Communications Numériques I

TNS4 - cours 3/5

Pierre Comon

Résumé du cours 2

- Modulation numérique linéaire en bande de base

$$\tilde{x}(t) = \sum_k g_c(t - kT)\, x_c(u_k) + \jmath\, g_s(t - kT)\, x_s(u_k)$$

  Exemples: PAM, PSK, QAM

- Modulation à phase continue
  Exemples: CPFSK, MSK

- Diagramme de transition
  Graphe indiquant les transitions entre états

- Treillis
  Dépliement du diagramme en fonction du temps

- Diagramme des phases
  Décrit les trajectoires possibles de la phase en fonction du temps

Distributions de probabilité (1/2)

Mono-dimensionnel

- Fonction de répartition $F_x(u) = Pr(X \leq u)$
- Densité de probabilité (d.d.p.)

$$p_x(u) = Pr(u \leq X \leq u + du)/du = \frac{dF_x(u)}{du}$$

- Normalisation $F_x(\infty) = \int_{\mathbf{R}} p_x(u)\, du = 1$

Multi-dimensionnel

- Fonction de répartition $F_{x,y}(u, v) = Pr(X \leq u \cap Y \leq v)$
- d.d.p. conjointe $p_{x,y}(u, v) = \frac{\partial^2 F_{x,y}(u,v)}{\partial u\, \partial v}$
- d.d.p. conditionnelle

$$F_{x/y}(u, v) = Pr(X \leq u \,\text{sachant}\, Y \leq v) \leftrightarrow p_{x/y}(u, v) = \frac{\partial^2 F_{x/y}(u, v)}{\partial u\, \partial v}$$

- Règle de Bayes $p_{x,y}(u, v) = p_{x/y}(u, v)\, p_y(v)$

Distributions de probabilité (2/2)

Propriétés

- d.d.p. marginale $\quad p_x(u) = \int p_{x,y}(u,v)\,dv$
- Changement de variable $\boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{y})$ bijectif

$$p_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{v} = p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{u})\,d\boldsymbol{u}\,;\ \boldsymbol{v} = g(\boldsymbol{u})$$

  soit $p_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{v}) = p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{u}) \cdot |\det \boldsymbol{J}|$.

- v.a. complexe $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \jmath\,\boldsymbol{y}$

$$p_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{w}) = p_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

- Circularité au sens strict

  $\boldsymbol{z}$ circulaire $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{z}\,e^{\jmath\theta}$ ont même d.d.p.

- Circularité à l'ordre 2

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{z}] = \boldsymbol{0},\ \mathrm{E}[\boldsymbol{z}\,\boldsymbol{z}^{\mathsf{T}}] = \boldsymbol{0},\ \text{mais } \boldsymbol{C}_z \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[\boldsymbol{z}\,\boldsymbol{z}^{\mathsf{H}}] \neq \boldsymbol{0}$$

Moments

- **Moyenne:** $\boldsymbol{m}_x = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}]$
- **Matrice de covariance:** $\boldsymbol{C}_x = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}^{\mathsf{H}}]$
- $\mathcal{L}^2_K$**: espace vectoriel** des v.a. de dim. K et de moyenne et variance finies
- **Matrice de covariance croisée:** $\boldsymbol{C}_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{covar}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^{\mathsf{H}}]$
- **Produit scalaire** entre 2 v.a. de $\mathcal{L}^2_K$:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_x)^{\mathsf{H}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{m}_y)] = \mathrm{trace}\{\boldsymbol{C}yx\}$$

Norme induite: $||\boldsymbol{x}||^2 = \mathrm{trace}\{\boldsymbol{C}_x\} = \sum_i \mathrm{var}\{x_i\}$

Fonctions spéciales (1/3)

Fonction gamma:

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt, \;\; x > 0$$

Propriétés:

- $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$
- $\Gamma(n+1) = n!$, si $n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \;\; \Gamma(1) = 1$

Fonction gamma incomplète:

$$\gamma(\alpha; y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt, \;\; \alpha > 0$$

Fonctions spéciales (2/3)

