Communications Numériques I

TNS4 - cours 1/5

Pierre Comon

Chaîne de traitement

Source de messages
↓
Codage source
(compression)
↓
Codage canal
(redondance)
↓
Modulation
↓
Propagation
canal
↓
Démodulation
↓
Égalisation
Décodage canal
(corrections d'erreurs)
↓
Décodage source
↓
Message estimé

Canaux de transmission (1/3)

- Canaux guidés
  - Paire torsadé (téléphone)   300Hz-300kHz
  - Câble coaxial (ethernet)   300kHz-1GHz
  - Guide d'onde   1GHz-300GHz
  - Fibre optique   30 THz-1000THz
- Canaux Hertziens (cf. page 2/3)
- Acoustique sous-marine (cf. page 3/3)
- Acoustique aérienne
- Stockage

Canaux de transmission (2/3)

- Canaux Hertziens
  - VLF   3kHz-30kHz
  - LF   30kHz-300kHz
  - MF 300kHz-3MHz
  - HF 3MHz-30MHz
  - VHF 30MHz-300MHz
  - UHF 300MHz-3GHz
  - SHF 3GHz-30GHz
  - EHF 30GHz-300GHz
  - Optique 30THz-1000THz

Canaux de transmission (2/3)

- Acoustique sous-marine
  - ULF   15Hz-150Hz
  - VLF   150Hz-1.5kHz
  - LF   1.5kHz-15kHz
  - MF   15kHz-150kHz
  - HF   150kHz-1.5MHz
  - VHF   1.5MHz-15MHz
  - UHF   15MHz-150MHz
  - SHF   150MHz-1.5GHz

Modulation

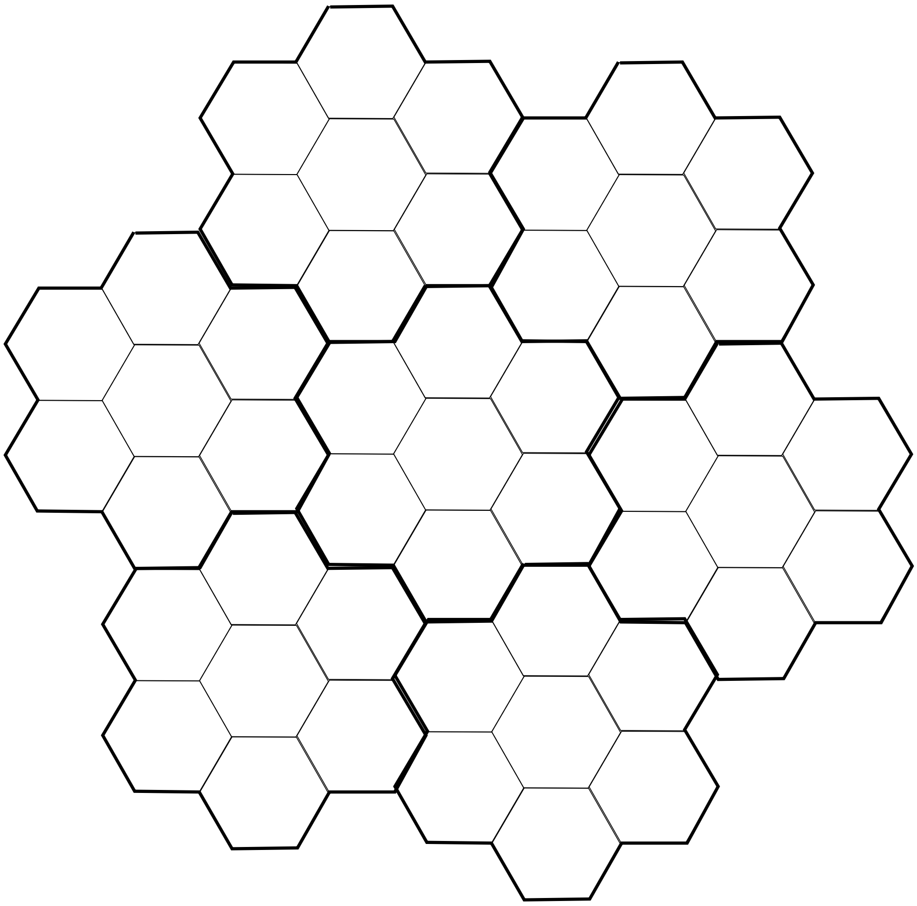
- Nécessité
- Analogique
  AM: $m(t) = x(t) \cos \omega t$
- Numérique
  Forme générale:

$$m(t) = A \sum_k b(t - kT, x_k)$$

  ASK, PAM: $\sum_k [x_k \cos \omega t] \, g(t - kT)$
  PSK: $\sum_k \cos(\omega t + x_k u_T(t)) g(t - kT)$

- Numérique incontournable pour:
  - Efficacité spectrale
  - Transmission de données
  - Multimédia

