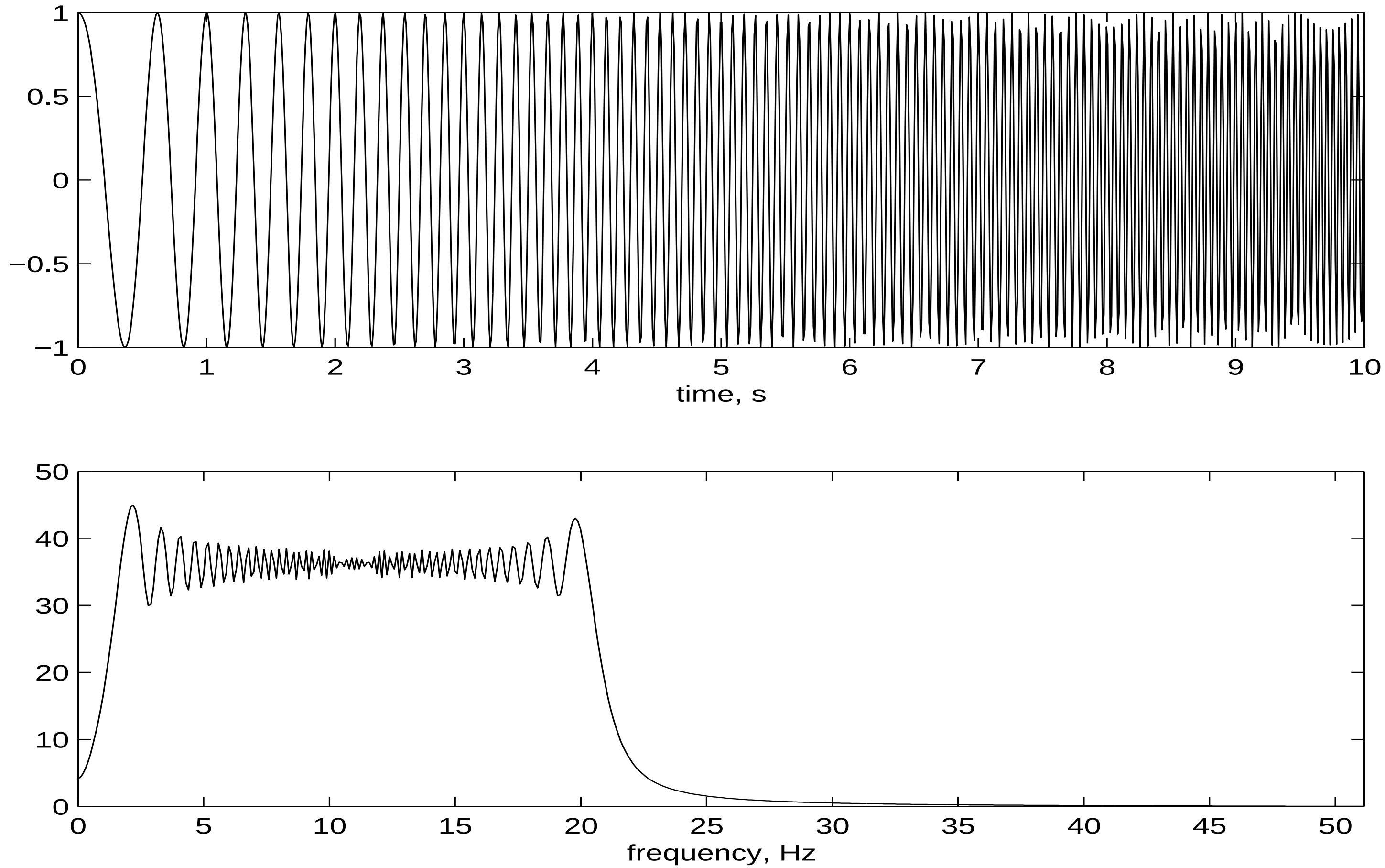
$$\Delta t \Delta \nu \geq \frac{1}{4\pi}$$