■ Fonction erreur:

$$Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt,\ x \geq 0$$

Propriété: $x \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Rightarrow F_x(u) = 1 - Q\left(\frac{u-m}{\sigma}\right)$

Autres notations rencontrées:

$\mathrm{erfc}_*(x) = Q(x)$,
$\mathrm{erfc}(x) = 2Q(\sqrt{2}\, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$,
$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = 1 - \mathrm{erfc}(x)$

■ Fonctions de Bessel de type I:

- $J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta - n\,\theta)\, d\theta,\ \ x \geq 0,\ n \geq 0$
- Sous forme de série $J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$
- Récurrence à trois termes: $J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$
- Approximation: pour $x \gg 1,\ J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)$

Fonctions spéciales (3/3)

Fonctions de Bessel modifiées de type I:

- $I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(x\,\cos\theta)\,\cos(n\theta)\,d\theta, \quad x \geq 0,\ n \geq 0$
- Sous forme de série $I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$
- Approximation: pour $x \gg 1$, $I_o(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\,x}} \exp(x)$
  pour $x \approx 0$, $I_o(x) \approx e^{x^2/4}$

Fonction Q de Marcum:

- Définition

$$Q_m(a,b) = \int_b^{\infty} x \left(\frac{x}{a}\right)^{m-1} \exp(-\frac{x^2+a^2}{2})\, I_{m-1}(ax)\, dx$$

- Intérêt: sert à exprimer la fonction de répartition d'une variable du Chi-deux non centrale.

Exemples (1/4)

Distributions gaussiennes

- $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}_K(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{C})$ (gaussienne réelle, dim. K, moy $\boldsymbol{m}$, covariance $\boldsymbol{C}$)

$$p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^K \sqrt{\det \boldsymbol{C}_x}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_x)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{C}_x^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_x)\right]$$

- $\boldsymbol{z} \sim \mathcal{N}_K^c(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{C})$ (gaussienne complexe circulaire)

$$p_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{\pi^K \det \boldsymbol{C}_z} \exp\left[-(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m}_z)^{\mathsf{H}} \boldsymbol{C}_z^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m}_z)\right]$$

- Conservation du caractère gaussien par transformation linéaire
Si $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{m}_x, \boldsymbol{C}_x)$, alors $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_x, \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_x\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})$

Exemples (2/4)

Fonctions quadratiques de gaussiennes univariées

- *Chi-deux.*
  $x_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ *iid* $\Rightarrow Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{q} x_i^2 \sim \chi_q^2$, avec:

$$p_z(v) = \kappa(q)\, v^{q/2-1}\, e^{-v/2},\ v \geq 0$$

  et

$$\kappa(q)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} 2^{q/2}\Gamma(q/2)$$

  - La distribution est exponentielle quand $q = 2$

$$p_z(u) = e^{-u},\ u \geq 0$$

Exemples (3/4)

Fonctions quadratiques de gaussiennes univariées (suite)

- *Chi-deux noncentrale.*
  $x_i \sim \mathcal{N}(m_i, 1)$ *iid* $\Rightarrow Z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{q} x_i^2 \sim \chi'^2_q(\lambda)$,
  avec paramètre de non centralité $\lambda = \sum_i m_i^2$:

$$p_z(\lambda; u) = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\frac{q-2}{4}} I_{\frac{q-2}{2}}(\sqrt{\lambda u})\, e^{-\frac{u+\lambda}{2}}, \; u > 0.$$

  - Si $q = 2$, la variable $r \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\sqrt{z}$ suit une loi de Rice:

$$p_r(\lambda; v) = \frac{v}{\sigma^2}\, I_o\left(\frac{\sqrt{\lambda}\, v}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{v^2+\lambda}{2\sigma^2}}$$

    (on retrouve la loi de Rayleigh si $\lambda = 0$)

Exemples (4/4)