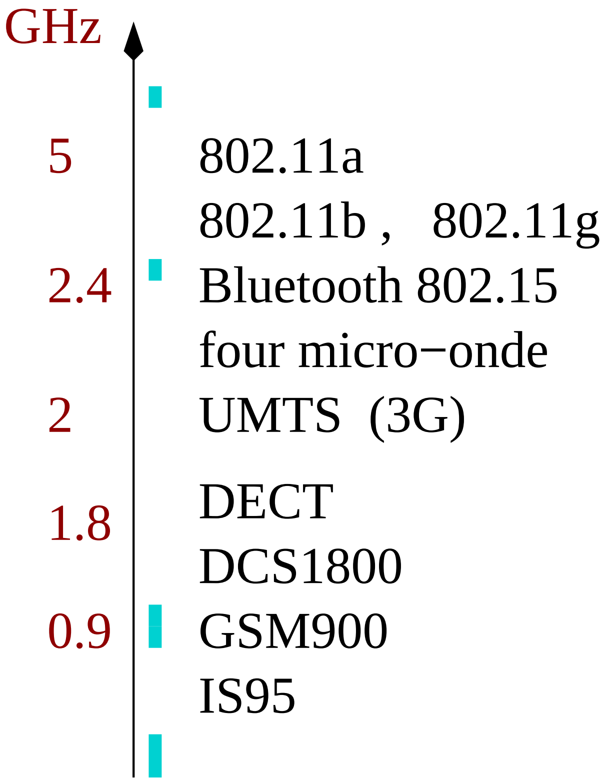
Systèmes cellulaires (1/2)



Systèmes cellulaires (2/2)

- 1ère génération (1980): Analogique
  Ex: Radiocom 2000
- 2nde génération (1990): Numérique TDMA, FDMA
  Motivation: efficacité spectrale
  Ex: GSM, DECT, DCS1800, IS54
- 3ème génération (2000): Numérique CDMA
  Motivations: réutilisation spectrale partout, limitation douce de capacité
  Ex: IS95, UMTS
- Motivations des systèmes cellulaires:
  - Longue portée (Wireless Wide Area Network: WWAN)
  - Portée limitée: pertes $> (\lambda/d)^2$,
    Réutilisation spectrale, Limitation des interférences
  - Transmission en ligne droite au delà de 30 MHz

Les fréquences attribuées



ISM: Industrial Scientific Medical

ART: Agence de Régulation des Télécommunications

Espaces normés

- Produit scalaire à symétrie hermitienne, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$:
  - Linéarité: $\langle \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle$
  - Symétrie hermitienne: $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^*$
  - Homogéneité: $\langle \boldsymbol{x}, \lambda\, \boldsymbol{y} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$
- Norme: $||\boldsymbol{x}||^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$
- Inégalité de Schwarz: $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2 \leq ||\boldsymbol{x}||^2 \cdot ||\boldsymbol{y}||^2$
  avec égalité ssi $\exists\, \alpha, \beta /\ ||\alpha\, \boldsymbol{x} + \beta\, \boldsymbol{y}||^2 = 0$.

Signaux déterministes

Dimension finie

Base orthonormée finie $\{\boldsymbol{u}_k\}$

- $\boldsymbol{x} = \sum_k \boldsymbol{u}_k \, x_k, \quad x_k = \langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{x} \rangle$
- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_k {x_k}^* \, y_k$
  en particulier, $||\boldsymbol{x}||^2 = \sum_k |x_k|^2$.

Dimension infinie

- Energie finie sur I: $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_I x(t)^* \, y(t) dt$
- Puissance finie sur $[0,\, T]$: $\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^* \, y(t) \, dt$
- Norme associée: $||x(t)||^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$

Décompositions matricielles (1/2)

- Gauss: toute matrice $\boldsymbol{M}$ peut se décomposer en:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{U}$$

avec $\boldsymbol{L}$ triangulaire inférieure, et $\boldsymbol{U}$ triangulaire supérieure

- Factorisation QR: toute matrice $\boldsymbol{M}$ peut se décomposer en:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}$$

avec $\boldsymbol{Q}$ unitaire et $\boldsymbol{R}$ triangulaire.

  - Algorithme Gram-Schmidt. $\rightarrow$ orthonormalise m vecteurs.

- EVD: Toute matrice $\boldsymbol{M}$ admet des éléments propres:

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{\Lambda}, \quad \boldsymbol{\Lambda} \text{ diagonale}$$

  - Les colonnes $\boldsymbol{t}_i$ de $\boldsymbol{T}$ sont les vecteurs propres de $\boldsymbol{M}$: $\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{t}_i\,\lambda_i$
  - $\boldsymbol{M}$ non défective (ou “diagonalisable”) ssi $\boldsymbol{T}$ inversible: $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}$
  - Si $\boldsymbol{M}$ est “normale”, càd si $\boldsymbol{M}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathsf{H}}$, alors $\boldsymbol{T}$ est unitaire:

$$\boldsymbol{T}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}$$

Décompositions matricielles (2/2)

- SVD: Toute matrice $\boldsymbol{M}$ se décompose en:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{V}^{\mathsf{H}}$$

où $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ unitaires, et $\boldsymbol{\Sigma}$ diagonale réelle positive.

  - Les colonnes $\boldsymbol{u}_i$ et $\boldsymbol{v}_i$ de $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ sont les vecteurs singuliers gauches et droits:

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_i\,\sigma_i$$

$$\boldsymbol{M}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i\,\sigma_i$$

  - les $\boldsymbol{u}_i$ sont les vecteurs propres de $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathsf{H}}$, et les $\boldsymbol{v}_i$ ceux de $\boldsymbol{M}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{M}$, associés à σ_i^2.