avec égalité si

$$x(t) = a e^{-2i\pi m_X t} e^{-b(t-m_x)^2}$$

. . . et leurs limites

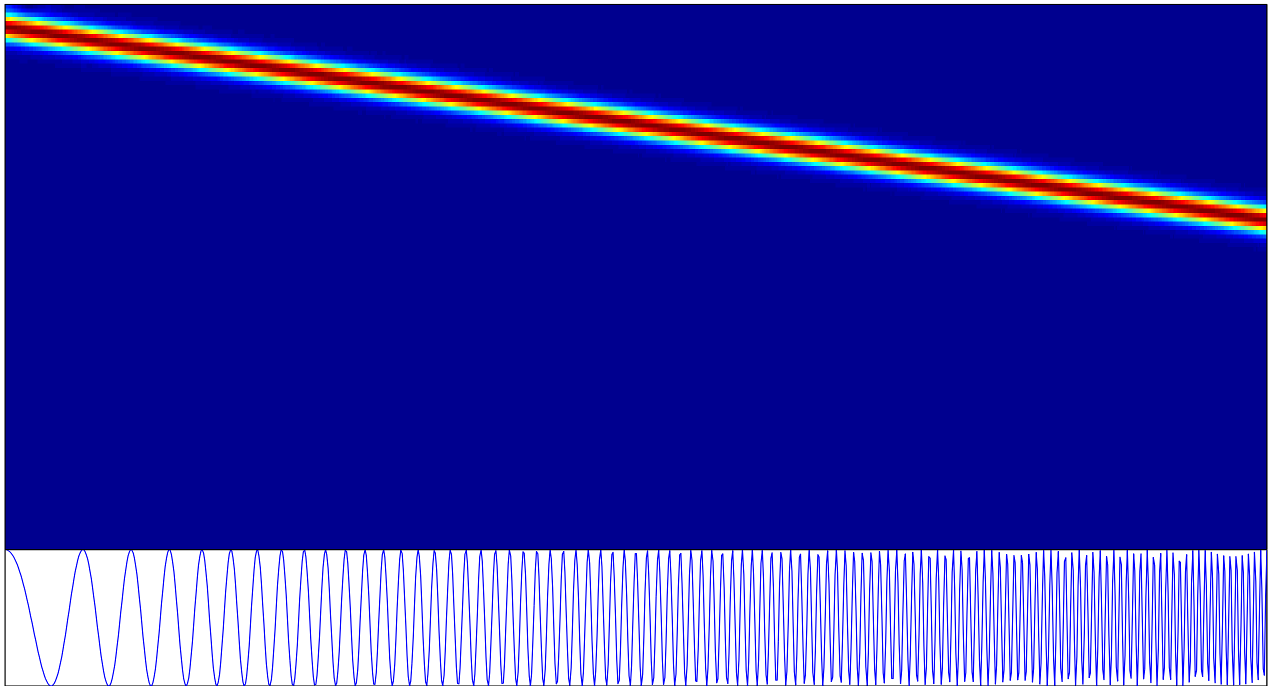
représentation fréquentielle : présuppose le même contenu à tous temps