Fonctions quadratiques de gaussiennes multivariées

- *Wishart réelle.*
  $x_i \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{C})$ *iid* $\Rightarrow \boldsymbol{S} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{x}_i \, \boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \sim \mathcal{W}_p(\boldsymbol{C}, q)$, avec:

$$p_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{A}) = \kappa(\boldsymbol{C}, q, p) \ \det \boldsymbol{A}^{(q-p-1)/2} \ \exp[-\frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}^{-1}\}]$$

  et $\kappa(\boldsymbol{C}, q, p)^{-1} = 2^{qp/2}\,\pi^{p(p-1)/4} \ \det \boldsymbol{C}^{q/2} \ \prod_{j=1}^{p} \Gamma(\frac{q+1-j}{2})$

- *Wishart complexe circulaire.*
  $x_i \sim \mathcal{N}_p^c(\mathbf{0}, \boldsymbol{H})$ *iid* $\Rightarrow \boldsymbol{S} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{x}_i \, \boldsymbol{x}_i^{\mathsf{H}} \sim \mathcal{W}_p^c(\boldsymbol{H}, q)$, avec:

$$p_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{A}) = \kappa^c(\boldsymbol{H}, q, p) \ \det \boldsymbol{A}^{q-p} \ \exp[-\mathrm{trace}\{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{H}^{-1}\}]$$

  et $\kappa^c(\boldsymbol{H}, q, p)^{-1} = \pi^{p(p-1)/2} \ \det \boldsymbol{H}^{q} \ \prod_{j=1}^{p} \Gamma(q+1-j)$

Loi de Rayleigh

- C'est la loi de la racine d'un χ_q^2

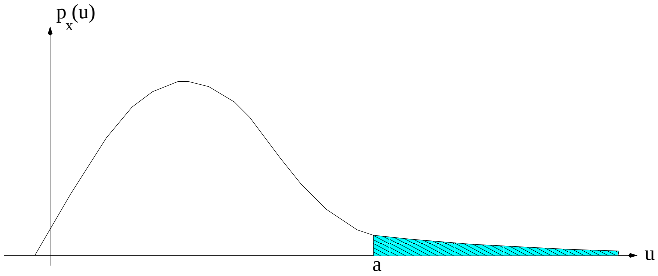
$$p_z(u) = \kappa(q)\, u^{q-1}\, e^{-u^2/2}, \quad u \geq 0$$

  avec $\kappa(q)^{-1} = 2^{q/2-1}\,\Gamma(q/2)$.

Fonctions de répartition (1/2)

$$F_z(a) =, \int_{-\infty}^{a} p_z(u)\, du$$

Souvent pas d'expression analytique, mais calculables numériquement et tabulées.



Le calcul de la probabilité d'erreur fait souvent intervenir:

$$P_\varepsilon(a) = \int_{a}^{\infty} p_z(u)\, du = 1 - F_z(a)$$

Fonctions de répartition (2/2)

- Gaussienne: $x \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$1 - F_z(a) = Q\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \; a \geq m$$

