

Tenseurs

en sciences des données

Tensors in Data Sciences

par **Pierre COMON**

Directeur de Recherche

Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, Gipsa-Lab, 38000 Grenoble

Résumé

Le principal argument souvent avancé en physique pour utiliser les tenseurs est leur définition intrinsèque permettant l'invariance de leurs propriétés vis à vis du système de coordonnées. Dans cet article, un autre intérêt des tenseurs est mis en avant, à savoir l'unicité de leur décomposition en somme de tenseurs simples. Cette unicité permet d'identifier ces tenseurs simples à des grandeurs ayant un sens physique. Cette propriété unique, décrite en détail dans cet article, a inspiré de nombreux travaux ces dernières années dans des domaines applicatifs très variés, notamment en science des données, dont il est donné un aperçu.

Abstract

The main argument often put forward in physics to use tensors is their intrinsic definition allowing the invariance of their properties with respect to the coordinate system. In this paper, another interest of tensors is put forward, namely the uniqueness of their decomposition into a sum of simple tensors. This uniqueness allows to identify these simple tensors to quantities having a physical meaning. This unique property, described in detail in this article, has inspired numerous works in recent years in a wide variety of application domains, particularly in data science, which is outlined here.

Mots-clés

rang tensoriel, décomposition Canonique Polyadique (CP), Tucker, MLSVD, séparation aveugle de sources, traitement d'antenne, spectrométrie fluorescente, complexité arithmétique, polynômes multi-variés, compression de données

Keywords

tensor rank, Canonical Polyadic (CP) decomposition, Tucker, MLSVD, blind source separation, antenna array processing, fluorescence spectroscopy, arithmetic complexity, multivariate polynomials, data compression

Table des matières

1 Définitions et propriétés	3
1.1 Applications multilinéaires	3
1.2 Exemples	5
1.3 Notations et transformations	6
1.3.1 Contraction	6
1.3.2 Changement de base	7
1.3.3 Produit tensoriel	9
1.3.4 Norme euclidienne	9
2 Décompositions tensorielles exactes	9
2.1 Rang tensoriel, décomposition Canonique Polyadique (CP)	9
2.2 Lien avec les polynômes multivariés	12
2.3 Rang multilinéaire (Tucker, MLSVD)	13
2.4 Autres rangs (non-négatif, symétrique, orthogonal)	15
2.5 Trains tensoriels	16
3 Décompositions tensorielles approchées	16
3.1 Diagonalisation orthogonale approximative	17
3.2 Approximation de faible rang multilinéaire	17
3.3 Approximation de rang 1	18
3.4 Rang frontière	18
3.5 Approximation de faible rang sous contrainte	19
4 Applications	20
4.1 Analyse en Composantes Indépendantes	20
4.1.1 Identification de mélanges linéaires	20
4.1.2 Maximisation d'un contraste quand $P \leq N$	21
4.1.3 Séparation aveugle de sources indépendantes	23
4.1.4 Fouille documentaire	24
4.2 Diversités physiques	25
4.2.1 Spectrométrie fluorescente	25
4.2.2 Imagerie planétaire	26
4.2.3 Traitement d'antenne	27
5 Annexes	29
5.1 Notations supplémentaires	29
5.2 Démonstration de P9 et (12)	30
5.3 Démonstration de P16 et (23)	30

Introduction

Les tenseurs sont des objets utilisés depuis longtemps en physique, car ils jouissent de propriétés d'invariance vis à vis des systèmes de coordonnées utilisés. Ils apparaissent aussi lorsqu'on veut évaluer la complexité arithmétique de certains problèmes. Enfin, on les rencontre en statistiques, avec les moments et les cumulants de variables aléatoires multivariées. Mais plus récemment, les tenseurs ont fait leur entrée dans d'autres secteurs du monde de l'ingénieur, tels que les télécommunications, l'ingénierie biomédicale, la chimiométrie, le traitement du signal, et bien d'autres. Pourtant ce n'est pas l'indépendance du système de coordonnées dans leur définition qui a permis aux tenseurs de revenir au coeur des outils algébriques utilisés par les ingénieurs. Alors que s'est-il passé ?

Une des propriétés fondamentales des tenseurs est qu'ils peuvent se décomposer de manière unique en une somme de tenseurs plus simples, sous des hypothèses assez faibles. Et dans bien des situations, ces termes plus simples revêtent une signification physique intéressante. C'est cette propriété d'unicité qui leur a valu ce regain d'intérêt depuis une douzaine d'années. Nous décrivons cette propriété fondamentale dans la section 2. Toutefois, en présence d'erreurs de mesure (e.g. bruit), le tenseur mesuré n'a pas le rang escompté de sorte qu'il faudrait calculer la meilleure approximation de rang faible. Or cette approximation n'existe pas toujours comme nous le montrons dans la section 3, ce qui complique l'implantation des algorithmes. Enfin plusieurs applications phare sont décrites dans la section 4.

Nota : le lecteur trouvera en fin d'article un glossaire des termes et expressions importants, ainsi qu'un tableau des sigles, notations et symboles utilisés tout au long de l'article.

Définitions et propriétés

On notera les vecteurs avec des lettres grasses minuscules, e.g. $\mathbf{x}$, les matrices avec des majuscules grasses, e.g. $\mathbf{M}$, et les tenseurs par des lettres calligraphiques grasses, e.g. $\mathcal{T}$. L'opérateur de transposition d'un vecteur ou d'une matrice sera noté $(^T)$; dans $\mathbb{C}$ l'opérateur de transposition hermitienne sera noté $(^H)$. Les composantes des vecteurs, matrices et tenseurs dans un système de coordonnées prédéfini seront des nombres scalaires, représentés par des lettres non grasses indexées, par exemple x_i , M_{ij} , $\mathcal{T}_{ijk}$. Dans la mesure du possible, un indice n variera entre 1 et N , i.e. la même lettre sera choisie pour la borne supérieure de l'intervalle, mais en majuscule.

1.1 Applications multilinéaires

Dimension. La dimension d'un espace vectoriel (de dimension finie) est le nombre de vecteurs linéairement indépendants nécessaires pour en constituer une base. Le corps de construction est de dimension 0 car aucun vecteur de base n'est nécessaire, le nombre 1 suffit.

Linéarité. Soient E et F deux espaces vectoriels, de dimension finie M et N respectivement. Le corps de construction $\mathbb{K}$ des espaces désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, suivant le besoin. Une application g de E vers F est linéaire si elle vérifie la propriété suivante :

$$g(\alpha \mathbf{x} + \alpha' \mathbf{x}') = \alpha g(\mathbf{x}) + \alpha' g(\mathbf{x}'), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in E, \forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{K}.$$

Si on fixe des bases pour les espaces E et F , nous savons que tout vecteur de E (resp. F) peut être représenté par un tableau de M (resp. N) coordonnées, et que toute application linéaire de E vers F peut être représentée par une matrice de dimensions $M \times N$.

Bilinéarité. Si E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels, une application $g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ de $E_1 \times E_2$ dans F est bilinéaire si elle est linéaire par rapport à $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$. Autrement dit, $g(\alpha \mathbf{x}_1 + \alpha' \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_2) = \alpha g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \alpha' g(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_2)$ et $g(\mathbf{x}_1, \beta \mathbf{x}_2 + \beta' \mathbf{x}'_2) = \beta g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \beta' g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_2)$. Un exemple typique est la *forme bilinéaire* réelle que nous connaissons bien, qui à tout couple de vecteurs réels $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ associe le nombre $g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1^T \mathbf{A} \mathbf{x}_2 \in \mathbb{K}$, où $(^T)$ désigne la transposition.

Multi-linéarité. Dans cet article, nous allons étudier les applications multilinéaires. Soient E_i des espaces vectoriels de dimension M_i , et F_i des espaces vectoriels de dimension N_j , $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$. Si $\mathbf{g}$ désigne une application multilinéaire de $E_1 \times \dots \times E_I$ dans $F_1 \times \dots \times F_J$, elle vérifie $\forall i, 1 \leq i \leq I$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \dots, \alpha \mathbf{x}_i + \alpha' \mathbf{x}'_i, \dots, \mathbf{x}_I) = \alpha \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_I) + \alpha' \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}'_i, \dots, \mathbf{x}_I),$$

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$, et pour tous les vecteurs $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i \in E_i$.

Tableau de coordonnées. La propriété essentielle avancée généralement pour argumenter l'usage des tenseurs en physique est leur indépendance du système de coordonnées, c'est à dire des bases

choisies pour les différents espaces [1, 2] [A1210] [A125]. Dans cet article, ce n'est précisément *pas cette propriété* qui est mise en avant, de sorte que nous pouvons travailler avec les tableaux de coordonnées. C'est ce que nous allons faire pour alléger les notations. Assimiler les vecteurs, les matrices, et plus généralement tous les tenseurs, à leur *tableau de coordonnées*, est légitime en dimension finie si des bases ont été préalablement définies dans chaque espace, ce que nous supposons. En revanche les coordonnées d'un tenseur changeront évidemment lorsque les bases changent, de manière à ce que l'application multilinéaire que représente ce tenseur reste la même.

Ordre et valence. On appelle *valence* le couple (I, J) , où I désigne le nombre d'espaces de départ de dimension non nulle, et J celui des espaces d'arrivée. On appelle *ordre* le nombre total $D = I + J$ d'espaces vectoriels impliqués dans la définition d'une forme multilinéaire. Pour une application linéaire, $I = J = 1$. Pour une forme bilinéaire, telle qu'un produit scalaire, $I = 2$, et l'ensemble d'arrivée est le corps de construction lui-même de sorte que $J = 0$.

Exemple 1 : forme trilinéaire

Si on prend une forme trilinéaire $g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ sur $\mathbb{R}$, $I = 3$ et $J = 0$, de sorte que $D = 3$. A cause de la multi-linéarité de g , nous avons pour tout triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ la propriété suivante :

$$g(\alpha \mathbf{x}_1, \beta \mathbf{x}_2, \gamma \mathbf{x}_3) = \alpha \beta \gamma g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3). \quad (1)$$

Ainsi, les triplets de vecteurs $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ et $(\alpha \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \frac{1}{\alpha} \mathbf{x}_3)$ ont la même image par toute forme trilinéaire.

Tenseurs. Fort de cette propriété (1), on peut construire une **classe d'équivalence**, notée $\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3$ à laquelle tous les triplets de vecteurs de la forme (1) appartiennent [1, 3].

Définition D1. Le sous-espace vectoriel engendré par ces classes d'équivalences est noté $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$. Le symbole $\otimes$ désigne le produit tensoriel, et les éléments de $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$ sont appelés *tenseurs*.

Exemple 2 : produit tensoriel de deux vecteurs

Soient $\mathbf{x}_1 \in E_1$ et $\mathbf{x}_2 \in E_2$. Les vecteurs $(5\mathbf{x}_1, 2\mathbf{x}_2)$ et $(10\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ sont différents dans $E_1 \times E_2$. Mais les tenseurs $5\mathbf{x}_1 \otimes 2\mathbf{x}_2$ et $10\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2$ sont identiques dans $E_1 \otimes E_2$.

On notera que les *tenseurs élémentaires* associés aux formes multilinéaires (1) sont les plus simples, et sont parfois appelés *tenseurs simples*, *purs*, *décomposables*, *élémentaires* ou *séparables*. Dans le présent article, nous adopterons la terminologie de "tenseurs simples" comme dans [4]. On verra plus loin, lorsque le rang tensoriel sera défini, que de tels tenseurs ont un rang égal à 1.