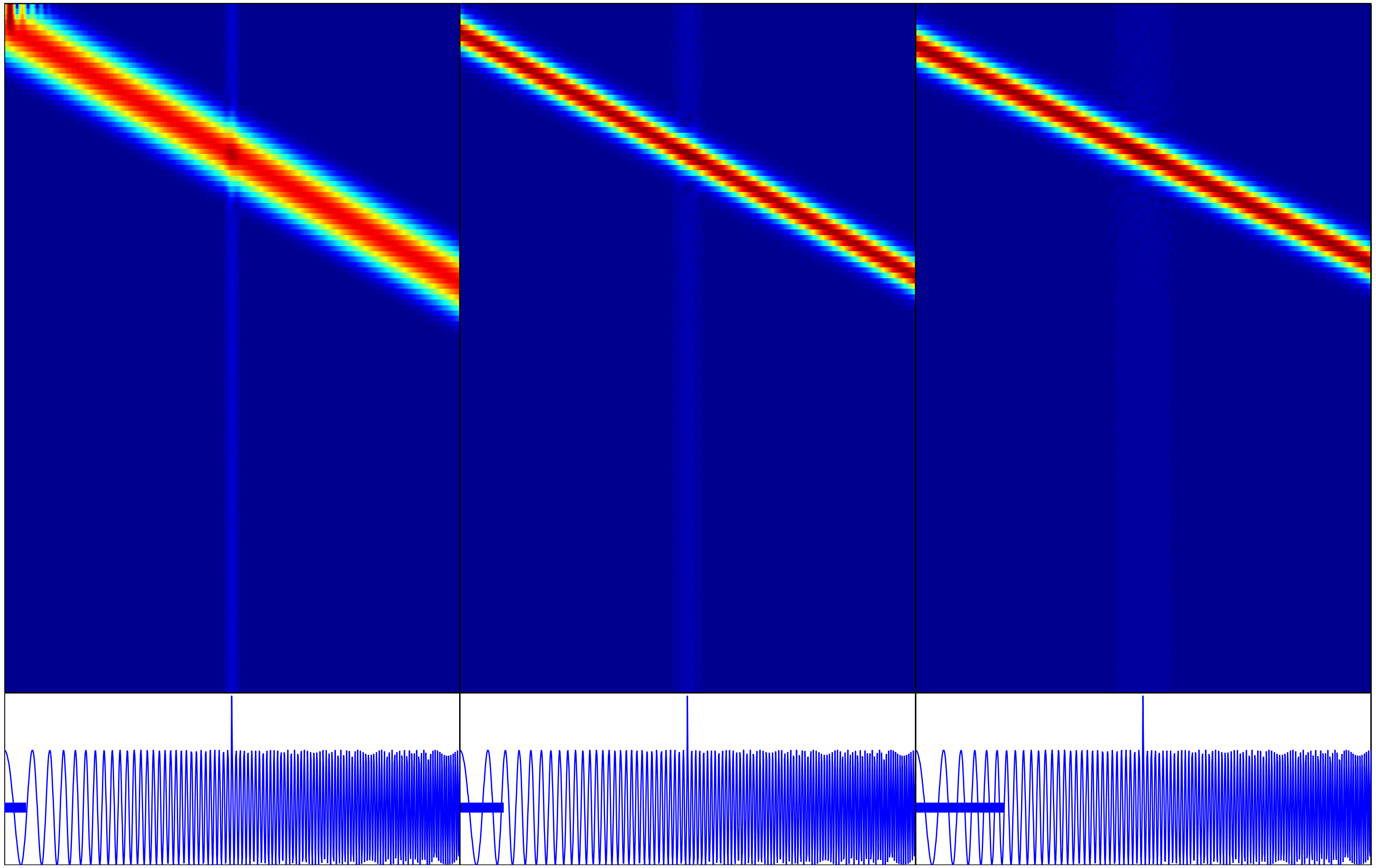
Représentation temps-fréquence

idée : analyser le contenu fréquentiel à travers une fenêtre glissante

$$F(t,\nu) = \int x(u)h^*(u-t)e^{-2i\pi\nu u}du$$



Plan temps-fréquence, son pavage, et ses problèmes

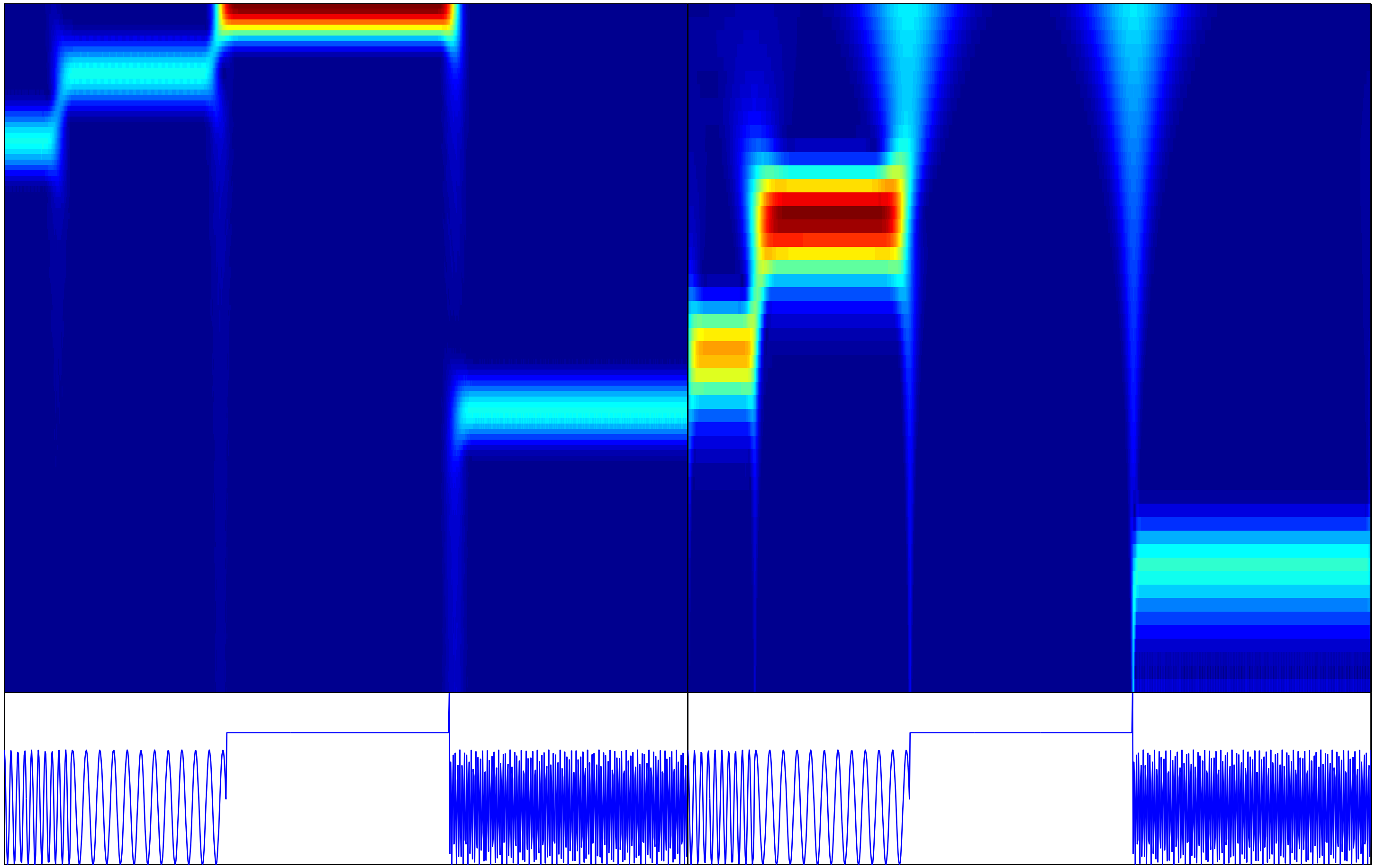


Même résolution quelque soit la rapidité des phénomènes etudiés…

Un pavage alternatif

bonne résolution fréquentielle pour les phénomènes lents,

bonne résolution temporelle pour les phénomènes rapides



Transformée en ondelettes

Soit $\psi(t)$ une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ et $x(t)$ un signal de $L^2(\mathbb{R})$.

$$T_x(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(u)\psi^*\left(\frac{u-b}{a}\right) du$$

Condition d'admissibilité et formule de reconstruction

Sous la condition dite d'admissibilité,

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\nu)|^2}{\nu} d\nu < +\infty$$