- Chi-deux: $z \sim \chi^2_q$

$$F_z(a) = \gamma\left(\frac{q}{2}; \frac{a}{2}\right), \; a \geq 0$$

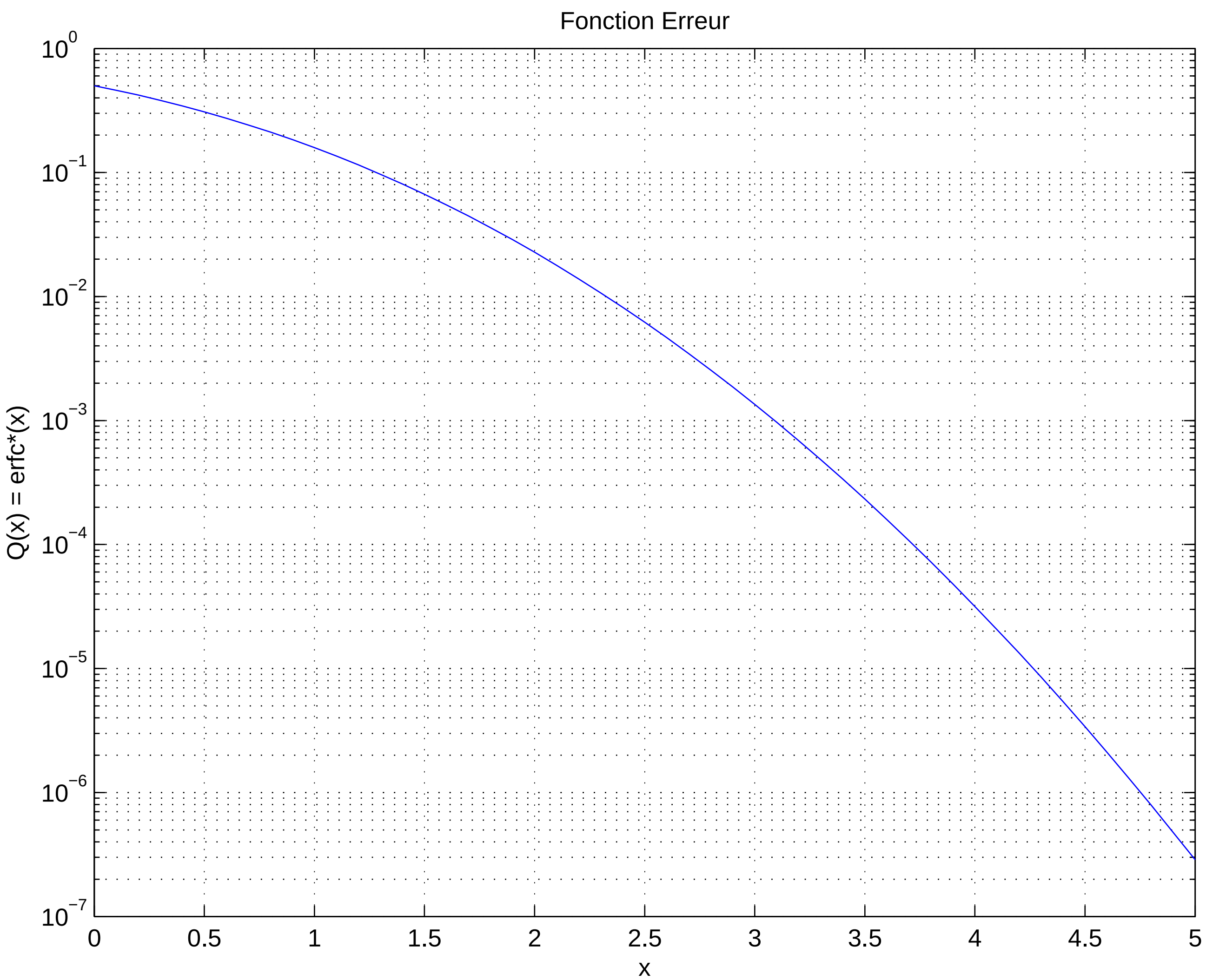
d'où la terminologie de "loi gamma" pour toute cette famille.

- Chi-deux non centrale: $z \sim \chi'^2_q(\lambda)$

$$1 - F_z(u) = Q_{q/2}\left(\sqrt{\lambda}; \sqrt{u}\right)$$

où $Q_m(a; b)$ est la fonction Q de Marcuum.

Fonction Erreur



Bornes

- **Borne de l'Union**, évènements $\{E_1,\, E_2,\, \ldots E_p\}$

$$\max_i Pr(E_i) \leq Pr(\cup_i E_i) \leq \sum_i Pr(E_i)$$

avec égalité si évènements disjoints

- **Borne de Chebyshev** (cas bilatère)

$$Pr(|X - m_x| \geq \delta) \leq \frac{\sigma_x^2}{\delta^2}$$

Preuve immédiate, majoration des queues par fonction quadratique

- **Chernoff** (cas unilatère)

$$Pr(X \geq \delta) \leq e^{-v\delta}\, \mathrm{E}[e^{vX}]$$

où X centrée et v vérifie $\mathrm{E}[X e^{vX}] = \delta\, \mathrm{E}[e^{vX}]$

Théorème de la Limite Centrale

Loi faible des grands nombre

Si x_i sont des v.a. décorrélées entre elles, de même moyenne m et de même variance σ^2, alors la v.a. $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ est de moyenne m et de variance σ^2/N, et vérifie

$$Pr(|x-m|^2 \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{N\,\alpha}.$$

Cela résulte de l'inégalité de Chebyshev.