Exemple 3 : discrétisation d'une fonction à variables séparées.

Si on échantillonne une fonction à variables séparées, $f(x, y, z) = a(x)b(y)c(z)$, on obtient un tableau $\mathcal{D}_{ijk}$ qui peut s'écrire comme un tenseur simple : $\mathcal{D}_{ijk} = a_i b_j c_k$.

Nous entrevoyons déjà l'écueil que représente la manipulation des tableaux de coordonnées : il faut choisir un représentant dans la classe d'équivalence, et garder à l'esprit qu'il est défini aux facteurs d'échelle (α, β, γ) près. Nous adopterons la définition suivante.

Définition D2. Soient E_i et F_j des espaces de dimension supérieure à zéro, $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$. Un tenseur d'ordre D est une application multilinéaire de $E_1 \otimes \dots \otimes E_I$ dans $F_1 \otimes \dots \otimes F_J$, avec $D = I + J$. Si les bases des espaces E_i et F_j sont fixées, alors de tels tenseurs sont définis par un tableau à D indices.

Parmi ces D indices, I indices sont dits "contravariants" et J indices sont dits "covariants" [A1210]. Sauf mention contraire, nous nous intéresserons essentiellement aux tenseurs entièrement contravariants, c'est à dire aux *formes* multilinéaires ($D = I$ et $J = 0$), comme dans l'exemple 1, ou dans l'exemple 4 ci-après.

Pour terminer, le terme de “rang” a été utilisé à une époque en physique pour désigner l'ordre des tenseurs, mais nous proscrivons cette terminologie car le rang désigne déjà un autre concept en mathématiques, bien connu pour les opérateurs linéaires (représentés par des matrices). Le *rang tensoriel* sera défini un peu plus loin dans cet article, dans la section 2.1.

1.2 Exemples

Exemple 4 : forme trilinéaire

Soient $\mathbf{x} \in E_1$, $\mathbf{y} \in E_2$ et $\mathbf{z} \in E_3$, trois vecteurs. L'application de $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$ dans $\mathbb{K}$ définie par

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{i,j,k} \mathcal{T}_{ijk} x_i y_j z_k$$

est un tenseur d'ordre 3. Nous voyons que l'image peut être vue comme un polynôme homogène de degré global 3, mais linéaire par rapport à chacune des 3 variables. C'est cette propriété du polynôme qui permet de lui conférer l'invariance par changement d'échelle décrite dans l'équation (1).

De manière plus générale et comme nous le verrons dans la section 2.2, tous les polynômes homogènes de degré D sont associés bijectivement à des tenseurs d'ordre D [3]. Notons que certains tenseurs peuvent jouir de symétrie partielle, comme ceux associés à des polynômes du type $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{z})$, ou de symétrie totale comme ceux associés à $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$. Un tenseur symétrique peut être représenté par un tableau de coordonnées symétrique [5], c'est à dire vérifiant $\mathcal{T}_{\sigma(i,j,k)} = \mathcal{T}_{ijk}$ pour toute permutation σ .

Exemple 5 : produit de deux nombres complexes

Le corps des complexes peut être vu comme un espace de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Ainsi, si on représente tout nombre complexe par le couple de ses parties réelle et imaginaire, alors le produit de deux nombres complexes (x_1, x_2) et (y_1, y_2) peut s'écrire dans $\mathbb{R}^2$:

$$(z_1, z_2) = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

L'application bilinéaire qui à deux nombres complexes associe leur produit est un tenseur d'ordre 3. Les bases canoniques étant fixées, elle est représentée par un tableau de coordonnées $\mathcal{T}$ de dimension $2 \times 2 \times 2$ de sorte que les composantes de l'image peuvent s'écrire :

$$z_k = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathcal{T}_{ijk} x_i y_j$$

En posant

$$\mathbf{T}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

nous avons :

$$z_1 = (x_1, x_2) \mathbf{T}_R \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad z_2 = (x_1, x_2) \mathbf{T}_I \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Pour des raisons pratiques, il pourra être utile de ranger les valeurs du tableau $\mathcal{T}$ dans une matrice unique, par exemple dans la matrice $\mathbf{T}_{(1)}$ suivante, de dimension 2×4 :

$$\mathbf{T}_{(1)} = [\mathbf{T}_R \mid \mathbf{T}_I].$$

Cette matrice $\mathbf{T}_{(1)}$ est la première “matrice dépliant” associée à $\mathcal{T}$.

Cet exemple a été utilisé dans notre cours à l'Univ. Grenoble Alpes en 2015-18 [6], et servira dans cet article à illustrer différents concepts de manière simple et concrète.

Exemple 6 : produit de deux matrices

Le produit de deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, de taille $M \times N$ et $N \times P$ respectivement, peut être vu comme une application bilinéaire $\mathbf{C} = g(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Or l'ensemble des matrices de taille $M \times P$ forme un espace vectoriel E_1 de dimension MP . Donc cette application bilinéaire g est définie de $E_1 \otimes E_2$ dans F , où E_2 est de dimension NP et F de dimension MP . Si les bases de ces espaces sont fixées (et il suffit de choisir comme base les matrices ayant un seul élément non nul, par exemple égal à 1), alors l'application bilinéaire g est définie par un tableau à trois indices, $\mathcal{T}_{ijk}$, avec $i \in \{1, \dots, MP\}$, $j \in \{1, \dots, NP\}$, et $k \in \{1, \dots, MP\}$. Nous ne donnons pas ici le tableau de coordonnées, car il est de dimensions trop grandes (même pour des matrices 2×2 , il est déjà de taille $4 \times 4 \times 4$).

Nota : Il existe un algorithme (proposé par Strassen en 1969) qui permet d'effectuer le produit de deux matrices 2×2 en seulement 7 multiplications [7, pp.10-12]. C'est le rang du tenseur qui permet de connaître la borne inférieure sur le nombre d'opérations.

Le tenseur représentant le produit de deux matrices a fait l'objet de travaux de recherche très poussés, visant à réduire la complexité du calcul. En effet, le rang d'un tel tenseur représente le nombre minimal de multiplications nécessaires [7, ch.14]. Mais les algorithmes atteignant cette borne n'ont pas été découverts pour toutes les valeurs possibles des dimensions.

1.3 Notations et transformations

Comme nous allons travailler avec les tableaux de coordonnées, il est important de savoir comment ces derniers sont affectés par diverses transformations, dont les changements de base en particulier. Pour alléger les écritures, nous n'utiliserons pas la convention de sommation d'Einstein [2, 8, 9], mais plutôt des notations compactes.

1.3.1 Contraction

La première opération est la contraction sur un indice. Soient deux tenseurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, d'ordre D_A et D_B respectivement. On peut effectuer un "produit" de ces deux tenseurs en sommant sur le p ème indice de $\mathcal{A}$ et le q ème indice de $\mathcal{B}$, pourvu que les dimensions concernées soient compatibles. Dans ce cas, le tenseur obtenu, $\mathcal{C}$, est d'ordre $D_A + D_B - 2$. Un exemple suffit pour clarifier cette définition. Si $D_A = 3$, $D_B = 4$, $p = 2$ et $q = 3$, alors le tenseur $\mathcal{C}$ peut être représenté par le tableau de coordonnées :

$$\mathcal{C}_{ijklm} = \sum_n \mathcal{A}_{ijn} \mathcal{B}_{klmn}.$$

Lorsque $p = q$, on peut adopter l'écriture compacte $\mathcal{C} = \mathcal{A} \bullet_p \mathcal{B}$:

Définition D3. Le tenseur $\mathcal{C} = \mathcal{A} \bullet_p \mathcal{B}$ résultant de la contraction entre deux tenseurs, d'ordre D_A et D_B respectivement et ayant la même p ème dimension, est d'ordre $D_A + D_B - 2$, et s'obtient en sommant sur le p ème indice.

Exemple 7 : loi de Hooke en physique

La loi de Hooke relie les tenseurs de contraintes $\mathcal{F}$ et de déformations $\mathcal{X}$ (tous deux d'ordre 2 et de dimensions 3×3) pour les matériaux élastiques :

$$\mathcal{F}_{kl} = \sum_{i,j} \mathcal{C}_{ijkl} \mathcal{X}_{ij},$$

ce qui peut s'écrire avec notre notation compacte de contraction $\mathcal{F} = \mathcal{C} \bullet_2 \bullet_1 \mathcal{X}$. Les tenseurs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{X}$ sont représentés par des matrices symétriques. Le tenseur d'élasticité $\mathcal{C}$ est d'ordre 4 et de dimensions $3 \times 3 \times 3 \times 3$, et peut être représenté par un tableau de coordonnées partiellement symétrique.

La contraction entre un tenseur $\mathcal{A}$ et une matrice $\mathbf{M}$ présente un intérêt tout particulier, de sorte que nous adoptons dans la suite une écriture dérogatoire dans un tel cas. $\mathcal{A} \bullet_p \mathbf{M}$ désignera la somme sur le p ème indice de $\mathcal{A}$ et le premier indice de $\mathbf{M}$, tandis que $\mathbf{M} \bullet_p \mathcal{A}$ désignera la somme sur le p ème indice de $\mathcal{A}$ et le second indice de $\mathbf{M}$. Avec cette convention on a donc :

$$\mathbf{M} \bullet_p \mathcal{A} = \mathcal{A} \bullet_p \mathbf{M}^T. \quad (2)$$

Cette convention nous permettra d'alléger les écritures.

1.3.2 Changement de base

Les phénomènes physiques sont indépendants du système de coordonnées alors que leur mesure ne l'est pas. C'est pourquoi il est important de savoir comment les tableaux de coordonnées des tenseurs sont affectés par des changements de base. C'est ce que nous allons voir ici à travers plusieurs exemples concrets.

Exemple 8 : moments

Soient $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ des variables aléatoires, de dimension M , N et P respectivement, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut définir le moment d'ordre trois $\mathcal{M}_{ijk} = \mathbb{E}\{x_i y_j z_k\}$. Alors la propriété de multi-linéarité s'écrit :

$$\mathbb{E}\{(\mathbf{Ax}) \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z}\} = \mathbf{A} \bullet_1 \mathcal{M}, \quad \mathbb{E}\{\mathbf{x} \otimes (\mathbf{By}) \otimes \mathbf{z}\} = \mathbf{B} \bullet_2 \mathcal{M}, \quad \mathbb{E}\{\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes (\mathbf{Cz})\} = \mathbf{C} \bullet_3 \mathcal{M}. \quad (3)$$

pour toutes matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ de dimensions compatibles.

De manière plus générale, les moments d'ordre D d'une variable aléatoire de dimension N sont des tenseurs contravariants d'ordre D et de dimensions $N \times \dots \times N$. Ceci peut se prouver facilement en remontant à la définition de la fonction génératrice des moments :

$$\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \mathbb{E}\{\exp(\mathbf{u}^T \mathbf{x})\}$$

On constate au passage que $\phi_{\mathbf{Ax}}(\mathbf{u}) = \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}^T \mathbf{u})$. Les moments d'ordre D sont les dérivées d'ordre D de $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ à l'origine. En particulier, regardons de plus près le raisonnement à l'ordre 3 si $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$. Nous avons $\mathbb{E}\{y_i y_j y_k\} = \frac{\partial^3 \phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{u})}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \Big|_{\mathbf{u}=0} = \frac{\partial^3 \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}^T \mathbf{u})}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \Big|_{\mathbf{u}=0}$, puis en effectuant $\mathbb{E}\{y_i y_j y_k\} = \sum_{\ell, m, n} A_{i\ell} A_{jm} A_{kn} \mathbb{E}\{x_{\ell} x_m x_n\}$. Ceci prouve la relation entre les moments d'ordre 3 de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{y}$, que l'on peut écrire de manière compacte : $\mathcal{M}\{\mathbf{y}\} = \mathbf{A} \bullet_1 \mathbf{A} \bullet_2 \mathbf{A} \bullet_3 \mathcal{M}\{\mathbf{x}\}$.