Projecteur sur un sous-espace

- Idempotence: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$
  Alors:
  - $\exists$ base $\boldsymbol{T}$ / $\quad \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$
- Matrice de projection sur un espace engendré par les vecteurs indépendants $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$, stockés dans une matrice à m colonnes, $\boldsymbol{V}$:
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{V})^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathsf{H}}$$
  - $\boldsymbol{A}$ hermitienne: $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{A}$
  - Pythagore:
    $||\boldsymbol{x}||^2 = ||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}||^2 + ||(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}||^2$,
    car $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \Rightarrow \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}\rangle = 0$.

Transformations linéaires

- $\boldsymbol{H}$ hermitienne $\Leftrightarrow$ vecteurs propres orthonormés et valeurs propres réelles $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{H}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{H}$.
- $\boldsymbol{U}$ unitaire $\Leftrightarrow$ vecteurs propres orthonormés et valeurs propres de module 1 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{U}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{U}^{-1}$.
- $\boldsymbol{H}_n$ Hadamard $n \times n \Rightarrow \boldsymbol{U} = \frac{1}{\sqrt{n}} \boldsymbol{H}_n$ unitaire *et* hermitienne réelle $\Rightarrow \boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}$.
- Convolution
  - transformation linéaire invariante dans le temps
  - continue: $y(t) = [h \star x](t) = \int h(u)\, x(t-u)\, du$
  - discrète: $y(n) = [h \star x](n) = \sum_k h(k)\, x(n-k)$
    Ecriture matricielle: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\, \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{H}$ Töplitz infinie
  - discrète périodique: $[h \star x](n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\, x(n-k)$
    Ecriture matricielle: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\, \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{H}$ $N \times N$ Töplitz circulante
  - Elément neutre
    distribution de Dirac: $\int \delta(u) x(t-u)\, du = x(t)$
    fonction discrete de Dirac: $\delta(0) = 1$, et $\delta(n) = 0$ si $n \neq 0$
  - Produit scalaire: $y(0) = \langle h(-t)^*, x(t) \rangle$.

Transformées de Fourier

Plusieurs définitions de TF unitaires: $X = \mathcal{F}[x]$

- t discret, f discrte $\in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, e^{-2\jmath\pi nk/N}$$

- t discret, f continue 1-périodique $\in [0,\ 1[$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \, e^{-2\jmath\pi fn}$$

- t continu T-périodique, f discrte $\in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T x(t) \, e^{-2\jmath\pi kt} \, dt$$

- t continu, f continue $\in \mathbb{R}$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, e^{-2\jmath\pi ft} \, dt$$

NB: La premire définit (en dimension finie) une matrice $N \times N$ unitaire, $\boldsymbol{U}$, qui diagonalise les matrices Töplitz circulantes.

Propriétés de la TF

- $\mathcal{F}[e^{2\jmath\pi f_o t}] = \delta(f - f_o)$
  $\mathcal{F}[\sin(2\pi f_o t)] = \frac{\jmath}{2}\,(\delta(f + f_o) - \delta(f - f_o))$
  $\mathcal{F}[\cos(2\pi f_o t)] = \frac{1}{2}\,(\delta(f + f_o) + \delta(f - f_o))$
- Retard: $\mathcal{F}[x(t-\tau)] = e^{-2\jmath\pi f\tau}\,\mathcal{F}[x(t)]$
- Produit: $\mathcal{F}[x\,y] = \mathcal{F}[x] \star \mathcal{F}[y]$
- Parseval: $||\mathcal{F}[x]||^2 = ||x||^2$
- Peigne: $Ш_T(t) = \sum_n \delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} Ш_{\frac{1}{T}}(f) = \sum_k \delta(f - k\frac{1}{T})$

Intercorrélation

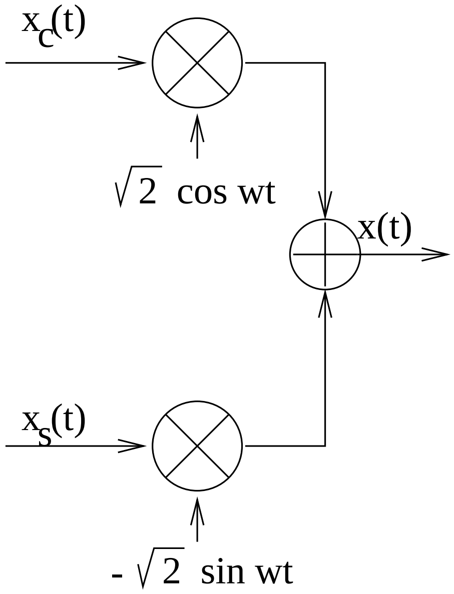
- Pour les signaux scalaires d'énergie finie:
  énergie moyenne: $\langle x, x\rangle = \int_t |x(t)|^2$
  énergie d'interaction: $\langle y, x\rangle = \int_t x(t)\, y(t)^*\, dt$
  fonction d'inter-corrélation:
  $\gamma_{xy}(\tau) = \langle y(t-\tau), x(t)\rangle = \int_t x(t)\, y(t-\tau)^*\, dt$
- Puissance instantanée: $|x(t)|^2$
- Densités spectrales de puissance:
  densité auto-spectrale: $\mathbf{\Gamma}_{XX}(f) = |X(f)|^2$
  densité inter-spectrale: $\mathbf{\Gamma}_{XY}(f) = X(f)\, Y(f)^*$
- Théorème de Wiener-Kintchine:
  $\mathbf{\Gamma}_{XY}(f) = \mathcal{F}[\gamma_{xy}(\tau)]$
- Signaux multivariés d'énergie finie:
  seulement perte de la commutativité.
  $\gamma_{xy}(\tau) = \int_t \boldsymbol{x}(t)\, \boldsymbol{y}(t-\tau)^{\mathsf{H}}\, dt$ est une matrice