Terminologie: x converge en loi vers le nombre déterministe m

Loi forte des grands nombre

Si de plus les x_i sont indépendantes, alors la v.a.

$$y = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i - m}{\sigma}$$

converge **en loi** vers une v.a. gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ (c.à.d. cv simple des fonctions de répartition et des fonctions caractéristiques).

Résultats connexes

- une loi du χ^2_q tend vers une loi gaussienne quand $q \to \infty$.
- les échantillons spectraux $X(k/N)$ sont asymptotiquement gaussiens, réels pour $k=0$ ou $k=1/2$, et complexes circulaires sinon.

Processus stochastiques (1/2)

On note l'espace normé de dim. infinie des signaux aléatoires de variance finie: $\mathcal{L}^2_\infty \equiv \mathcal{L}^2$

Fonction d'intercorrélation

$$\boldsymbol{R}_{xy}(t,t') \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(t)\,\boldsymbol{y}(t')^{\mathsf{H}}]$$

Relation entrée-sortie d'un filtre linéaire invariant dans le t

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(t) \star \boldsymbol{x}(t) \Rightarrow \boldsymbol{R}_{yy}(t,t') = \boldsymbol{h}(t) \star \boldsymbol{R}_{xx}(t,t') \star \boldsymbol{h}(t')^{\mathsf{H}}$$

Stationnarité

- Au sens strict: la d.d.p. conjointe de $\{x(t_1), x(t_2), \ldots x(t_n)\}$ est indépendante de t, $\forall n$
- À l'ordre 1: la moyenne $m_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[x(t)]$ ne dépend pas de t
- À l'ordre 2 (dite *au sens large*): la fonction de corrélation $\gamma_x(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[(x(t)-m_x)(x(t-\tau)-m_x)^*]$ ne dépend pas de t

Processus stochastiques (2/2)

Cyclo-stationnarité

- Exemple: $x(t) = \sum_k a_k\, g(t - kT)$
- Au sens strict de période T: les propriétés statistiques de $x(t)$ sont les mêmes que celles de $x(t - kT)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$
- À l'ordre 1: la moyenne $m_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[x(t)]$ est périodique en t
- À l'ordre 2: la fonction de corrélation

$$\gamma_x(\tau; t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[(x(t) - m_x(t))(x(t-\tau) - m_x(t-\tau))^*]$$

est périodique en t

Densité spectrale de puissance (d.s.p)

- Pour des processus stationnaires:

$$\Gamma_x(f) = \mathcal{F}[\gamma_x(\tau)](f)$$

- Pour des processus cyclo-stationnaires de période T:

$$\Gamma_x(f) = \mathcal{F}[\langle\gamma_x(\tau;t)\rangle_t](f)$$

où $\langle\gamma_x(\tau;t)\rangle_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \gamma_x(\tau;t)\,dt$ ne dépend que de τ

$\rightarrow$ cela revient à calculer la d.s.p. du processus

$$z(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t+\phi)$$

où ϕ est une v.a. uniformément répartie dans $[0,\ T[$.

- Relation entre bande de base et bande porteuse:
$\tilde{x}(t) = x_c(t) + \jmath\, x_s(t); \quad x(t) = \sqrt{2}\,\Re[\tilde{x}(t)\cdot e^{2\jmath\pi f_o t}]$. Alors:

$$S_x(f) = \frac{1}{2}\left[S_{\tilde{x}}(f-f_o) + S_{\tilde{x}}(f+f_o)\right]$$

d.s.p. de signaux modulés linéairement

- $y(t) = \sum_k x_k\, g(t - kT)$ est cyclostationnaire si x_k est stationnaire.