Les moments sont des outils très pratiques, mais pas les mieux adaptés quand il s'agit de prendre en compte l'indépendance statistique, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 9 : cumulants

La fonction génératrice des cumulants est définie par

$$\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \log \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}).$$

Les cumulants d'ordre D sont les coefficients des termes de degré D dans le développement en série de Taylor de $\psi_{\mathbf{x}}$ au voisinage de l'origine. Si les composantes x_i de $\mathbf{x}$ sont statistiquement indépendantes, nous savons que $\mathbb{E}\{\prod_i \exp(u_i x_i)\} = \prod_i \mathbb{E}\{\exp(u_i x_i)\}$. Il vient alors en prenant le logarithme que $\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \sum_i \psi_{x_i}(u_i)$, qui est une relation plus facile à exploiter qu'un produit. On peut en déduire que les cumulants d'une somme de variables indépendantes sont égaux à la somme des cumulants de chacune des variables. En d'autres termes, nous avons par exemple, dès lors que $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont statistiquement indépendantes, la relation entre les cumulants d'ordre D :

$$\text{Cum}_{(D)}\{a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2\} = a^D \text{Cum}_{(D)}\{\mathbf{x}_1\} + b^D \text{Cum}_{(D)}\{\mathbf{x}_2\}.$$

Cette propriété, donnée sous une forme multivariée en (5) ci-dessous, n'est pas partagée par les moments. La variance est le cumulants d'ordre 2.

Nous pouvons retenir le résultat suivant [10] :

Propriété P4. Si deux variables aléatoires $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont liées par une relation linéaire déterministe $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, alors leurs moments et leurs cumulants sont liés par une relation multilinéaire. En particulier à l'ordre 3 :

$$\mathcal{M}_{ijk}\{\mathbf{y}\} = \sum_{\ell mn} A_{i\ell} A_{jm} A_{kn} \mathcal{M}_{\ell mn}\{\mathbf{x}\} \quad (4)$$

Si de plus les composantes de $\mathbf{x}$ sont statistiquement indépendantes, seuls les cumulants marginaux de $\mathbf{x}$ sont non nuls de sorte que les cumulants de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{y}$ sont reliés par une relation plus simple :

$$\mathcal{C}_{ijk}\{\mathbf{y}\} = \sum_{\ell} A_{i\ell} A_{j\ell} A_{k\ell} \mathcal{C}_{\ell\ell\ell}\{\mathbf{x}\} \quad (5)$$

Nous reviendrons plus loin sur l'écriture compacte des équations (4) et (5), et ce qu'elles signifient en tant que décompositions tensorielles (cf. sections 2.1 et 2.3). L'exemple des cumulants décrit ci-dessus est sans doute un des plus intéressants, car il a permis de prouver que le problème de *séparation aveugle de sources* était soluble [11], grâce à la décomposition que nous allons découvrir dans la section 2.1.

Nous venons de voir que le tenseur des moments (ainsi que celui des cumulants) est contravariant. Mais tous les tenseurs ne sont pas contravariants ; nous en donnons une illustration simple ci-dessous.

Exemple 10 : dérivation

La dérivation d'ordre D d'une fonction scalaire $f(\mathbf{x})$ de N variables x_n , $1 \leq n \leq N$, est un tenseur covariant d'ordre D . Pour le vérifier prenons le cas $D = 2$. Si $A_{k\ell} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}$ et que nous effectuons le changement de variable $\mathbf{x}' = \mathbf{M}\mathbf{x}$, alors en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées, on constate que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell} = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x'_i \partial x'_j} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_\ell}.$$

Par conséquent, le nouveau tenseur de dérivation $A'_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'_i \partial x'_j}$ vérifie : $A_{k\ell} = \sum_{i,j} A'_{ij} M_{ik} M_{j\ell}$.

Autrement dit $\mathbf{A}' = (\mathbf{M}^{-1})^T \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1}$. Nous voyons que la multi-linéarité ne s'applique pas avec la matrice de passage $\mathbf{M}$ mais avec son inverse : c'est le caractère *covariant* du tenseur.

Dans le présent article, nous nous intéresserons, pour simplifier, principalement aux tenseurs contravariants, de sorte que la multi-linéarité s'appliquera avec la matrice de passage, comme dans (3) et (5), et pas avec son inverse. De plus, notons que les relations (3), (4), (5) restent valides pour des matrices rectangulaires ou de rang déficient. Nous adopterons donc la règle énoncée par la propriété ci-dessous, qui s'appliquera même si la transformation multilinéaire n'est pas inversible. Dans un tel cas, on notera que $\mathcal{T}'$ ne représentera plus le même opérateur, puisque les dimensions des espaces auront diminué. La règle ci-dessous ne se limitera donc pas seulement à des changements de base.

Propriété P5. Par transformation multilinéaire définie par les matrices $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{C}\}$, le tableau de coordonnées $\mathcal{T}$ d'un tenseur contravariant est transformé en un tableau $\mathcal{T}'$ qui s'écrit :

$$\mathcal{T}'_{ij\dots k} = \sum_{\ell m\dots n} A_{i\ell} B_{jm} \dots C_{kn} \mathcal{T}_{\ell m\dots n}, \quad (6)$$

ce que nous conviendrons de noter de manière compacte

$$\mathcal{T}' = [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{C}; \mathcal{T}] \quad (7)$$

En physique, on trouvera quantité d'autres exemples concrets que ceux que nous avons donnés, entre autres en géométrie différentielle [12, 8], relativité [13, 8], mécanique [8], mécanique des fluides [9], etc.

1.3.3 Produit tensoriel

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tenseurs d'ordre quelconque D_A et D_B et de coordonnées $\mathcal{A}_{ij\dots\ell}$ et $\mathcal{B}_{mn\dots p}$, respectivement. Le produit tensoriel $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ entre deux tenseurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ désigne le tenseur dont les coordonnées sont $\mathcal{C}_{ij\dots\ell mn\dots p} = \mathcal{A}_{ij\dots\ell} \mathcal{B}_{mn\dots p}$. Par conséquent :

Propriété P6. Le produit tensoriel $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ entre deux tenseurs, d'ordre D_A et D_B respectivement, est d'ordre $D_A + D_B$.

Exemple 11 : tenseurs simples

Un tenseur simple d'ordre D , $\mathcal{D}$, est le produit tensoriel de D tenseurs d'ordre 1 : $\mathcal{D} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \dots \otimes \mathbf{c}$, et $\mathcal{D}_{ij\dots\ell} = a_i b_j \dots c_\ell$. Comptons le nombre de paramètres libres caractérisant $\mathcal{D}$. Si ses dimensions sont $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_D$, on pourrait croire qu'il y a $\sum_d N_d$ composantes libres, c'est à dire autant que les composantes des vecteurs le constituant. En fait il y en a moins que ça en vertu de la propriété fondamentale (1) du produit tensoriel. On peut en effet écrire $\mathcal{D} = \lambda \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \dots \otimes \mathbf{c}$ où les vecteurs $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{c}\}$ sont de norme 1 et λ est un facteur d'échelle réel positif. On voit donc que le nombre de paramètres libres est $1 + (N_1 - 1) + (N_2 - 1) + \dots + (N_D - 1) = \sum_d N_d - D + 1$.

1.3.4 Norme euclidienne

Soient deux tenseurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de mêmes dimensions, alors on peut définir le produit scalaire (entre leurs tableaux de coordonnées) :

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{ij\dots k} \mathcal{A}_{ij\dots k} \mathcal{B}_{ij\dots k}^* \quad (8)$$

où $*$ désigne la conjugaison complexe ; elle sera omise si les tenseurs sont réels. Ce produit scalaire induit la norme de Frobenius $\|\mathcal{A}\|^2 = \sum_{ij\dots k} |\mathcal{A}_{ij\dots k}|^2$, que nous utiliserons par la suite.

2 Décompositions tensorielles exactes

On pourrait croire que les décompositions matricielles usuelles s'étendent facilement aux tenseurs, mais il n'en est rien. En réalité il existe des différences importantes dès qu'on passe de l'ordre 2 à l'ordre 3, qui à la fois constituent l'intérêt du recours aux tenseurs, mais aussi soulèvent de nouvelles difficultés théoriques et algorithmiques.

2.1 Rang tensoriel, décomposition Canonique Polyadique (CP)

Nous avons vu dans l'exemple 3 une forme simple de tenseurs, très utile dans les applications, car ces derniers représentent des fonctions à variables séparées. Décomposer un tenseur en somme de tenseurs simples conduit à la première proposition :

Proposition P7 : décomposition CP (CPD). Tout tenseur $\mathcal{T}$ est décomposable en une somme de tenseurs simples de la forme $\mathcal{D}(r) = \mathbf{a}(r) \otimes \mathbf{b}(r) \otimes \dots \otimes \mathbf{c}(r)$.

Autrement dit, tout tenseur $\mathcal{T}$ peut s'écrire :

$$\mathcal{T} = \sum_{r=1}^R \mathcal{D}(r), \quad \text{soit} \quad \mathcal{T}_{ij\dots\ell} = \sum_{r=1}^R a_i(r) b_j(r) \dots c_\ell(r) \quad (9)$$

Puisque, comme nous l'avons vu dans la section 1.1 et dans l'exemple 11, la représentation de chaque tenseur $\mathcal{D}(r)$ est définie à un facteur d'échelle près, on peut normaliser les vecteurs qui le composent et écrire $\mathcal{D}(r) = \lambda(r)a_i(r)b_j(r) \dots c_\ell(r)$, en imposant aux vecteurs $a_i(r)$, $b_j(r)$, ... et $c_\ell(r)$ d'être de norme unité, et où $\lambda(r)$ est un réel positif. Ceci nous conduit à l'écriture conventionnelle introduite en (7) :

$$\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{C}; \mathcal{L} \rrbracket \quad (10)$$

où les R colonnes de chacune des D matrices sont de norme 1, et où $\mathcal{L}$ est un tenseur diagonal contenant les $\lambda(r)$ sur sa diagonale. En d'autres termes, l'écriture (10) signifie simplement :

$$\mathcal{T}_{ij\dots k} = \sum_{r=1}^R A_{ir} B_{jr} \dots C_{kr} \mathcal{L}_{rr\dots r}$$

En l'absence de normalisation, la décomposition CP est souvent notée de manière compacte dans la littérature $\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{C} \rrbracket$, où $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{C}$ sont les matrices à R colonnes contenant les vecteurs $a_i(r)$, $b_j(r)$, ... $c_\ell(r)$, respectivement.

Grâce à la proposition P7, on peut établir la définition suivante

Définition D8 : rang. Le nombre minimal de termes R , tel que l'égalité (9) est vérifiée exactement, définit le *rang* du tenseur $\mathcal{T}$.