où $\hat{\psi}(\nu)$ est la transformée de Fourier de l'ondelette, on a

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int T_x(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \frac{dadb}{a^2}$$

La condition d'admissibilité impose que la transformée de Fourier de l'ondelette soit nulle pour la fréquence nulle. Autrement dit

$$\int \psi(t) dt = 0$$

Signaux höldériens

Un signal $f(t)$ est dit höldérien en t_0 d'ordre $n+\alpha$, $\alpha \in]0,1[$, s'il vérifie

$$|f(t) - P_n(t - t_0)| \leq C|t - t_0|^{n+\alpha}$$

où $P_n(t)$ est un polynôme de degré n.

Analyse en ondelettes des signaux höldériens

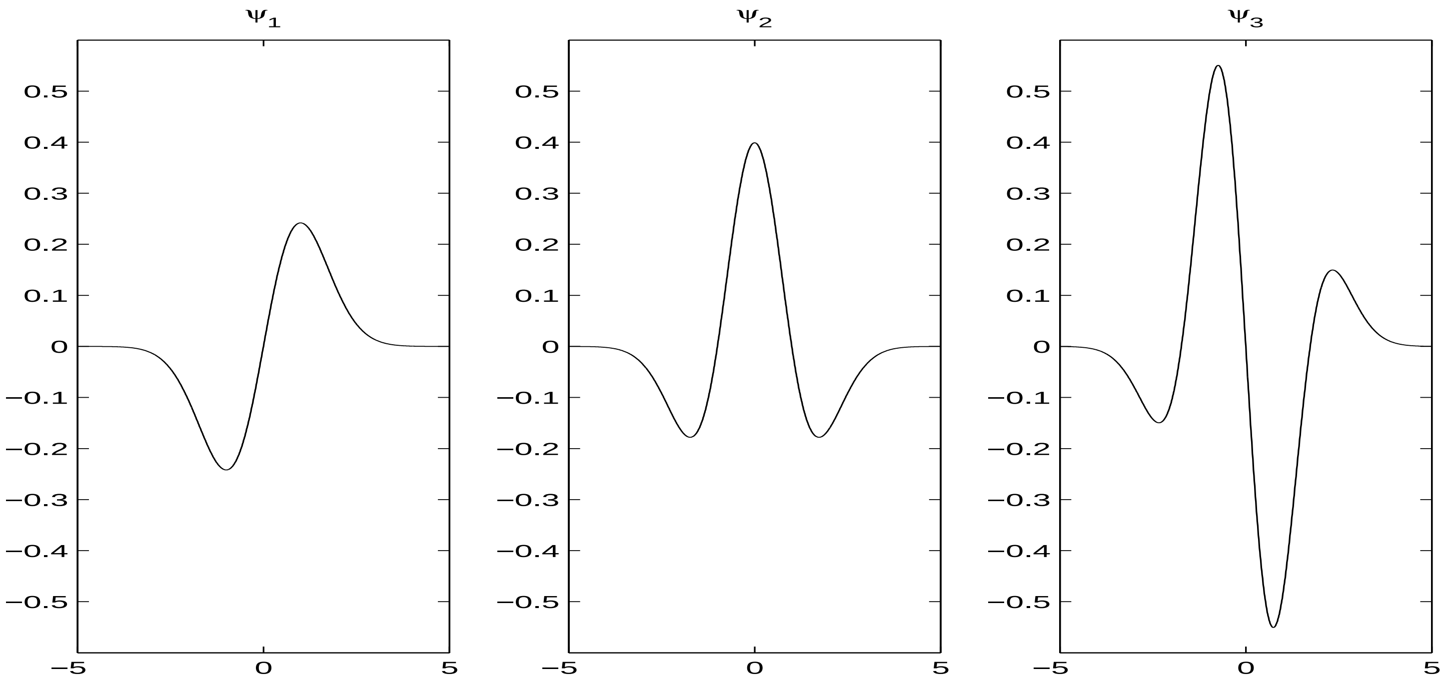
Soit $f(t)$ un signal höldérien en t_0 d'ordre $n+\alpha$, $\alpha \in]0,1[$. Si l'ondelette ψ a au moins $n+1$ moments nuls, si $\int (1+|t|)^{n+1}|\psi(t)|dt < +\infty$, alors la transformée en ondelette de f en t_0 vérifie.