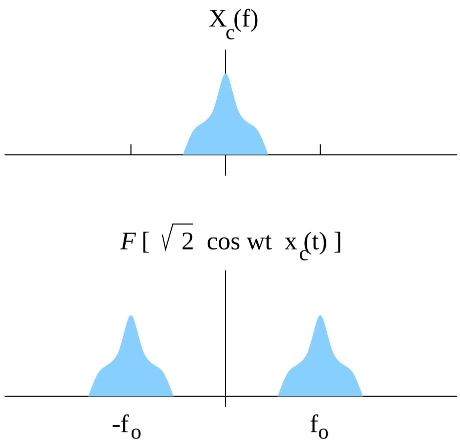
Modulation

- Signal temporel transmis en bande porteuse:

$$x(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi f_o t)\, x_c(t) - \sqrt{2}\sin(2\pi f_o t)\, x_s(t)$$

  - $x_c(t)$: composante "en phase"
  - $x_s(t)$: composante "en quadrature"



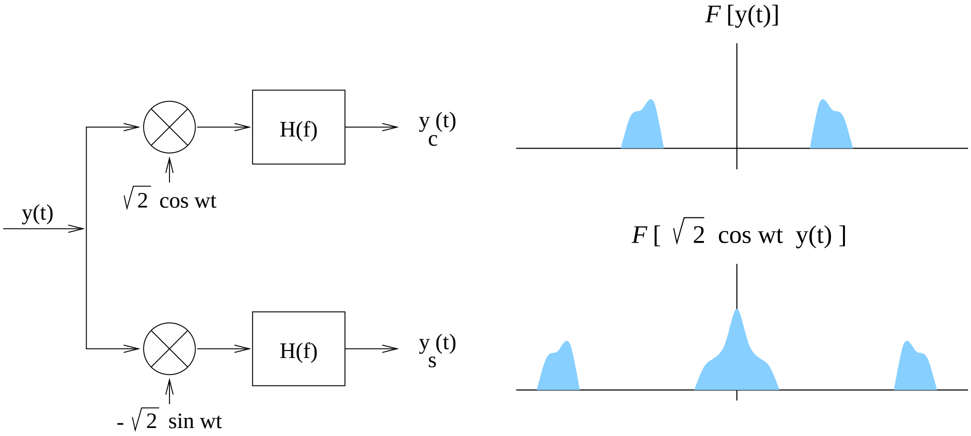


- Domaine spectral:

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[X_c(f+f_o) - \jmath X_s(f+f_o)\right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}\left[X_c(f-f_o) + \jmath X_s(f-f_o)\right] \end{aligned}$$

Démodulation

- Composantes temporelles démodulées:



- Domaine spectral:

$$
\begin{aligned}
Y_c(f) &= \frac{H(f)}{\sqrt{2}}\,[Y(f+f_o)+Y(f-f_o)] \\
Y_s(f) &= -\jmath\,\frac{H(f)}{\sqrt{2}}\,[Y(f+f_o)-Y(f-f_o)]
\end{aligned}
$$

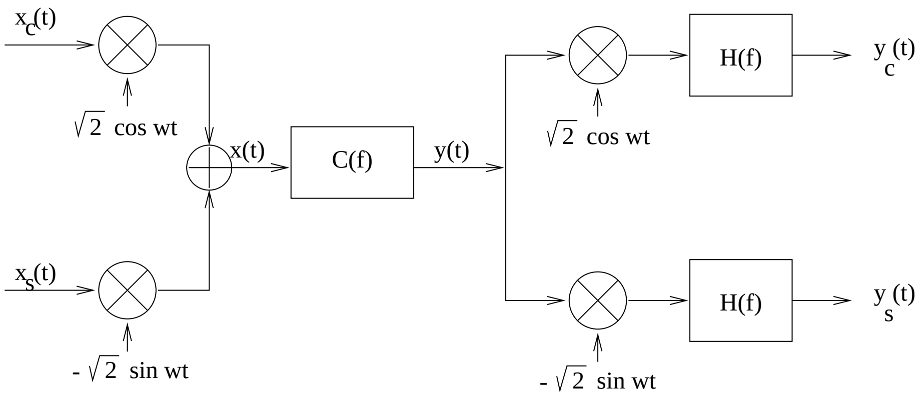
Transmission

- Canal linéaire: $y(t) = [c \star x](t)$
- Composantes en phase et en quadrature
  On démontre que:

$$\begin{bmatrix} Y_c(f) \\ Y_s(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(f) & \jmath\, b(f) \\ -\jmath\, b(f) & a(f) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_c(f) \\ X_s(f) \end{bmatrix}$$