Cette propriété a été énoncée par Hitchcock en 1927 [14] sous la terminologie de *décomposition canonique polyadique*. Elle a été redécouverte plus tard et a été baptisée *Parafac* [15] ou *Candecomp* [16]. Aujourd'hui, on la nomme généralement *décomposition CP*, ce qui tient lieu d'acronyme à la fois pour *Canonical Polyadic* ou pour *Candecomp/Parafac* [17, 18]. On trouve aussi parfois la terminologie de *rank decomposition*, car c'est cette décomposition qui révèle le rang du tenseur.

Exemple 12. Les tenseurs simples définis dans l'exemple 3 ont un rang égal à 1.

On remarquera que la définition D8 du rang est compatible avec celle que l'on connaît bien pour le rang des matrices, c.à.d. lorsque l'ordre est 2. En revanche, nous savons que décomposer une matrice en somme de matrices de rang 1 ne se fait jamais de manière unique, car si $\mathbf{M} = \sum_{r=1}^R \mathbf{a}(r) \mathbf{b}(r)^T = \mathbf{A} \mathbf{B}^T$, alors pour toute matrice orthogonale $\mathbf{Q}$ (càd $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$), nous avons $\mathbf{M} = \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{B}^T$. Ceci prouve à l'évidence que l'ensemble des vecteurs colonnes $\{\mathbf{a}(r)\}$ de $\mathbf{A}$ est défini à une matrice orthogonale près.

Nous savons que le rang d'une matrice de dimensions $I \times J$ ne peut excéder $\min\{I, J\}$. Pour les tenseurs il n'en est pas de même, et le rang peut excéder toutes les dimensions. Un résultat, simple à montrer, est le suivant [19, 20] :

Propriété P9 : bornes sur le rang. Le rang d'un tenseur de dimensions $I \times J \times K$ admet la borne suivante :

$$\text{rank}\{\mathcal{T}\} \leq \min\{IJ, JK, KI\}. \quad (11)$$

Le même genre de borne s'obtient facilement pour des ordres plus élevés; si $\mathcal{T}$ est de dimensions $N_1 \times \dots \times N_D$, alors

$$\text{rank}\{\mathcal{T}\} \leq \min_d \left\{ \prod_{p \neq d} N_p \right\}. \quad (12)$$

Nous en donnons la preuve en annexe dans la section 5.2. Toutefois, cette borne supérieure devient très lâche quand l'ordre augmente. Une borne plus intéressante sera donnée dans la propriété P16.

Exemple 13. Le tenseur introduit dans l'exemple 5, et définissant le produit de deux nombres complexes dans $\mathbb{R}^2$, est de rang 3 et de dimensions $2 \times 2 \times 2$. Son rang est donc plus grand que toutes ses dimensions. Nous le montrerons plus loin dans les exemples 15 et 17. La propriété P9 donne 4 comme borne sur le rang, mais le rang maximal atteignable est 3, pour les tenseurs

de taille $2 \times 2 \times 2$.

La puissance de l'outil tensoriel réside entre autres dans la propriété P11 d'unicité de la décomposition CP, démontrée à l'origine par Kruskal [21] pour les tenseurs d'ordre 3. D'autres démonstrations ont été publiées ultérieurement pour des tenseurs d'ordre quelconque [22, 23, 24, 3]. Un des ingrédients nécessaires pour énoncer cette proposition P11 est le *rang de Kruskal*.

Définition D10 : rang de Kruskal. Le rang de Kruskal $\text{krank}\{\mathbf{M}\}$ d'une matrice $\mathbf{M}$ est le nombre maximal κ tel que *tout* sous-ensemble de κ colonnes de $\mathbf{M}$ soit linéairement indépendant.

En revanche, rappelons que le rang $\text{rank}\{\mathbf{M}\}$ d'une matrice $\mathbf{M}$ est le nombre maximal R tel que *il existe un* sous-ensemble de R colonnes de $\mathbf{M}$ linéairement indépendantes. On voit immédiatement que $\text{krank}\{\mathbf{M}\} \leq \text{rank}\{\mathbf{M}\}$ pour toute matrice $\mathbf{M}$.

Exemple 14. Les deux matrices suivantes sont de rang 3, mais le rang de Kruskal de $\mathbf{A}$ est 3 et celui de $\mathbf{B}$ est 2 :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, la première colonne de $\mathbf{B}$ est la somme de la deuxième et de la quatrième. En revanche, tout sous-ensemble de 3 colonnes de la matrice $\mathbf{A}$ est de rang 3.

Proposition P11 : unicité de la CPD. La décomposition CP d'un tenseur d'ordre $D \geq 3$ est unique si son rang R vérifie la condition suffisante

$$2R + D - 1 \leq \text{krank}\{\mathbf{A}\} + \text{krank}\{\mathbf{B}\} + \dots + \text{krank}\{\mathbf{C}\} \quad (13)$$

En d'autres termes, il suffit que le rang tensoriel ne soit pas trop élevé. Prenons le cas des tenseurs d'ordre $D = 3$ et comptons le nombre de degrés de liberté de part et d'autre de (9). Un tenseur $\mathcal{T}$ de dimensions $N_1 \times N_2 \times N_3$ contient $N_1 N_2 N_3$ composantes. D'après l'exemple 11 page 9, sa décomposition de rang R en contient $R(N_1 + N_2 + N_3 - 2)$. Une condition nécessaire est donc que le nombre d'équations soit au moins aussi grand que le nombre d'inconnues, c'est à dire que $N_1 N_2 N_3 \geq R(N_1 + N_2 + N_3 - 2)$. Cette condition définit le *rang attendu* d'un tenseur :

$$R_o = \left\lceil \frac{\prod_{d=1}^D N_d}{\sum_{d=1}^D N_d - D + 1} \right\rceil \quad (14)$$

Lorsque le ratio est entier, il y a autant d'équations que d'inconnues, mais la solution n'est malgré tout pas toujours unique [25]. Ce constat révèle en réalité la grande complexité de la décomposition des tenseurs et des polynômes multivariés [26].

Exemple 15. Reprenons le tenseur $2 \times 2 \times 2$ introduit dans l'exemple 5, et définissant le produit de deux nombres complexes. Si on adopte l'écriture sous forme de tableaux de coordonnées 2×4 comme dans l'exemple 5, nous pouvons toujours écrire la matrice $\mathbf{T}_{(1)}$ comme somme des trois matrices suivantes :

$$\mathbf{T}_{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Or ces trois matrices représentent des tenseurs simples. En effet, en posant

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on vérifie que le tenseur $\mathcal{T}$ peut s'écrire :

$$\mathcal{T} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (16)$$

On peut aussi remarquer que les deux matrices $\mathbf{T}_R$ et $\mathbf{T}_I$ définies dans l'exemple 5, qui sont les deux blocs 2×2 de la matrice $\mathbf{T}_{(1)}$ rappelée en (15), s'écrivent :

$$\mathbf{T}_R = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_I = -\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (17)$$

Comme $\mathcal{T}$ ne peut pas s'écrire dans $\mathbb{R}$ comme somme de moins de 3 tenseurs simples, $\mathcal{T}$ est de rang 3. Mais sa décomposition CP n'est pas unique. Nous verrons plus loin avec l'exemple 17 comment faire ce calcul avec des polynômes, ce qui sera plus simple que de manipuler des tableaux 2×4 .

On notera que cet exemple nous montre que le rang d'un tenseur dépend du corps de construction [27], ce qui n'est pas le cas des matrices (tenseurs d'ordre 2). La dépendance au corps de construction avait été remarquée par Kruskal dès les années quatre-vingts. A titre d'exercice, voyons comment le tenseur des exemples 5 et 15 se décomposerait dans $\mathbb{C}$.

Exemple 16. Dans $\mathbb{C}$, la décomposition CP de l'exemple 15 ne nécessite que deux termes :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}. \quad (18)$$

où $j = \sqrt{-1}$. Autrement dit, nous avons la CPD unique

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -j & j & 1 \\ -j & -1 & 1 & -j \end{array} \right] + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & j & -j & 1 \\ j & -1 & 1 & j \end{array} \right].$$

Ceci est heureux, car il s'agit du produit de deux nombres complexes ! On notera que (18) décrit le calcul $z_1 = (x^*y^* + xy)/2$ et $jz_2 = (x^*y^* - xy)/2$.

Nota : Un résultat similaire peut être obtenu avec le tenseur (symétrique cette fois) suivant, où $\mathbf{u}^{\otimes 3}$ désigne $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \frac{j}{2} \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}^{\otimes 3} - \frac{j}{2} \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix}^{\otimes 3}.$$

En pratique, on se contentera souvent d'une condition plus faible que P11 (borne sur le rang plus grande), plus facile à vérifier, et garantissant presque toujours l'unicité [28]. C'est la condition générique énoncée dans la proposition P12.

Proposition P12 : unicité générique de la CPD. La décomposition CP d'un tenseur d'ordre $D \geq 3$ est presque sûrement unique si son rang R est strictement inférieur au rang attendu R_o .

Pour l'ingénieur, une condition presque sûre est la plupart du temps suffisante, et elle sera préférable car elle est moins exigeante qu'une condition exacte. Il existe aussi d'autres conditions suffisantes d'unicité dans la littérature [29], qui peuvent fournir des bornes plus intéressantes, suivant les dimensions du tenseur.

2.2 Lien avec les polynômes multivariés

Il existe une *bijection canonique* entre les tenseurs d'ordre D et les polynômes homogènes multivariés de degré D [3, 30]. Prenons $D = 3$ pour fixer les idées et simplifier les écritures. A tout tenseur $\mathcal{T}$ de coordonnées $\mathcal{T}_{ijk}$ on peut associer le polynôme

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{ijk} \mathcal{T}_{ijk} x_i y_j z_k. \quad (19)$$

Un tenseur simple $\mathcal{D} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$ est donc associé à un produit de D formes linéaires : $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\sum_i a_i x_i)(\sum_j b_j y_j)(\sum_k c_k z_k)$. Lorsque $\mathcal{T}$ est symétrique, alors il peut être associé à une forme cubique $p(\mathbf{x}) = \sum_{ijk} \mathcal{T}_{ijk} x_i x_j x_k$, et les tenseurs simples symétriques sont alors des cubes de formes linéaires : $\delta(\mathbf{x}) = (\sum_i a_i x_i)^3$. Tout ceci reste vrai pour $D > 3$. L'intérêt de cette bijection est qu'on peut indifféremment utiliser la notation polynomiale ou les tableaux de coordonnées pour effectuer des calculs. L'approche par les polynômes s'avère en réalité bien plus puissante, grâce aux outils de géométrie algébrique [3].

Exemple 17. Reprenons les exemples 5 et 15. Le tenseur $\mathcal{T}$ est associé à la forme trilinéaire : $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (x_1 y_1 - x_2 y_2) z_1 + (x_2 y_1 + x_1 y_2) z_2$. Il est facile de voir que

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = x_1 y_1 (z_1 - z_2) - x_2 y_2 (z_1 + z_2) + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) z_2,$$

ce qui démontre directement (16) en utilisant la bijection (19). En effet, cette bijection associe les monômes x_1 et y_1 au vecteur $\mathbf{e}_1$, $(z_1 - z_2)$ est associé à $\mathbf{e}_4$, x_2, y_2 et z_2 sont associés à $\mathbf{e}_2$, et $(x_1 + x_2), (y_1 + y_2)$ et $(z_1 + z_2)$ sont associés à $\mathbf{e}_3$.