$$|T_f(a,t_0)| \leq Ca^{n+\alpha+1/2}$$

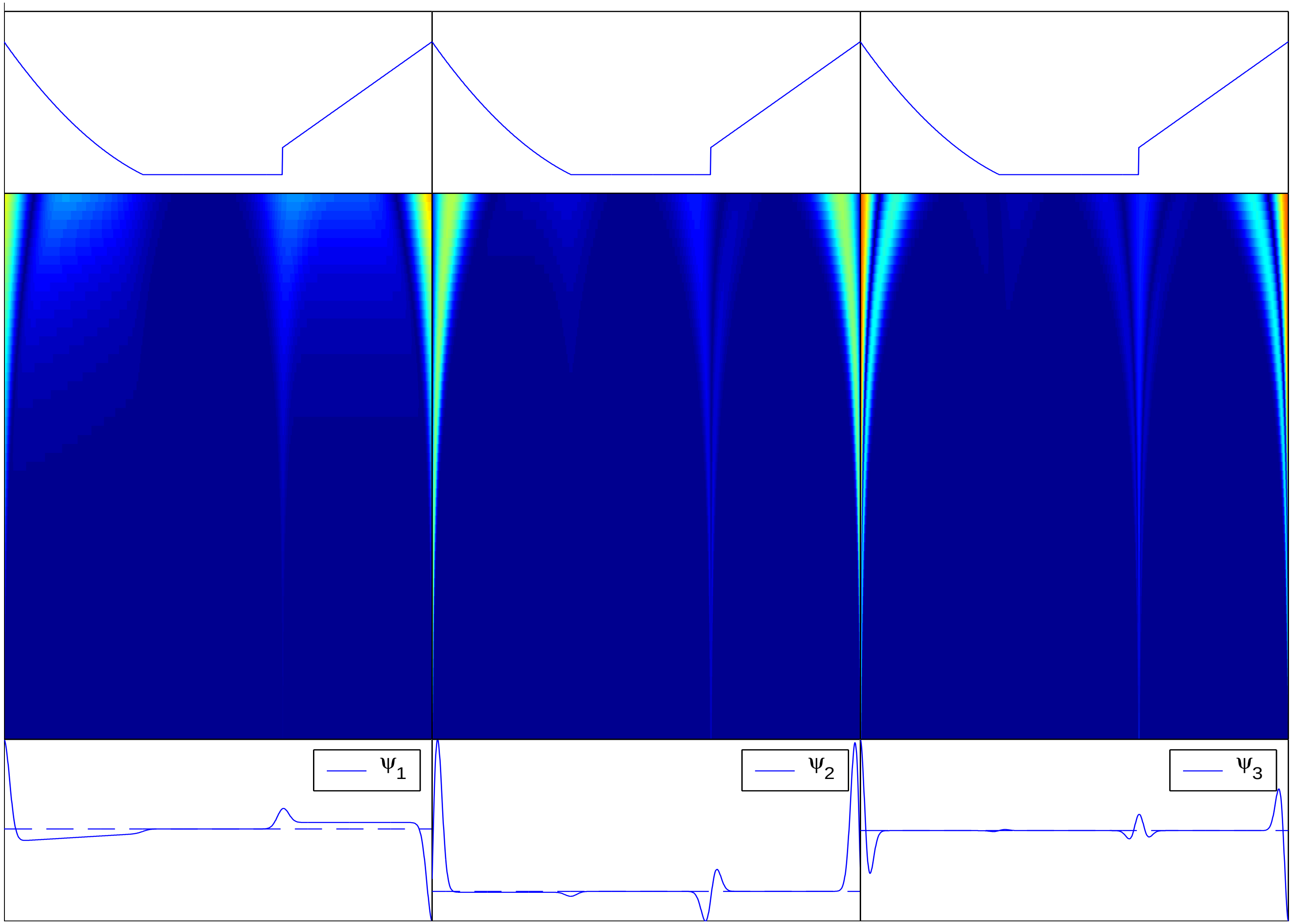
Une famille d'ondelettes : les dérivées de gaussienne

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \quad \text{et} \quad \psi_n = (-1)^n \frac{d\psi_{n-1}(t)}{dt}$$