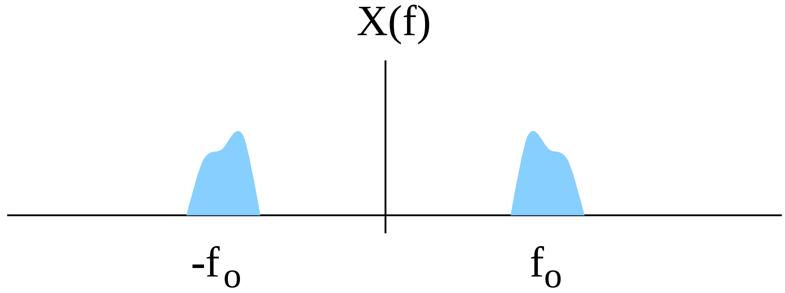
avec:

$$a(f) = \frac{H(f)}{2}\,[C(f+f_o) + C(f-f_o)]$$
$$b(f) = \frac{H(f)}{2}\,[C(f+f_o) - C(f-f_o)]$$

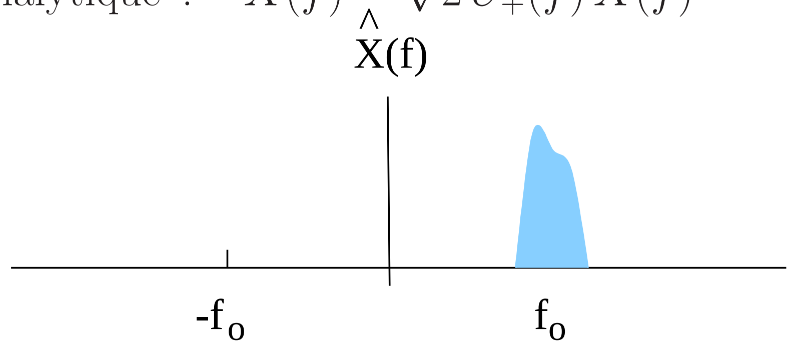


Signal analytique

- Condition passe-bande: $\infty > f_o > W > 0$



- Signal “analytique”: $\hat{X}(f) \underset{\wedge}{=} \sqrt{2}\, U_+(f)\, X(f)$



- Propriété:

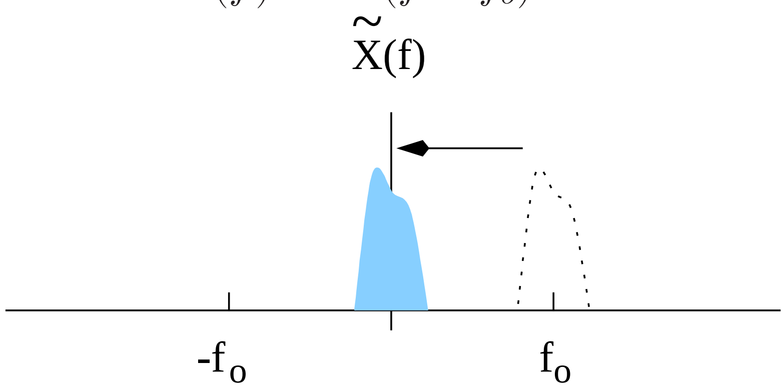
$$\hat{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}[\hat{X}(f)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{\jmath}{\pi t}\right] \star x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} [x(t) + \jmath \check{x}(t)]$$

avec $\check{x}(t)$: transformée de Hilbert de $x(t)$, rotation pure de la phase de 90^o.

Enveloppe complexe (1/2)

- Comme en théorie des circuits: $A\,\cos\omega t = \Re\{Ae^{\jmath\omega t}\}$
- Représentation en bande de base d'un signal passe-bande de porteuse f_o:

$$\tilde{X}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{X}(f+f_o)$$



- Enveloppe complexe autour de f_o:

$$\tilde{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}[\tilde{X}(f)] = \hat{x}(t)\cdot e^{-2\jmath\pi f_o t}$$

- Propriétés élémentaires:
  - Norme: $||\tilde{x}||^2 = ||x||^2$
  - Fréquence pure: $\widetilde{[A\sqrt{2}\cos(\omega_o t+\theta)]} = A\,e^{\jmath\theta}$
    e.g. $\quad \widetilde{\sin\omega_o t} = -\jmath/\sqrt{2}$

Enveloppe complexe (2/2)

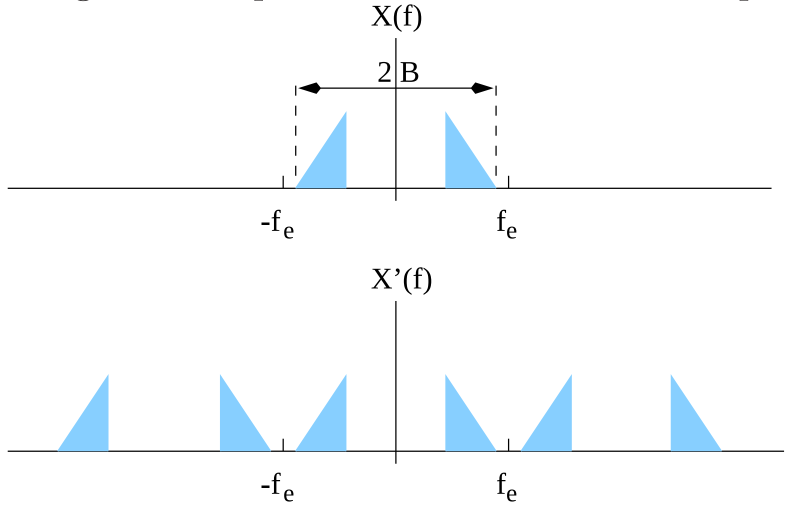
Si $x_c(t)$ et $x_s(t)$ sont en bande de base $< f_o$, on montre:

- $\tilde{x}(t) = x_c(t) + \jmath\, x_s(t)$
  En effet, on a les propriétés:
  - $x_c(t)\,\sqrt{2}\cos\omega_o t \xrightarrow{\sim} x_c(t)$
  - $x_s(t)\,\sqrt{2}\sin\omega_o t \xrightarrow{\sim} -\jmath\, x_s(t)$

  d'où le résultat par soustraction.
- $\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[x(t) + \jmath\breve{x}(t)] \Rightarrow x(t) = \sqrt{2}\,\Re\{\breve{x}(t)\}$
- Transmission:
  - $\tilde{y}(t) = c^{\text{E}} \star \tilde{x}(t)$
    avec $C^{\text{E}}(f) = U_+(f+f_o)\,C(f+f_o) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tilde{C}(f)$.
  - $a(f) = \frac{1}{2}\,[C^{\text{E}}(f) + C^{\text{E}}(-f)^*]$
    $b(f) = \frac{1}{2\jmath}\,[C^{\text{E}}(f) - C^{\text{E}}(-f)^*]$

Relations entre continu et discret

- Échantillonnage en temps ⇔ Périodisation en fréquence.



Théorème d'échantillonnage de Shannon: pour une bonne reconstruction d'un signal BL, il suffit qu'il n'y ait pas repliement spectral:

$$f_e > 2\,B$$

- Pour des signaux passe-bande $\{f_o, B\}$, on peut reconstruire avec une f_e N fois plus faible si $\exists N$ tel que:

$$N \leq \frac{f_o + B}{2B}, \text{ alors } \exists f_e : \frac{2}{N}(f_o + B) \leq f_e \leq \frac{2}{N-1}(f_o - B)$$

- On peut construire une fonction continue $x(t)$ à partir d'une séquence discrète $x'(k)$: $x(t) = \sum_k x'(k)\, g(t - kT)$

Exemples de largeurs de bande

	f_e	$2B$
GSM	900 MHz	200 kHz
DECT	1900 MHz	1.7 MHz
UMTS	1880-2200 MHz	4 MHz
IS95	879-900MHz	1.25 MHz

Interférence inter-symbole

Critère de Nyquist sur le filtre global continu, $p(t)$:

- en zéro: $p(0) = 1$
- en kT, $k \neq 0$: $p(kT) = 0$
- pour $t \neq kT$, valeur libre

Conclusion:

- Domaine temps:

$$p(t) \cdot \text{III}_T(t) = \delta(t)$$

- Domaine fréquence:

$$P(f) \star \text{III}_{\frac{1}{T}}(f) = \sum_n P(f - \frac{n}{T}) = 1$$

Formes d'onde

Exemple de filtres satisfaisant la condition de Nyquist de non ISI,
les cosinus sur-élevés:

$$p(t) = \mathrm{sinc}(\frac{\pi t}{T})\,\frac{\cos(\alpha\pi t/T)}{1-(2\alpha t/T)^2}$$

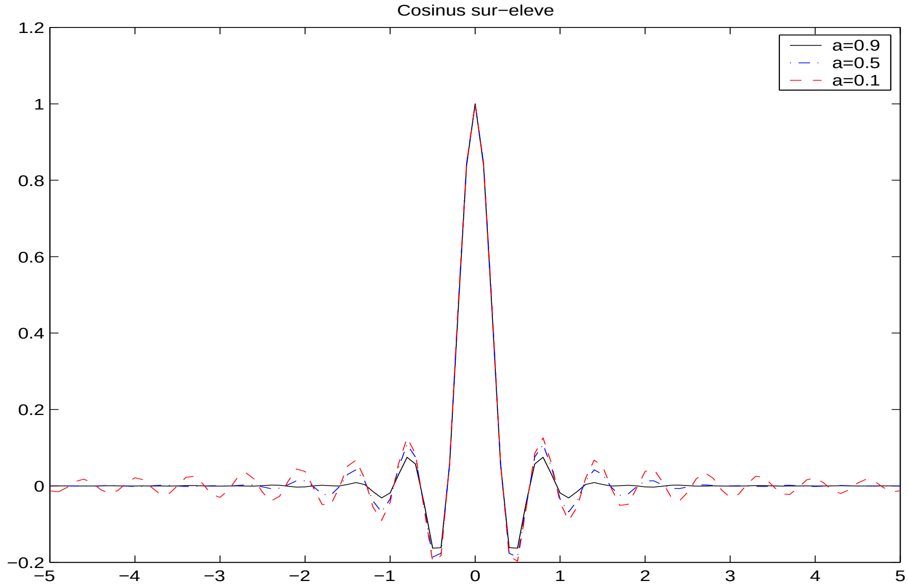
soit

$$P(f) = \begin{cases} T, & 0 \leq f \leq (1-\alpha)/2T \\ \frac{T}{2}\left[1-\sin(\frac{\pi T}{\alpha}(|f-\frac{1}{2T}))\right], & (1-\alpha)/2T \leq |f| \leq (1+\alpha)/2T \\ 0, & (1+\alpha)/2T \leq f \end{cases}$$