Le rang de $\mathcal{T}$ étant 3, on sait qu'on doit pouvoir implanter le produit de deux nombres complexes en effectuant seulement 3 multiplications réelles [7]. Une implantation brutale nous proposerait : $(z_1, z_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$, ce qui demande 4 produits réels. Or la décomposition CP que nous avons exhibée est constructive et nous montre comment le faire avec 3 produits seulement. En effet, on peut lire la construction de deux manières. Soit on regarde les coefficients de z_1 et de z_2 dans la décomposition de g en somme de produits de formes linéaires, soit on remarque qu'à partir de (17) il suffit de lire $z_1 = \mathbf{x}^T [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2] \mathbf{y}$ et $z_2 = \mathbf{x}^T [-\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \mathbf{y}$ pour obtenir la procédure :

1. former les variables $x_3 = x_1 + x_2$ et $y_3 = y_1 + y_2$;
2. calculer les trois produits $p_1 = x_1 \cdot y_1$, $p_2 = x_2 \cdot y_2$, et $p_3 = x_3 \cdot y_3$;
3. former les variables de sortie $z_1 = p_1 - p_2$ et $z_2 = -p_1 - p_2 + p_3$.

Cet exemple, posé comme exercice dans [7, ex.14.6 p.370], illustre une des applications de la décomposition CP et du rang tensoriel à la *complexité arithmétique*. Par exemple, il existe une littérature importante sur les algorithmes effectuant le produit de 2 matrices [31, 7, 32]. La recherche d'algorithmes nécessitant le moins possible d'opérations arithmétiques est encore d'actualité.

2.3 Rang multilinéaire (Tucker, MLSVD)

Propriété P13 : décomposition de Tucker. Pour tout tenseur $\mathcal{T}$ d'ordre D et de dimensions $I \times J \times \dots \times K$, on peut trouver D matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{C}$ de dimensions $I \times R_1, J \times R_2, \dots, K \times R_D$, respectivement, et un tenseur cœur $\mathcal{G}$ de dimensions $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_D$ plus petites ou égales à celles de $\mathcal{T}$, tels que :

$$\mathcal{T} = \mathcal{G} \bullet_1 \mathbf{A} \bullet_2 \mathbf{B} \bullet_3 \dots \bullet_D \mathbf{C}, \quad (20)$$

Conformément à P5, on conviendra aussi de noter cette décomposition de manière compacte :

$$\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{C}; \mathcal{G} \rrbracket. \quad (21)$$

Nous rappelons que (20) et (21) signifient que $\mathcal{T}_{ij\dots\ell} = \sum_p \sum_q \dots \sum_s A_{ip} B_{jq} \dots C_{ks} \mathcal{G}_{pq\dots s}$.

Cette décomposition a été proposée en 1964 par Tucker [33]. Bien évidemment, elle ne présente un intérêt que si au moins une des dimensions R_d est strictement plus petite que la dimension originale, sans quoi il suffirait de prendre $\mathcal{G} = \mathcal{T}$. En outre, la représentation sous cette forme sera la plus parcimonieuse si les dimensions R_d sont minimales, ce que nous supposons dorénavant.

Il se trouve que même si les R_d sont minimales, la décomposition de Tucker n'est pas unique. Ceci peut se voir aisément ; remplaçons chacune des matrices facteurs par leur décomposition QR ,

par exemple par une procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, i.e. $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1$, $\mathbf{B} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{R}_2$, $\mathbf{C} = \mathbf{Q}_D \mathbf{R}_D$, où les matrices $\mathbf{R}_d$ sont de taille $R_d \times R_d$ et $\mathbf{Q}_d^H \mathbf{Q}_d = \mathbf{I}$, alors nous obtenons une autre décomposition de Tucker :

$$\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_D; \mathcal{G}' \rrbracket,$$

où le nouveau tenseur cœur $\mathcal{G}'$ se déduit de $\mathcal{G}$ par la transformation multilinéaire :

$$\mathcal{G}' = \llbracket \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_D; \mathcal{G} \rrbracket.$$

Il vient donc qu'on peut choisir d'imposer aux matrices facteurs d'être semi-unitaires (i.e. $\mathbf{Q}_d^H \mathbf{Q}_d = \mathbf{I}$) dans la décomposition de Tucker. Ceci conduit à la définition suivante [34].

Définition D14 : SVD multilinéaire. Tout tenseur $\mathcal{T}$ admet une Décomposition en Valeurs Singulières multilinéaire (MLSVD) :

$$\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_D; \mathcal{G} \rrbracket, \quad (22)$$

où $\mathbf{Q}_d^H \mathbf{Q}_d = \mathbf{I}$ et où le tenseur $\mathcal{G}$ est de dimensions minimales $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_D$. Le D -uplet $(R_1, R_2, \dots, R_D)$ est baptisé "rang multilinéaire" de $\mathcal{T}$, et R_d "rang du mode d " de $\mathcal{T}$.

Cette décomposition a aussi reçu le nom de SVD d'ordre élevé (HOSVD). Il est possible de fixer l'indétermination de permutation (ordre des colonnes dans les matrices $\mathbf{Q}_d$) par une convention [34] ; cette convention s'apparente au classement des valeurs singulières par ordre décroissant dans la SVD matricielle. Aussi bien dans la SVD que dans la MLSVD, cette convention est totalement arbitraire ; l'unicité générique obtenue ne saurait donc permettre une interprétation physique, bien évidemment. Cependant, la MLSVD est d'une grande utilité pour comprimer les données, car l'unicité n'y est pas requise.

Exemple 18. En effet, supposons par exemple qu'un tenseur réel soit de dimensions $10 \times 10 \times 10$, mais qu'il admette une MLSVD avec $(R_1, R_2, R_3) = (4, 5, 6)$, alors son stockage nécessite $4 \times 5 \times 6 = 120$ éléments pour le cœur et 104 éléments pour les trois matrices rectangulaires orthogonales, soit 224 éléments au total au lieu de 1000 pour le tenseur d'origine.

Nota : Pour caractériser une matrice orthogonale de taille $N \times (N - P)$, il faut $N(N - 1)/2 - P(P - 1)/2$ paramètres.

La compression des données tensorielles offre bien sûr un intérêt pour leur stockage. Mais si cette compression se fait avec pertes, elle présente aussi un intérêt encore plus attractif pour le débruitage comme nous le verrons dans la section 3.

Fort de la compression offerte par la MLSVD, on peut se demander si la condition d'unicité de la CPD peut être améliorée. Il se trouve qu'un résultat récent le confirme [28] :

Propriété P15 : unicité de la CPD. La condition d'unicité de la CPD énoncée dans la proposition P12 peut être affinée en remplaçant les dimensions N_d par les rangs des modes d , R_d , dans l'expression (14) du rang attendu. Autrement dit, la CPD d'un tenseur est unique si son rang R vérifie :

$$R < \left\lceil \frac{\prod_{d=1}^D R_d}{\sum_{d=1}^D R_d - D + 1} \right\rceil.$$

Une autre question vient aussi à l'esprit : les rangs R_d sont-ils liés au rang tensoriel ? La réponse est un peu décevante, car il n'y a pas de relation d'égalité, mais seulement des bornes. A l'ordre $D = 3$ nous avons par exemple la propriété suivante, qui resserre la borne donnée en (11) :

Propriété P16 : bornes. Le rang R et le rang multilinéaire (R_1, R_2, R_3) d'un tenseur $\mathcal{T}$ d'ordre 3 vérifient les inégalités

$$\max\{R_1, R_2, R_3\} \leq R \leq \min\{R_1 R_2, R_2 R_3, R_3 R_1\}$$

A un ordre D quelconque, nous avons les bornes suivantes, comme cela est démontré en annexe

dans la section 5.3 :

$$\max_d \{R_d\} \leq R \leq \min_d \left\{ \prod_{p \neq d} R_p \right\}. \quad (23)$$

Remarque : Avant de clore cette section, il est utile de préciser que la MLSVD d'un tenseur d'ordre D se calcule facilement (ce qui n'est généralement pas le cas de la CPD). Nous nous pencherons sur ce calcul dans la section 3.2.

2.4 Autres rangs (non-négatif, symétrique, orthogonal)

Nous avons vu deux types de rang : le rang tensoriel défini par la CPD, et le rang multilinéaire défini par la MLSVD. Dans la définition du rang tensoriel, aucune contrainte n'était imposée sur les matrices-facteur entrant dans la CPD, si ce n'est d'être réelles ou complexes. En effet, lorsqu'on dispose de données réelles, il est souvent souhaitable d'obtenir une décomposition dans $\mathbb{R}$, sans quoi le résultat ne serait pas utilisable en pratique. Il en est de même pour les données réelles non-négatives (c'est à dire positives ou nulles).

Proposition P17 : rang non-négatif. Tout tenseur $\mathcal{T}$ réel non-négatif est décomposable en une somme de tenseurs simples réels non-négatifs de la forme $\mathcal{D}(r) = \mathbf{a}(r) \otimes \mathbf{b}(r) \otimes \cdots \otimes \mathbf{c}(r)$, soit :

$$\mathcal{T} = \sum_{r=1}^{R_+} \mathcal{D}(r)$$

Le nombre minimal R_+ de termes non-négatifs désigne le rang non-négatif de $\mathcal{T}$.

Il est clair que si on peut choisir les tenseurs simples $\mathcal{D}(r)$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ au lieu de les prendre dans $\mathbb{R}^+$, le nombre de termes pourrait être inférieur à R_+ . D'ailleurs, ceci a déjà été observé pour les matrices [17, 35]. Nous avons donc $R_+ \geq R$, avec possibilité d'inégalité stricte.

Rang symétrique. Comme nous l'avons vu dans l'exemple 4 et la section 2.2, un tenseur symétrique est représenté par un tableau de coordonnées symétrique $\mathcal{T}_{ij..k}$, c'est à dire que $\mathcal{T}_{ij..k} = \mathcal{T}_{\sigma(ij..k)}$ pour toute permutation σ . Nous avons la proposition suivante définissant le *rang symétrique*.

Proposition P18 : rang symétrique. Tout tenseur $\mathcal{S}$ symétrique est décomposable en une somme de tenseurs simples symétriques de la forme $\mathcal{D}(r) = \mathbf{a}(r) \otimes \mathbf{a}(r) \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}(r)$, soit :

$$\mathcal{S} = \sum_{r=1}^{R_s} \mathcal{D}(r)$$

Le nombre minimal R_s de termes symétriques désigne le rang symétrique de $\mathcal{S}$.

Il est clair que si on peut choisir les tenseurs simples $\mathcal{D}(r)$ sans leur imposer la symétrie, le nombre de termes nécessaire est majoré par R_s . Le fait qu'on puisse trouver des exemples de tenseurs symétriques ayant un rang strictement plus petit que leur rang symétrique a fait l'objet de conjectures [5, 36, 37, 38]. Il a été montré seulement récemment que c'est possible [4]. Par contre pour un tenseur d'ordre 2 (i.e. une matrice) symétrique, le rang symétrique, R_s , est toujours égal au rang, R .