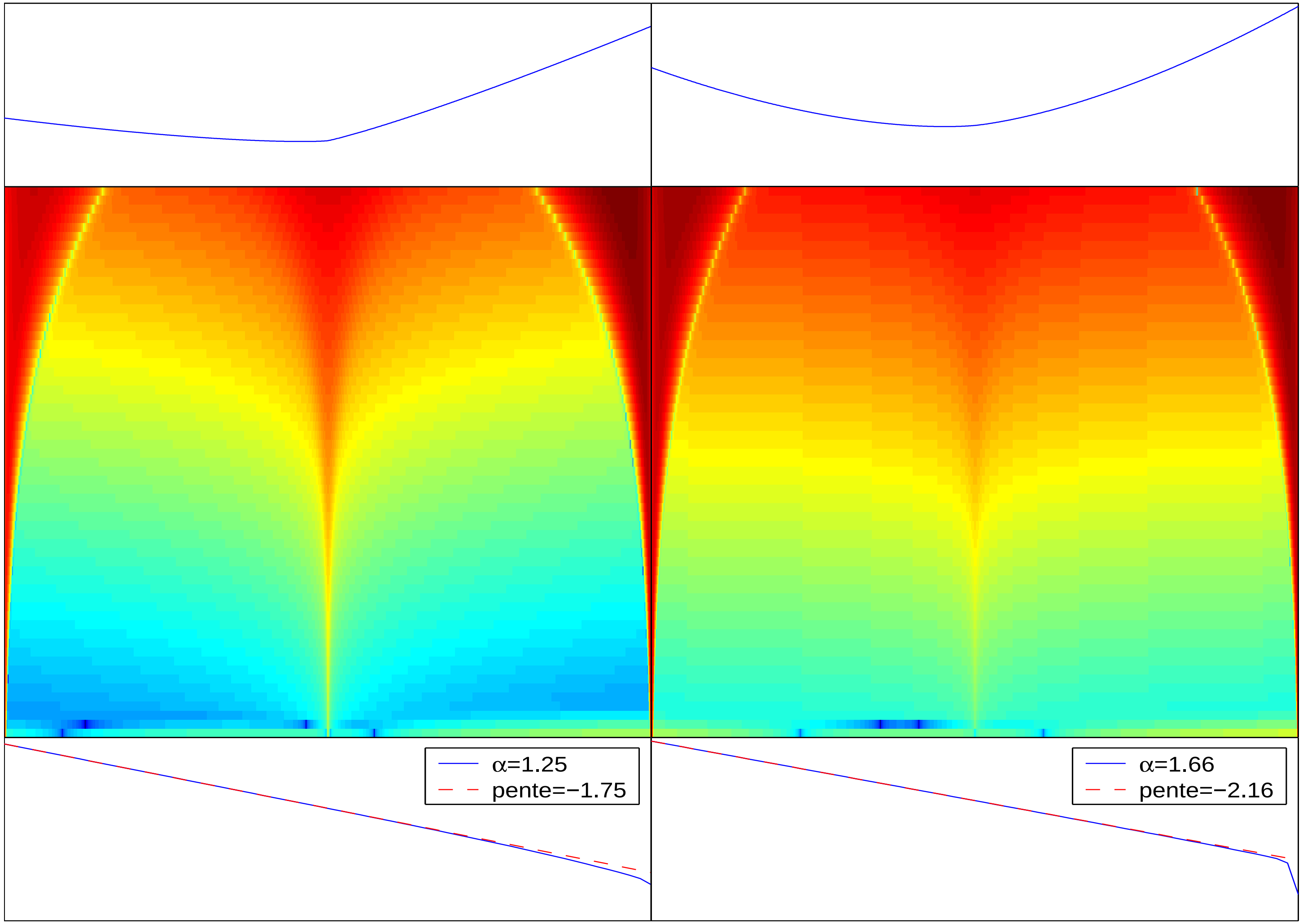
sont des ondelettes avec n moments nuls.



Illustration



Estimation $x(t) = t + |t|^{\alpha}, \alpha \in [0, 1]$



Ondelettes et fBm

Considérons un fBm d'index H. Sa transformée en ondelette

$$T_B(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int B_H(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