α: facteur de *roll-off*, ou *excès de bande*
Bande occupée: $(1+\alpha)/T$

Excès de bande

Cosinus sur-élevé, pour 3 valeurs de α:



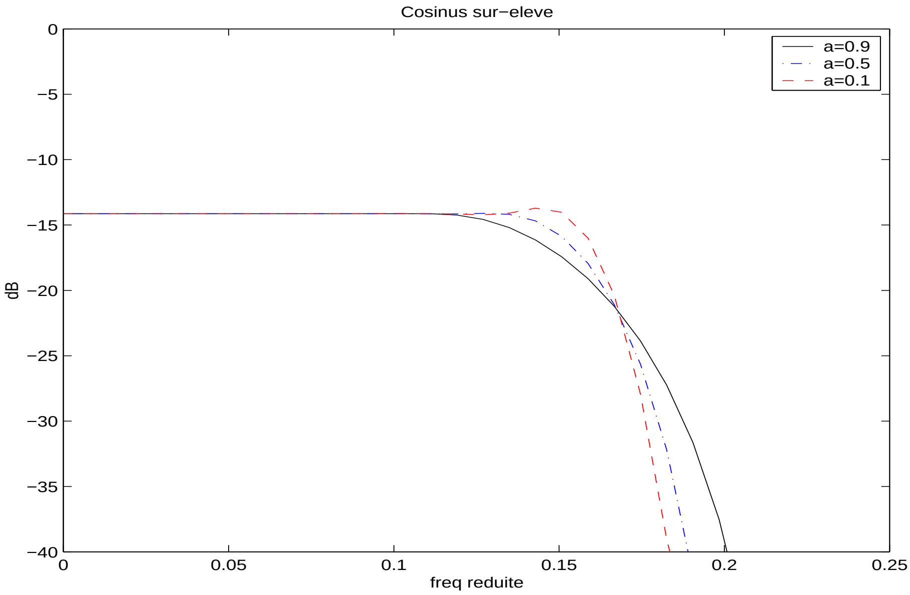


Diagramme de l'œil (1/2)