$$\begin{aligned} R_y(t+\tau, t) &= \mathrm{E}\{y(t+\tau)\, y(t)^{\mathsf{H}}\} \\ &= \sum_k \sum_\ell g(t+\tau-kT-\ell T)\, R_x(\ell)\, g(t-kT)^{\mathsf{H}} \end{aligned}$$

Par TF sur τ, $S_y(f;t) \stackrel{\text{def}}{=} \int e^{-2\jmath\pi f\tau}\, R_y(t+\tau, t)\, d\tau$:

$$\begin{aligned} S_y(f;t) &= \sum_k \sum_\ell \int e^{-2\jmath\pi f\tau}\, g(t+\tau-kT-\ell T)\, d\tau\; R_x(\ell)\, g(t-kT)^{\mathsf{H}} \\ &= G(f) \sum_k \sum_\ell e^{2\jmath\pi f(t-kT-\ell T)}\, R_x(\ell)\, g(t-kT)^{\mathsf{H}} \\ &= G(f)\, S_x(fT) \left[\sum_k e^{-2\jmath\pi f(t-kT)} g(t-kT) \right]^{\mathsf{H}} \end{aligned}$$

- Pour le signal stationnarisé $z(t)$:

$$\begin{aligned} S_z(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T S_y(f;t)\, dt \\ &= G(f)\, S_x(fT) \left[\frac{1}{T} \sum_k \int_{kT}^{kT+T} e^{-2\jmath\pi f t} g(t)\, dt \right]^{\mathsf{H}} \\ &= G(f)\, S_x(fT)\, G(f)^{\mathsf{H}} \end{aligned}$$

- <u>NB:</u> $S_x(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\ell e^{-2\jmath\pi\ell\lambda}\, R_x(\ell)$ est périodique de période T.

Karhunen-Loève (1/2)

Décomposition d'une fonction aléatoire centrée stationnaire de $\mathcal{L}^2$ sur une base de fonctions déterministes de L^2

- On veut décomposer:

$$x(t) = \sum_i A_i\, f_i(t),\ \ A_i \in \mathcal{L}_1^2,\ \ f_i(t) \in L^2$$

- Si $f_i(t)$ orthonormées, alors

$$\Rightarrow A_i = \langle f_i(t), x(t)\rangle,\ \text{ et } ||x(t)||^2 = \sum_i \text{var}\{A_i\}$$

- On cherche la base la plus pratique: A_i décorrélées

$$\mathrm{E}[A_i{}^* A_j] = \delta_{ij}\text{var}\{A_i\}$$

- Alors

$$\int\int f_i(u)^*\, \Gamma(u-v)\, f_j(v)\, du\, dv = \delta_{ij}\ \text{var}\{A_i\}$$

- On choisit les fonctions propres $f_i(t)$ de l'opérateur intégral:

$$y(t) \longrightarrow \Omega[y](t) = \int \Gamma_x(u-v)\, y(v)\, dv$$

Karhunen-Loève (2/2)

Théorème de Fredholm

- $\Omega[f_i] = \lambda_i\, f_i, \quad \lambda_i = \mathrm{var}\{A_i\}$
- $\{f_i\}$ orthonormées et λ_i réelles
- $\{\lambda_i\}$ au plus dénombrables
- Multiplicité de $\lambda_i \neq 0$ est finie
- Suite λ_i peut être imposée décroissante
- Convergence uniforme des sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k\, f_k(u)\, f_k(v)^* \xrightarrow{K\to\infty} \Gamma_x(u-v)$$

- Convergence en moyenne quadratique de la décomposition

$$\sum_{k=1}^{K} A_k\, f_k(t) \xrightarrow{K\to\infty} x(t)$$

Exemple de KL: Fourier

Série de Fourier d'un processus stochastique stationnaire

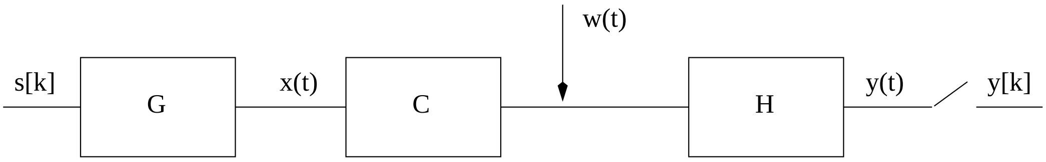
- Sur $I = [-T/2,\ T/2]$, on choisit la base orthonormée:

$$f_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\, e^{2\jmath\pi\, k\, t/T}$$