Rang orthogonal. Etant donné un tenseur $\mathcal{T}$, on pourrait se demander s'il est possible de trouver une décomposition CP, $\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{C}; \mathcal{L} \rrbracket$, où les matrices-facteur ont des colonnes orthogonales. Le premier constat est que si une telle décomposition existe, elle tient lieu à la fois de MLSVD et de CPD. Autrement dit, nous avons affaire à une MLSVD où le tenseur cœur est diagonal. La

conséquence est que le rang d'un tel tenseur est nécessairement majoré par toutes ses dimensions.

Définition D19 : rang orthogonal. Si un tenseur $\mathcal{T}$ admet la CPD suivante

$$\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{C}; \mathcal{L} \rrbracket$$

où les matrices $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{C}\}$ ont des colonnes orthogonales, alors le nombre minimal $R_{\perp}$ de termes simples (c.à.d. le nombre de colonnes de ces matrices) désigne le rang orthogonal de $\mathcal{T}$.

Pour un tenseur d'ordre 2 (i.e. une matrice), le rang orthogonal, $R_{\perp}$, est égal au rang, R .

Remarque : Si on adopte le produit scalaire défini en (8), alors les tenseurs simples $\mathcal{D}(r) = \mathbf{a}(r) \otimes \dots \otimes \mathbf{c}(r)$ apparaissant dans une décomposition CP orthogonale sont orthogonaux entre eux. Cette propriété était vraie pour les matrices, et reste donc vraie pour les tenseurs. En effet, il suffit que les vecteurs $\{\mathbf{a}(r)\}$ soient orthogonaux pour que ce soit le cas (quels que soient les autres vecteurs $\mathbf{b}(r), \dots, \mathbf{c}(r)$). Ceci se vérifie aisément en substituant les $\mathcal{D}(r)$ par leur expression dans le produit scalaire : $\langle \mathcal{D}(p), \mathcal{D}(q) \rangle = \sum_{i,j,k} a_i(p)b_j(p) \dots c_k(p) \cdot a_i^*(q)b_j^*(q) \dots c_k^*(q)$. Il vient alors en regroupant :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}(p), \mathcal{D}(q) \rangle &= \sum_i a_i(p)a_i^*(q) \sum_j b_j(p)b_j^*(q) \dots \sum_k c_k(p)c_k^*(q) \\ &= [\mathbf{a}^H(p)\mathbf{a}(q)] [\mathbf{b}^H(p)\mathbf{b}(q)] \dots [\mathbf{c}^H(p)\mathbf{c}(q)]. \end{aligned}$$

Si seulement les vecteurs $\{\mathbf{a}(r)\}$ sont orthogonaux, on a une orthogonalité "plus faible" que si les vecteurs $\{\mathbf{b}(r)\}$ le sont aussi. Cette remarque induit une hiérarchie dans l'orthogonalité des tenseurs simples [39, 40, 41].

2.5 Trains tensoriels

La décomposition CP permet d'écrire un tenseur d'ordre D et de rang R comme combinaison de D matrices ayant R colonnes. Le but des trains tensoriels (tensor trains) est d'écrire un tenseur d'ordre D comme combinaison de tenseurs d'ordre 3 (ou plus généralement d'ordre inférieur à D). On peut donc percevoir cette idée comme une forme de généralisation de la CPD ou de la MLSVD [42, 43, 44]. Dans ce type de décomposition, on n'impose ni l'orthogonalité des matrices $\mathbf{G}(d)$, ni la diagonalité des tenseurs cœurs $\mathcal{G}(d)$. De plus la décomposition n'est pas unique en l'absence de contraintes supplémentaires. Mais elle offre des possibilités intéressantes de compression.

Exemple 19. Prenons un tenseur $\mathcal{T}$ d'ordre 5. Son train tensoriel d'ordre 3 s'écrit :

$$\mathcal{T}_{ijklm} = \sum_{p=1}^{R_1} \sum_{q=1}^{R_2} \sum_{r=1}^{R_3} \sum_{s=1}^{R_4} G_{ip}(1) \mathcal{G}_{pq}(2) \mathcal{G}_{qkr}(3) \mathcal{G}_{r\ell s}(4) G_{sm}(5)$$

Plus généralement pour un tenseur d'ordre D , ce type de train tensoriel fait intervenir 2 matrices, $\mathbf{G}(1)$ et $\mathbf{G}(D)$, et $D - 2$ tenseurs d'ordre 3, $\mathcal{G}(d)$, $2 \leq d \leq D - 1$. Les dimensions de ces tenseurs $\mathcal{G}(d)$ définissent les $D - 1$ "TT-rangs" (Tensor Train ranks), R_n , $1 \leq n \leq D - 1$.

3 Décompositions tensorielles approchées

Dans les problèmes de la vie réelle, les mesures sont bruitées. Supposer que le bruit est purement additif convient la plupart du temps, de sorte qu'on peut admettre que le tenseur des données mesurées s'écrit $\mathcal{T} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$, où $\mathcal{U}$ est la partie utile, et $\mathcal{W}$ le bruit. Le bruit peut être modélisé par une variable aléatoire de distribution absolument continue. A ce titre, son rang est générique, et donc plus grand que ses dimensions [30, 45]. La partie utile est en revanche souvent de rang plus faible (sous-générique). Effectuer une approximation de rang faible de $\mathcal{T}$ permet donc théoriquement non seulement d'éliminer une partie du bruit, mais aussi de satisfaire la condition d'unicité (14).

3.1 Diagonalisation orthogonale approximative

Historiquement, l'approximation tensorielle de rang faible a d'abord été proposée pour les tenseurs symétriques formés de cumulants [46, 11]. Un prétraitement en utilisant les moments d'ordre 2 permettait de se ramener à une diagonalisation approximative orthogonale du tenseur des cumulants (cf. sections 4.1.2 et 4.1.3 pour les aspects applicatifs). Le problème mathématique se réduisait à minimiser la fonction objectif suivante :

$$\Upsilon_1(\mathbf{Q}) = \left\| \mathcal{S} - \llbracket \mathbf{Q}, \mathbf{Q}, \dots, \mathbf{Q}; \mathcal{L} \rrbracket \right\|^2 \quad (24)$$

En fixant le nombre de colonnes de la matrice $\mathbf{Q}$ (et donc les dimensions du cœur diagonal $\mathcal{L}$), on impose le rang $R_\perp$ de l'approximation du tenseur symétrique $\mathcal{S}$. Ce problème est bien posé car le groupe orthogonal est compact (i.e. fermé borné).

Nous savons que toute matrice symétrique (resp. hermitienne) est diagonalisable par transformation orthogonale (resp. unitaire). Mais dans le cas tensoriel, cette diagonalisation est presque toujours une approximation [47, 46].

En calquant l'approche décrite dans [47], on peut poser ce problème pour des tenseurs non symétriques, ce qui conduit à minimiser [48] :

$$\Upsilon_2(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_D) = \left\| \mathcal{T} - \llbracket \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_D; \mathcal{L} \rrbracket \right\|^2 \quad (25)$$

Pour terminer, on notera qu'imposer à la fois l'orthogonalité des $\mathbf{Q}_d$ et la diagonalité de $\mathcal{L}$ restreint considérablement la polyvalence de la décomposition, qui n'est finalement utilisable qu'après un pré-traitement spécifique des données.

3.2 Approximation de faible rang multilinéaire

MLSVD exacte

Supposons d'abord que l'on choisisse un rang multilinéaire $(R_1, R_2, \dots, R_D)$ suffisant pour que la MLSVD définie en D14 soit exacte. Comment peut-on alors calculer les matrices $\mathbf{Q}_d$ et le tenseur cœur $\mathcal{G}$? On peut montrer que $\mathbf{Q}_d$ n'est autre que la matrice des vecteurs singuliers à gauche de la d ème matrice dépliant (définie en annexe, section 5.1) :

$$\mathbf{T}_{(d)} = \mathbf{Q}_d \mathbf{\Sigma}(d) \mathbf{V}^H(d).$$

Une fois toutes les matrices $\mathbf{Q}_d$ obtenues, le tenseur cœur s'obtient par transformation multilinéaire :

$$\mathcal{G} = \llbracket \mathbf{Q}_1^H, \mathbf{Q}_2^H, \dots, \mathbf{Q}_D^H; \mathcal{T} \rrbracket \iff \mathcal{T} = \llbracket \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_D; \mathcal{G} \rrbracket.$$

Enfin, les colonnes des matrices $\mathbf{Q}_d$ sont permutées ainsi que les éléments du cœur, sans que cela ne change le tenseur $\mathcal{T}$, de manière à ce que les tranches d'ordre $D - 1$ de $\mathcal{G}'$ soient ordonnées par norme décroissante. En notant $\mathbf{P}_d$ les permutations, ceci s'écrit formellement :

$$\mathcal{T} = \llbracket \mathbf{Q}_1 \mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_2 \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{Q}_D \mathbf{P}_D; \mathcal{G}' \rrbracket, \quad \mathcal{G}' = \llbracket \mathbf{P}_1^T, \mathbf{P}_2^T, \dots, \mathbf{P}_D^T; \mathcal{G} \rrbracket,$$

Nous renvoyons à [34] pour les détails algorithmiques. Notons que l'ordre imposé aux colonnes des matrices $\mathbf{Q}_d$ résulte d'une convention arbitraire, la plupart du temps sans aucun lien avec le problème physique. De ce point de vue, c'est la même chose que la SVD matricielle où on convient de classer les valeurs singulières par ordre décroissant.

MLSVD approximative

Supposons maintenant qu'on choisisse un rang multilinéaire $(R_1, R_2, \dots, R_D)$ trop petit pour que la MLSVD soit exacte. L'idée est alors de minimiser l'erreur :

$$\Upsilon_3(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_D) = \left\| \mathcal{T} - \llbracket \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_D; \mathcal{G} \rrbracket \right\|^2 \quad (26)$$

La solution ne peut pas être obtenue directement, mais seulement à l'aide d'un algorithme d'optimisation itératif. Toutefois, une solution approchée peut être calculée à l'aide de la MLSVD exacte précédente, et peut avantageusement servir d'initialisation. Cette dernière est obtenue comme suit, après avoir appliqué les permutations $\mathbf{P}_d$. Pour chaque mode d , on retient les R_d premières colonnes des matrices $\mathbf{Q}'_d = \mathbf{Q}_d \mathbf{P}_d$. Il s'agit donc d'une simple troncature. Une approximation du tenseur cœur correspondant peut s'en déduire par transformée multilinéaire de $\mathcal{T}$ comme précédemment. Cette procédure d'initialisation rappelle la meilleure approximation matricielle de rang faible, que l'on obtient par troncature de la SVD. La différence ici est que la troncature de la MLSVD ne fournit pas la meilleure approximation de rang faible, mais seulement une valeur approchée.

3.3 Approximation de rang 1

Rang et rang multilinéaire coïncident lorsque le rang vaut 1. Chercher une approximation de rang 1 est donc un cas particulier de l'approximation de faible rang multilinéaire. Ce problème d'approximation est bien posé, et on peut le voir de deux manières.

Dans la section 3.2, le problème était bien posé car l'ensemble des matrices à colonnes orthogonales et normées (variété de Stiefel) est compact. S'il n'y a qu'une colonne, il suffit d'argumenter que les sphères unité sont compactes pour assurer l'existence de la meilleure approximation de rang 1.