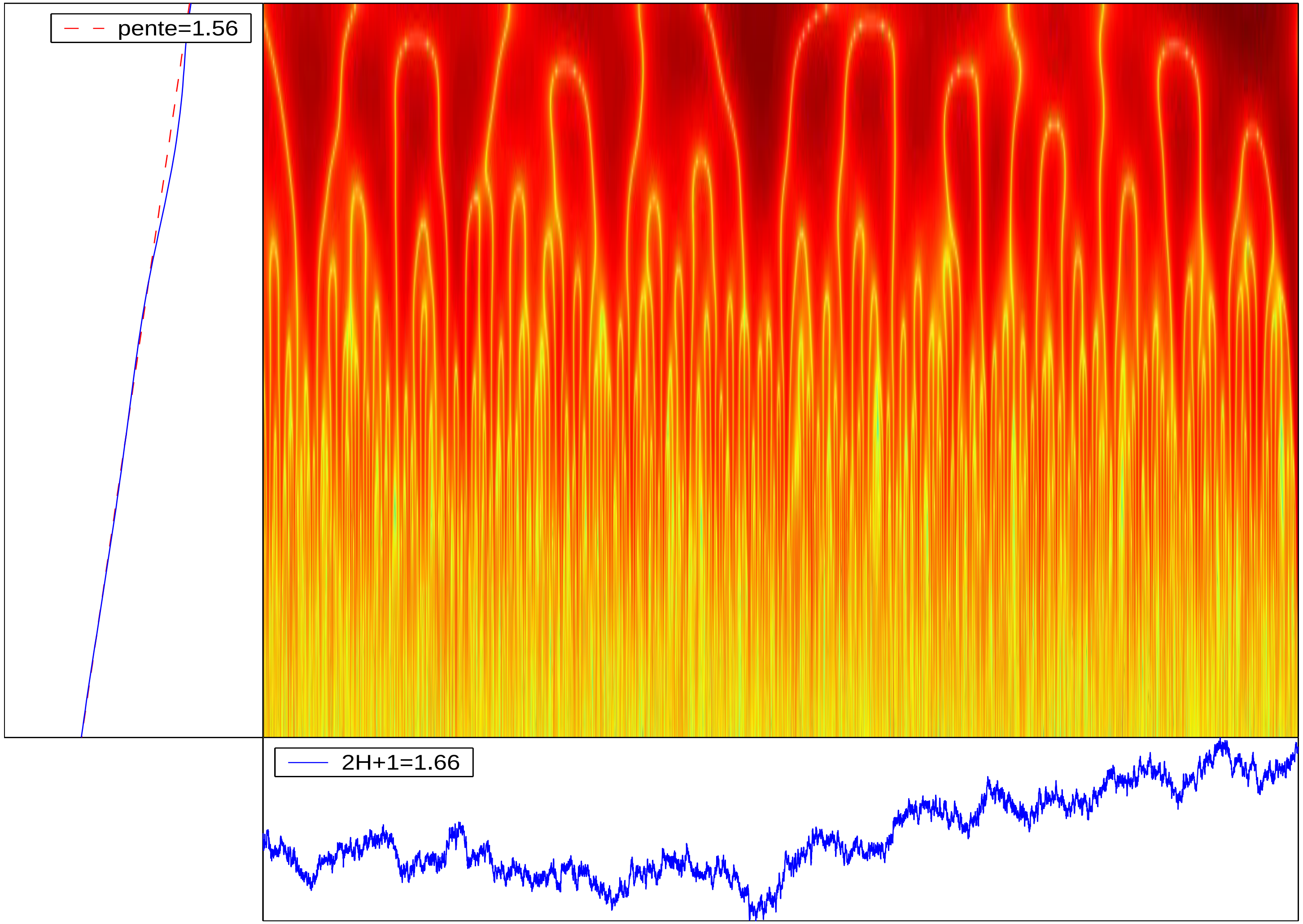
est un champ aléatoire centré gaussien.

- A une échelle donnée a, la transformée en ondelette est stationnaire au second ordre
- A une échelle donnée et un temps b fixé, $\mathrm{Var}[T_B(a,b)] \propto a^{2H+1}$