- Alors $x(t) = \sum_k A_k\ f_k(t)\ \equiv$ décomposition de KL
- $||x(t)||^2 = \sum_k \mathrm{var}\{A_k\}\ \equiv$ c'est Parseval
- $A_k = \langle f_k(t),\, x(t)\rangle = \int_T x(t)\, e^{-2\jmath\pi\, k\, t/T}\, dt$
- $\mathrm{E}[A_i{}^* A_j] = \delta_{ij}\sigma_i^2\ \equiv$ les échantillons spectraux sont décorrélés
- Si $T \to \infty$, alors les A_k sont asymptotiquement gaussiens complexes circulaires (limite centrale)
- Conséquence: les A_k sont asymptotiquement statistiquement indépendants

Récepteur optimal: exemple du PAM2

Signal émis: $x(t) = \sum_k g(t - kT)\, s(u_k)$
(par exemple, $s(u_k) = A_k\, \sqrt{2}\, \cos 2\pi f_o t$).



- $y(t) = \underbrace{h \star c \star g}_{p} \star s(t) + h \star w(t)$
- Mais globalement, après échantillonnage:

$$y[k] = p(kT) \star s[u_k] + b[k];\ \ b[k] = h \star w[k]$$

- Si la condition de Nyquist de non ISI est satisfaite:

$$y[k] = p(0)\ s[u_k] + b[k]$$

Donc probabilité d'erreur:

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2}\, [F_b(-p(0)\sqrt{E}) + 1 - F_b(p(0)\sqrt{E})]$$

où $E_s = ||s[u_k]||^2$.

- Si $b \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors $P_\varepsilon = Q(\frac{p(0)\sqrt{E}}{\sigma})$
- Le RSB est souvent exprimé en dB:

$$\rho_{dB} = 10\, \log_{10} \frac{p(0)^2\, E}{\sigma^2} = 20\, \log_{10} \frac{p(0)\sqrt{E}}{\sigma}$$

- Si bruit blanc de dsp $N_o/2$, et $H(f)$ basse-bas idéal de bande $[-B,\ B]$, alors $\sigma^2 = N_o\, B$.

Filtre adapté et RSB

On poursuit l'exemple du PAM2

- RSB:

$$\rho = \frac{\mathrm{var}\{p(0)\, s\}}{\mathrm{var}\{b\}} = \frac{E_s\, |p(0)|^2}{\int |H(f)|^2\, S_w(f)\, df} = \frac{E_s\, |\int H(f) C(f) G(f)\, df|^2}{||H(f)\, \sqrt{S_w(f)}||^2}$$

  Donc, pour la norme L^2:

$$\rho = E_s \frac{\langle \frac{C^* G^*}{\sqrt{S_w}}\, ,\; H\, \sqrt{S_w} \rangle}{||H\, \sqrt{S_w}||^2}$$

  Alors, d'après l'inégalité de Schwarz, $\rho \leq E_s ||CG/\sqrt{S_w}||^2$, avec égalité ssi:

$$H(f)\, \sqrt{S_w(f)} = \frac{C(f)^*\, G(f)^*}{\sqrt{S_w(f)}}$$

  Soit aussi

$$H(f) = \frac{C(f)^*\, G(f)^*}{S_w(f)}$$

  C'est le **filtre adapté** au canal et au bruit.

- Si le bruit est blanc, de dsp $N_o/2$, alors $h(t) = \frac{2}{N_o}\,(c \star g)(-t)$

  Le RSB optimal obtenu dans ce cas est:

$$\rho = E_s\, \frac{2}{N_o}\, ||C\, G||^2$$