La deuxième manière de le vérifier est de remarquer que les tenseurs de rang 1 forment une variété déterminantale, c'est à dire définie par un nombre fini d'équations annulant des déterminants 2×2 . Le problème est alors bien posé dans l'espace des tenseurs ; mais il faut borner les vecteurs constituant les tenseurs de rang 1 pour qu'il soit bien posé dans le système de coordonnées – à cause de l'indétermination d'échelle (1) inhérente aux tenseurs.

Comme dans la section précédente, le problème principal est de trouver une bonne initialisation pour éviter de terminer en un minimum local. Plusieurs stratégies ont été proposées à cet effet, et nous renvoyons le lecteur intéressé à la littérature [49, 50, 51, 52, 53].

3.4 Rang frontière

Dans un voisinage assez petit d'une matrice de rang R , toutes les matrices ont un rang au moins égal à R . Autrement dit, si une matrice $\mathbf{A}$ est limite d'une suite de matrices de rang R , elle ne peut être que de rang au plus R . Cette propriété caractérise la semi-continuité inférieure du rang matriciel, que l'on définit généralement comme suit :

Définition D20 : semi-continuité inférieure. Une fonction f est semi-continue inférieurement si les ensembles $\mathcal{E}_R$ suivants ("sublevel sets") sont fermés :

$$\mathcal{E}_R = \{\mathbf{X} : f(\mathbf{X}) \leq R\}. \quad (27)$$

En revanche, le rang tensoriel n'est pas semi-continu inférieurement, et cela soulève de grandes difficultés pratiques comme nous allons le voir plus loin. En effet, l'ensemble $\mathcal{E}_R$ des tenseurs de rang au plus R n'est pas fermé (si $R > 1$ et si $D > 2$) [54, 5, 27, 17]. Le plus simple est de le constater sur un exemple.

Exemple 20. Soient u et v deux nombres (réels ou complexes) fixés et ε un petit nombre réel positif. Alors nous avons le développement suivant, avec la notation de Landau :

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[(u + \varepsilon v)^4 - u^4 \right] = 4u^3v + O(\varepsilon). \quad (28)$$

Si la multiplication n'est pas commutative, alors les 4 termes du membre de droite peuvent être différents, et on doit écrire $u^3v + u^2vu + uvu^2 + vu^3$; c'est précisément le cas pour le produit tensoriel. Soient maintenant $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs linéairement indépendants, et adoptons la notation $\mathbf{u}^{\otimes 4}$ pour $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$. Définissons les deux tenseurs $\mathcal{T}_\varepsilon$ et $\mathcal{T}_0$:

$$\mathcal{T}_0 = \mathbf{u}^{\otimes 3} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}^{\otimes 2} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}^{\otimes 3} \quad (29)$$

$$\mathcal{T}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \left[(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v})^{\otimes 4} - \mathbf{u}^{\otimes 4} \right]. \quad (30)$$

Alors par le même raisonnement que pour obtenir (28), nous avons :

$$\mathcal{T}_\varepsilon = \mathcal{T}_0 + O(\varepsilon). \quad (31)$$

En conclusion, nous avons exhibé une suite de tenseurs $\mathcal{T}_\varepsilon$ tous de rang 2, qui converge quand ε tend vers zéro vers le tenseur $\mathcal{T}_0$, qui lui est de rang 4. L'ensemble $\mathcal{E}_2$ n'est donc pas fermé.

Si un tenseur $\mathcal{A}$ est limite d'une suite de tenseurs de rang R , alors on dira que son "rang frontière" est au plus R . Ceci nous conduit à la définition formelle du rang frontière d'un tenseur, le plus petit rang R en question :

Définition D21 : rang frontière. Le rang frontière $\overline{\text{rank}}\{\mathcal{A}\}$ d'un tenseur $\mathcal{A}$ est l'entier $\bar{R}$ le plus petit tel que $\mathcal{A}$ soit la limite d'une suite de tenseurs $\mathcal{B}_n$ de rang $\bar{R}$:

$$\overline{\text{rank}}\{\mathcal{A}\} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\bar{R}} \left\{ \text{rank}\{\mathcal{B}_n\} = \bar{R} \text{ et } \mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_n \right\}. \quad (32)$$

Evidemment, $\overline{\text{rank}}\{\mathbf{A}\} = \text{rank}\{\mathbf{A}\}$ pour les matrices. Mais pour les tenseurs d'ordre $D > 2$, on peut avoir $\overline{\text{rank}}\{\mathcal{A}\} < \text{rank}\{\mathcal{A}\}$; dans notre exemple 20, $\overline{\text{rank}}\{\mathcal{T}_0\} = 2 < \text{rank}\{\mathcal{T}_0\} = 4$.

3.5 Approximation de faible rang sous contrainte

Nous venons de voir dans la section précédente que le tenseur $\mathcal{T}_0$ n'admet pas de meilleure approximation de rang 2. Cet exemple simple montre que l'approximation de rang $R > 1$ est donc généralement un problème mal posé [54, 55]. Si on examine de plus près l'exemple 20, qui est assez typique, on peut tirer de (30) trois observations concernant les deux vecteurs composant $\mathcal{T}_\varepsilon$:

- ils deviennent de plus en plus proches angulairement quand $\varepsilon \rightarrow 0$
- leur norme tend vers l'infini (à cause de la division par ε)
- leur différence est finie et reste proche de $\mathcal{T}_0$

Ce sont ces phénomènes combinés qui autorisent ce "saut de rang".

Une contrainte supplémentaire peut conférer au problème d'approximation de rang faible le caractère bien posé. Pour cela, nous pouvons choisir une des contraintes suivantes :

- C1. imposer une borne minimale à l'écart angulaire entre les 2 vecteurs
- C2. imposer une borne maximale sur la norme des 2 vecteurs
- C3. interdire les termes négatifs

La contrainte angulaire C1 a été proposée dans [55, 56, 57], et mise en œuvre avec succès dans des problèmes de localisation avec des réseaux d'antennes (cf. section 4.2.3). La contrainte C3 a été

proposée pour les tenseurs à éléments non-négatifs dans [58, 59], et permet d'obtenir la meilleure approximation de rang non-négatif faible, ce qui est exigé notamment en chimiométrie (cf. section 4.2.1). Imposer C1 ou C3 entraînera C2. On pourrait imposer C2 au lieu de C1 ou C3, mais il faudrait que la borne choisie ait un sens physique dans l'application considérée ; or ce n'est pas le cas dans les applications que nous décrivons ci-après, qui se prêtent mieux à C1 ou C3.

4 Applications

Dans cette section, nous décrivons quelques applications des décompositions approchées définies dans la section 3. Le premier domaine applicatif que nous avons évoqué dans l'exemple 18 et la section 3.2 n'est pas spécifique aux tenseurs, puisqu'il s'agit du débruitage des données. En pratique, il est recommandé de débruiter les données tensorielles à l'aide de la MLSVD tronquée, en guise de pré-traitement. Les applications dont nous allons parler maintenant ne font pas exception, et un débruitage préalable s'impose la plupart du temps, ne serait-ce que pour restaurer l'unicité de la CPD en abaissant le rang à une valeur inférieure au rang attendu conformément à P12.

4.1 Analyse en Composantes Indépendantes

L'Analyse en Composantes Indépendantes (ICA) est une brique de base utilisée en analyse de données ou en traitement du signal, notamment dans le problème de Séparation Aveugle de sources (BSS). On suppose qu'on observe K réalisations $\mathbf{x}(k)$ de la variable aléatoire $\mathbf{x}$ de dimension N , et on cherche à identifier la matrice de mélange (déterministe) $\mathbf{A}$ de dimensions $N \times P$ dans le modèle suivant :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{w}(k). \quad (33)$$

où $\mathbf{w}(k)$ représente un bruit de mesure, et où $\mathbf{s}(k)$ sont des réalisations inconnues de variables latentes, de dimension P . Les variables $s(k)$ constituent généralement la partie utile de l'observation, mais dans certains problèmes, seulement $\mathbf{A}$ est la quantité d'intérêt. Si on range les réalisations dans une matrice $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(K)]$ de dimensions $N \times K$, alors le problème revient à factoriser :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{W}. \quad (34)$$

Ce problème est mal posé car il existe une infinité de solutions pour le couple $(\mathbf{A}, \mathbf{S})$, même en l'absence de bruit. Plusieurs hypothèses supplémentaires sur $\mathbf{s}(k)$ ont été proposées dans la littérature pour résoudre ce problème [11], et nous allons adopter la suivante dans cette section :

Définition D22. Les composantes s_p de la variable aléatoire $\mathbf{s}$ sont statistiquement indépendantes et non gaussiennes. On les baptise “sources”.

4.1.1 Identification de mélanges linéaires

• Voyons déjà comment aborder ce problème dans le cas non bruité, et supposons que toutes les quantités sont réelles pour simplifier la présentation. Pour une variable aléatoire quelconque $\mathbf{x}$ de dimension N , soit $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ sa fonction génératrice des moments, et $\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ sa fonction génératrice des cumulants, définies par

$$\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \mathbb{E}\{\exp(\mathbf{u}^T \mathbf{x})\}, \quad \psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \log \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}).$$

La définition de $\phi_{\mathbf{x}}$ implique que $\psi_{\mathbf{A}\mathbf{s}}(\mathbf{u}) = \psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{A}^T \mathbf{u})$. Mais comme les sources s_p sont indépendantes, il vient :

$$\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \sum_p \psi_{s_p}(\mathbf{a}_p^T \mathbf{u}), \quad (35)$$

où $\mathbf{a}_p$ désigne la p ème colonne de $\mathbf{A}$. Si on est capable d'estimer la fonction $\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$, alors on peut trouver la meilleure matrice $\mathbf{A}$ qui colle au modèle, même si $P > N$.

Comme estimer ψ est généralement difficile, une approche simplifiée [60, 11] consiste à prendre les dérivées d'ordre D à l'origine de l'équation (35). Comme nous l'avons vu dans l'exemple 9, ceci conduit à une relation entre cumulants d'ordre D , que nous illustrons à l'ordre $D = 3$ ci dessous :

$$\frac{\partial^3 \psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} = \sum_{p=1}^P A_{ip} A_{jp} A_{kp} \psi_{s_p}^{(3)} \left(\sum_q A_{qp} u_q \right). \quad (36)$$

où $\psi_{s_p}^{(3)}$ désigne la dérivée troisième de la fonction $\psi_{s_p}(u_p)$. Il est alors clair que cette équation (36) ressemble à la CPD d'un tenseur symétrique de la forme :

$$\mathcal{T}_{ijk} = \sum_{p=1}^P A_{ip} A_{jp} A_{kp} \lambda(p)$$

si on ignore la dépendance qui peut exister entre $\lambda(p)$ et $\mathbf{A}$. Le membre de gauche n'est autre que le tenseur cumulant d'ordre 3 de $\mathbf{x}$, que nous avons présenté dans l'exemple 9 et la propriété P4. Dès lors, sous les conditions d'unicité P11 de la CPD, la matrice $\mathbf{A}$ est identifiable, pourvu que les dits cumulants ne soient pas nuls. On montre [6, 11] qu'il est suffisant que au plus une source s_p soit gaussienne.

En revanche, estimer les réalisations de $\mathbf{s}$ n'est pas aisé, sauf dans certains cas, dont les suivants : (i) la matrice $\mathbf{A}$ admet une inverse à gauche (ce qui suppose que $N \geq P$), ou (ii) la distribution des sources s_p est discrète. Ce sont deux cas maintenant largement étudiés dans la littérature [11].