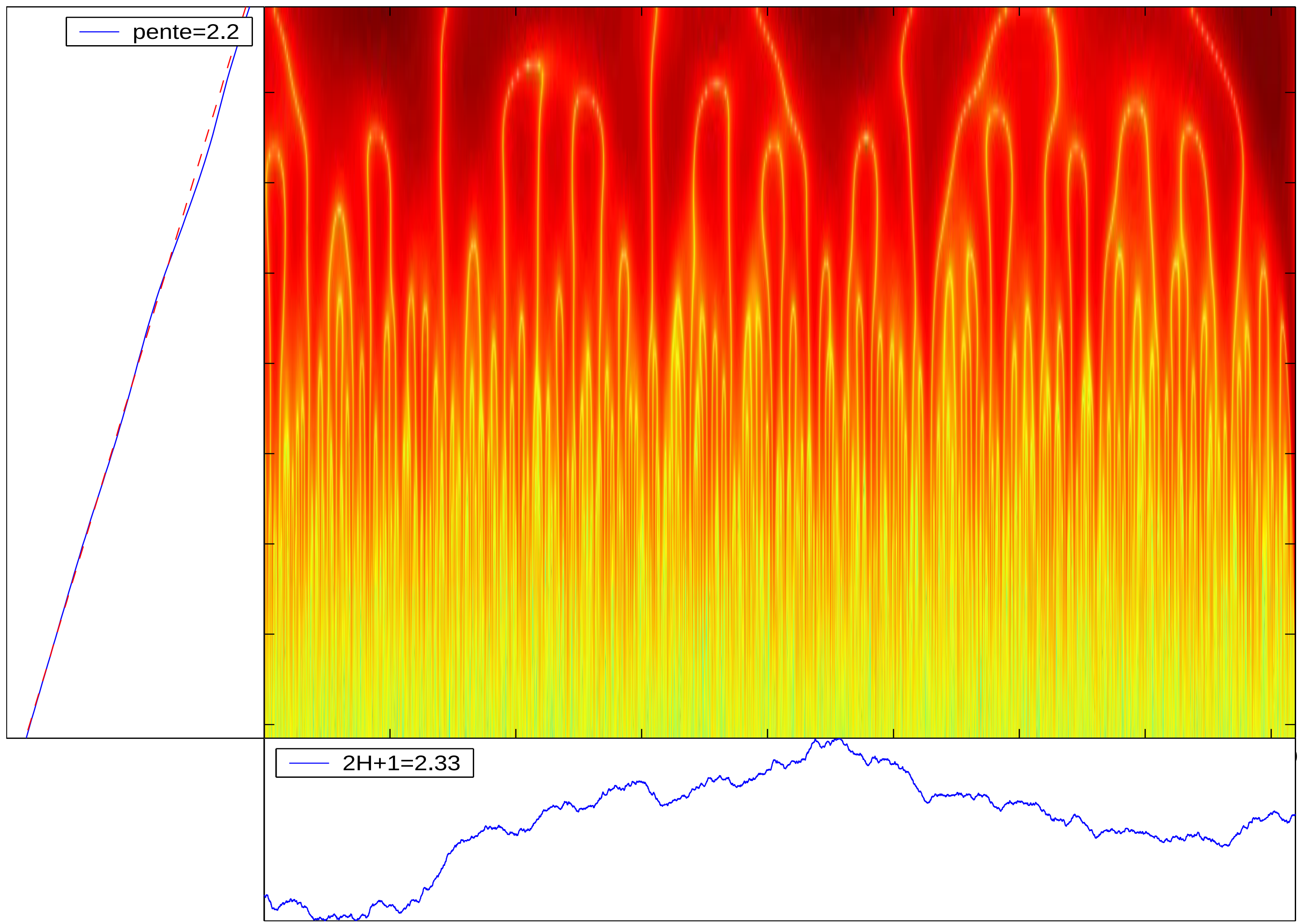
idée pour estimer H, calcul de

$$S_B(a) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |[T_B(a,b)|^2 db$$

$H = 0.33$



$H = 0.66$



Bruits en $1/f$ et estimation spectrale

bruit en $1/f$: signal stationnaire de DSP $S_x(\nu) = C/\nu^\alpha$.

Corrélation $\Gamma_x \propto |\tau|^{\alpha-1}$

On doit avoir $\alpha < 1$.

Si $\alpha \in]0,1[$, longue dépendance

Deux estimateurs spectraux : spectrogramme

$$\hat{S}p_x(\nu) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left| \int x(t)h^*(t-b)e^{-2i\pi\nu t}dt \right|^2 db$$

et scalogramme

$$\hat{S}c_x(a) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{a} \left| \int x(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \right|^2 db$$

Ondelette, 1er effet : biais

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E[\hat{S}c_x(a = \nu_0/\nu)] & = & C\nu^{-\alpha} b_1 \\ E[\hat{S}p_x(\nu)] & = & C\nu^{-\alpha} b_2(\nu) \end{array} \right.$$

$\Longrightarrow$ adéquation analyse en banc de filtre à surtension constante et processus en $1/f$.

Ondelette, 2ème effet : variance

Variance d'estimateurs calculés sur une durée T de grandeurs

- blanches ou mélangeantes : $\mathrm{Var}[\widehat{e}] \propto 1/T$
- à longue dépendance : $\mathrm{Var}[\widehat{e}] \propto 1/T^{1-\alpha}$

Exemple : pour la moyenne d'un signal de puissance unité, btenir une variance de 10^{-3}

- blanc : 1000 échantillons
- longue dépendance $\alpha = .1$, 4600 échantillons
- longue dépendance $\alpha = .4$, 100000 échantillons !

2ème effet, suite

Si l'ondelette a N moments nuls, alors à l'échelle a

$$S_{x_a}(\nu) = aC'\nu^{2N-\alpha} + o(\nu^{2N-\alpha})$$

de sorte que

$$r_{x_a}(\tau) \approx \frac{1}{\tau^{2N+1-\alpha}}$$

Si $2N + 1 - \alpha > 1 \Leftrightarrow N > \alpha/2$ alors $x_a(t)$ est à mémoire courte

Récapitulons...

La tranformée en ondelette

- stationnarise les processus non stationnaire à accroissements stationnaires,
- est en adéquation avec les processus en $1/f$,
- est un filtre blanchisseur (imparfait) des processus à longue dépendance, dès que l'ondelette est bien choisie.