PAM4 en bande de base, $\alpha = 0.9$

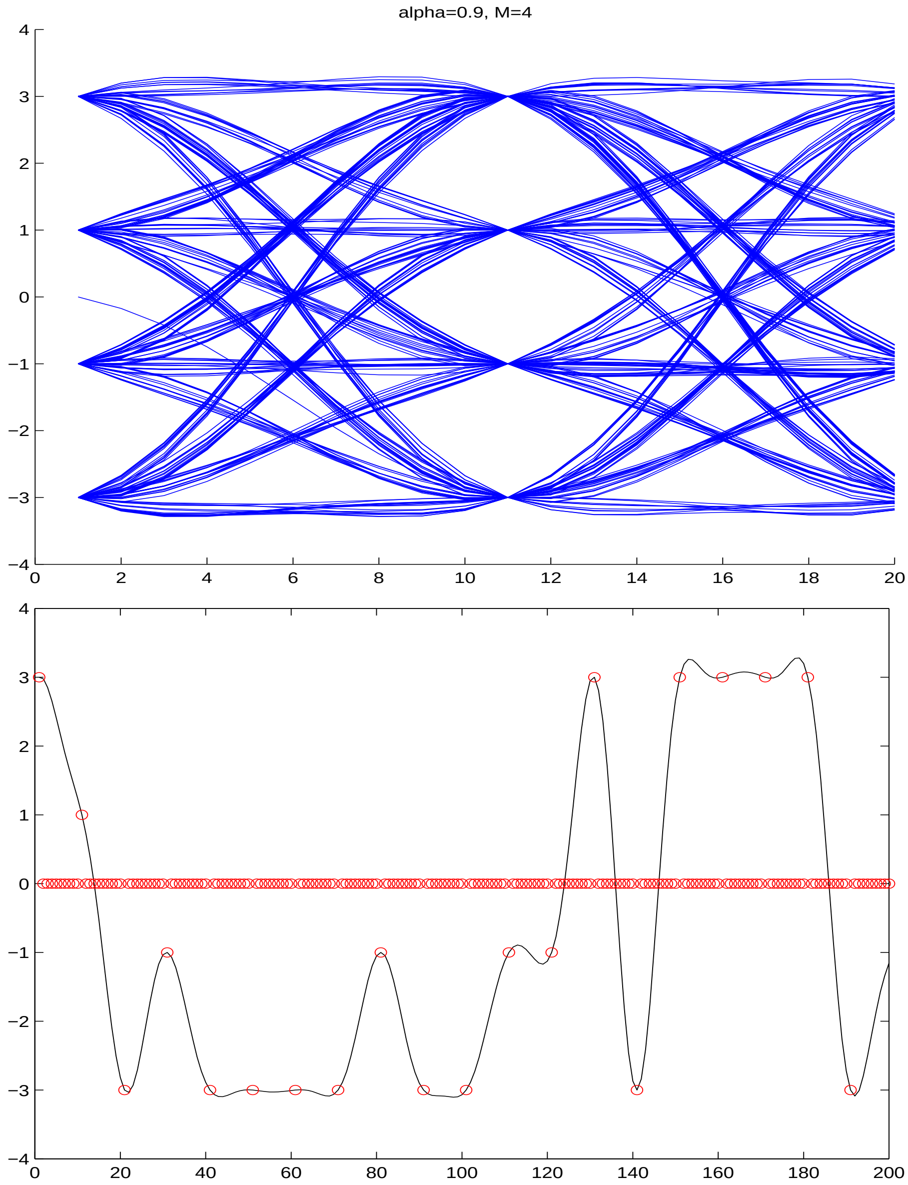
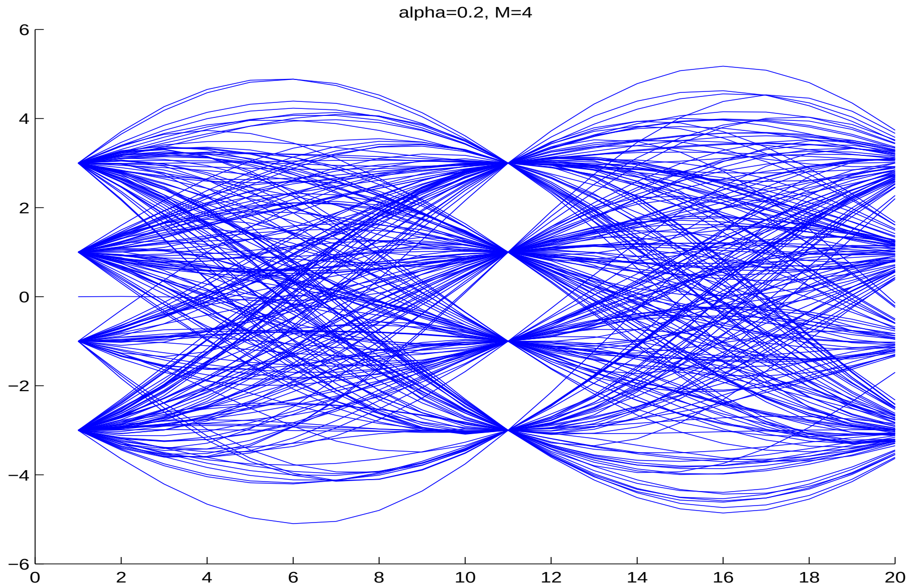
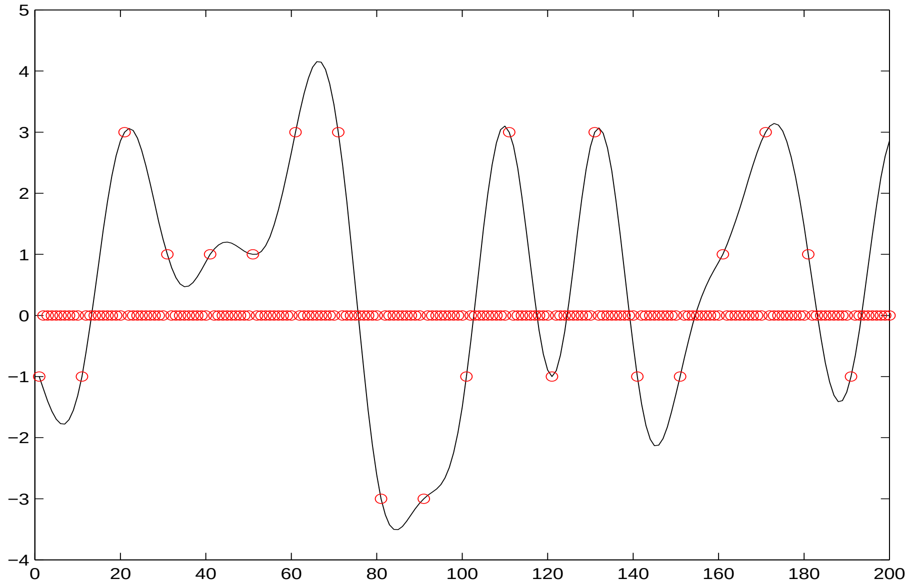


Diagramme de l'œil (2/2)

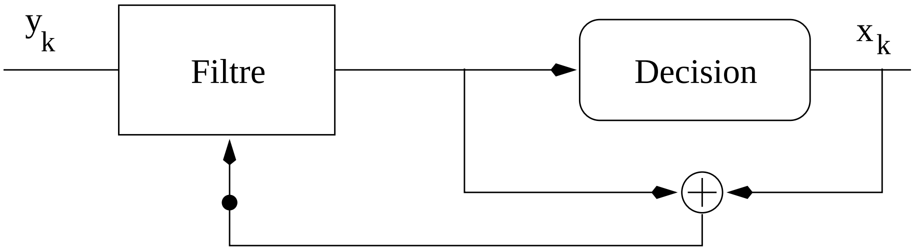
PAM4 en bande de base, $\alpha = 0.2$





Egalisation par forçage à zéro

Egaliseur fonctionnant soit quand l'oeil est ouvert, soit avec une séquence d'apprentissage:



Egaliseur dirigé par la décision