Notons que si nous avons pris les dérivées de (35) ailleurs qu'à l'origine, nous aurions obtenu un autre système d'équations, qui peut offrir certains avantages [61, 62, 63].

- En présence de bruit gaussien, les techniques utilisant uniquement les cumulants d'ordre supérieur à deux sont efficaces, car elles sont insensibles au bruit gaussien additif, du moins asymptotiquement quand la durée d'observation augmente; rappelons en effet que les cumulants d'une somme de variables aléatoires indépendantes sont la somme des cumulants, et que les cumulants des variables gaussiennes sont nuls aux ordres supérieurs à deux.

- Comme nous venons de le mentionner, la distribution gaussienne joue un rôle particulier dans le problème d'ICA : si plus de deux sources sont gaussiennes, alors on ne pourra pas identifier leur mélange. Si le bruit est non gaussien de distribution inconnue, il sera de plus impossible de distinguer les sources utiles du bruit. On ne pourra se baser que sur une information supplémentaire, par exemple le fait que les sources sont plus fortes que le bruit. Sinon, les composantes du bruit seront considérées comme des sources à part entière.

Nous allons donc voir maintenant comment procéder dans cette situation, où un bruit additif non gaussien est présent, lorsque le nombre de sources, P , n'excède pas la dimension de l'observation, N .

4.1.2 Maximisation d'un contraste quand $P \leq N$

Quand $P \leq N$, la matrice de mélange $\mathbf{A}$ admet une inverse à gauche, $\mathbf{B}$. Le but est alors de trouver la matrice $\mathbf{B}$ de façon à maximiser une certaine fonctionnelle Υ que nous appellerons "contraste", dépendant des propriétés de la variable $\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{x}$, dont on veut qu'elle ait des composantes les plus indépendantes possible. Cette fonctionnelle Υ doit satisfaire les propriétés naturelles suivantes :

1. *Definition.* Υ doit ne dépendre que de la distribution de probabilité $p_{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{x}$, et de la transformation $\mathbf{B}$. On peut donc la noter $\Upsilon(p_{\mathbf{x}}; \mathbf{B})$, ou plus simplement $\Upsilon(\mathbf{x}; \mathbf{B})$.

2. *Invariance.* Υ doit être invariant aux *transformations triviales* qui n'affectent pas l'indépendance statistique, c'est à dire aux permutations $\mathbf{P}$ et aux matrices diagonales inversibles $\mathbf{A}$. Autrement dit, $\Upsilon(\mathbf{x}; \mathbf{A}\mathbf{P}) = \Upsilon(\mathbf{x}; \mathbf{I})$.
3. *Domination.* Si les composantes s_p de $\mathbf{s}$ sont statistiquement indépendantes, alors l'application d'une transformation linéaire doit faire décroître le contraste :

$$s_p \text{ indépendantes} \Rightarrow \Upsilon(\mathbf{s}; \mathbf{G}) \leq \Upsilon(\mathbf{s}; \mathbf{I}), \forall \mathbf{G}$$

4. *Discrimination.* Si les composantes s_p de $\mathbf{s}$ sont statistiquement indépendantes, et si une transformation n'affecte pas Υ , alors cette transformation doit être triviale. En d'autres termes :

$$s_p \text{ indépendantes et } \Upsilon(\mathbf{s}; \mathbf{G}) = \Upsilon(\mathbf{s}; \mathbf{I}) \Rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{P}.$$

Cette définition axiomatique [46] permet de vérifier si un critère d'optimisation est recevable ou non. Penchons-nous maintenant sur quelques critères recevables. Tout d'abord l'information mutuelle :

$$I(p_z) = \int p_z(\mathbf{u}) \log \frac{p_z(\mathbf{u})}{\prod_{p=1}^P p_{z_p}(u_p)} d\mathbf{u} \quad (37)$$

est une mesure d'indépendance des composantes z_p d'une variable aléatoire à P dimensions, $\mathbf{z}$. C'est la divergence de Kullback entre la distribution conjointe et le produit des distributions marginales. On peut montrer [46, 6] :

D23. L'opposé de l'information mutuelle (37), $\Upsilon_\infty(\mathbf{x}; \mathbf{B}) = -I(p_z)$, est un contraste.

Un tel contraste est optimal, mais n'est pas très facile à mettre en œuvre s'il faut calculer une intégrale multiple. Il est alors utile de le décomposer en plusieurs parties, et ensuite d'approximer chacune d'entre elles. C'est cette approximation qui fera apparaître les tenseurs cumulants. La néguentropie mesure l'écart au caractère gaussien. C'est la divergence de Kullback entre la distribution jointe p_z et la distribution gaussienne la plus proche, g_z , c.à.d. de même moyenne (que l'on suppose ici nulle) et de même variance :

$$J(p_z) = \int p_z(\mathbf{u}) \log \frac{p_z(\mathbf{u})}{g_z(\mathbf{u})} d\mathbf{u}. \quad (38)$$

Nota : On montre facilement que $\int p_z(u) \log g_z(u) du = \int g_z(u) \log g_z(u) du$ car p_z et g_z ont même moyenne et variance.

Avec cette définition, on montre que $I(p_z) = I(g_z) + J(p_z) - \sum_n J(p_{z_n})$. Cette décomposition est représentée sur la figure 1.

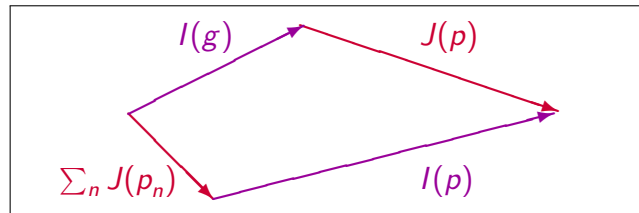


Figure 1 – Décomposition de l'Information Mutuelle

La néguentropie et l'information mutuelle jouissent des invariances suivantes :

Propriété P24. L'information mutuelle est invariante par changement d'échelle : $I(p_{\mathbf{A}\mathbf{z}}) = I(p_z)$. La néguentropie est invariante par changement de variable inversible :

$$J(p_{\mathbf{B}\mathbf{z}}) = J(p_z), \text{ si } \mathbf{B} \text{ inversible.}$$

Il est clair qu'alors $J(p_z)$ n'interviendra pas dans la minimisation de $I(p_z)$. Si on s'arrange pour que $I(g_z)$ soit nul, alors il ne nous restera plus qu'un terme. Nous avons donc la proposition clé suivante :

Proposition P25. Si les composantes z_n de $\mathbf{z}$ sont décorréliées à l'ordre 2, alors $I(g_z) = 0$, et maximiser le contraste $\Upsilon_\infty = -I(p_z)$ revient à maximiser $\sum_{n=1}^N J(p_{z_n})$.

Or $J(p_{z_n})$ est la néguentropie d'une variable aléatoire unidimensionnelle, et on peut la développer assez facilement en séries d'Edgeworth (ce qui est très pénible dans le cas multivarié). Si z est une variable aléatoire réelle de variance unité, on peut montrer que [46] :

$$J(p_z) \approx \frac{1}{12}\kappa_3^2(z) + \frac{1}{48}\kappa_4^2(z) + \frac{7}{48}\kappa_3^4(z) - \frac{1}{8}\kappa_3^2(z)\kappa_4(z), \quad (39)$$

où $\kappa_r(z)$ désignent les cumulants d'ordre r de la variable scalaire z . On peut donc se demander si l'un ou plusieurs de ces termes ne pourraient pas constituer un contraste. La réponse est affirmative, et on peut en effet obtenir plusieurs critères d'optimisation légitimes grâce à cette propriété, dont entre autres [46, 64, 6] :

Proposition P26. Les critères $\Upsilon_r(\mathbf{z}; \mathbf{B}) = \sum_{p=1}^P |\kappa_r(z_p)|^2$ sont des contrastes pour $r > 2$ lorsque les composantes de $\mathbf{z}$ sont décorréliées, dès lors qu'au plus une source a un cumulant d'ordre r nul.

Cette propriété va maintenant permettre de résoudre le problème de la séparation aveugle de sources à l'aide de la décomposition tensorielle approchée décrite dans la section 3.1, dès lors qu'au plus une source est gaussienne.

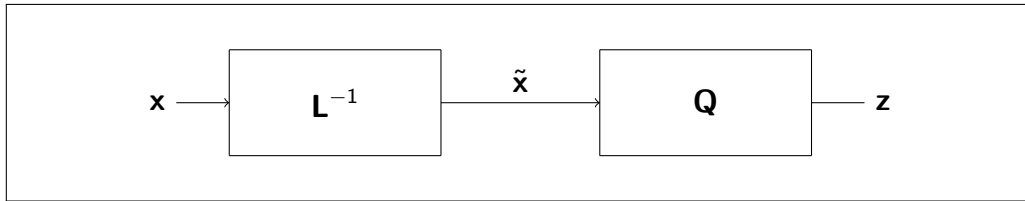


Figure 2 – Séparation aveugle de sources indépendantes en deux étapes.

4.1.3 Séparation aveugle de sources indépendantes

Nous venons de survoler les bases théoriques ayant conduit au concept d'ICA. Nous allons maintenant présenter quelques applications à la séparation de sources. Pour obtenir une estimation de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{S}$ dans le modèle (34) lorsque seule $\mathbf{X}$ est observée, on peut procéder en deux étapes :

1. Décorrélérer les observations en appliquant une première transformation $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{X}$, telle que $\mathbf{L}\mathbf{L}^H = \mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} \approx \frac{1}{K}\mathbf{X}\mathbf{X}^H$. Les composantes de $\tilde{\mathbf{X}}$ sont alors "standardisées", c'est à dire décorréliées et de variance unité.
2. Maximiser le contraste $\Upsilon_r(\tilde{\mathbf{x}}; \mathbf{Q})$ défini en P26 par rapport à la matrice $\mathbf{Q}$, que l'on doit supposer orthogonale ($\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H = \mathbf{I}$) pour ne pas détruire la standardisation réalisée dans la première étape.

Nota : En l'absence de bruit, l'observation standardisée $\tilde{\mathbf{x}}$ et le vecteur source $\mathbf{s}$ sont donc reliées par une matrice $\mathbf{Q}$ unitaire.

Cet algorithme a été appliqué avec succès dans bon nombre de contextes [11], dont les télécommunications [B1, B2, 64]. L'inconvénient de la première étape telle qu'elle est décrite ci-dessus est qu'elle biaise un peu l'estimation, car la matrice $\mathbf{L}$ est calculée à partir du signal bruité $\mathbf{x}$ et pas à partir du signal seul $\mathbf{s}$. De nombreux autres algorithmes ont été développés ; nous mentionnerons en particulier ceux qui évitent la première étape et se contentent de décomposer le tenseur cumulant de $\mathbf{x}$ à l'ordre quatre [65] ou six [66]. Par exemple le logiciel BIMA [L1] dédié à l'imagerie cérébrale propose trois algorithmes, dont un qui décompose le tenseur cumulant d'ordre 4 à l'aide de la CPD sans décorréler les observations.

4.1.4 Fouille documentaire

Le but est de savoir quels sujets h_r , $1 \leq r \leq R$, sont abordés dans un texte contenant L mots $\mathbf{x}_\ell$, $1 \leq \ell \leq L$. Tous les mots appartiennent à un dictionnaire de cardinal N .

L'idée de départ est de représenter la loi conjointe de L variables aléatoires x_ℓ à valeurs discrètes par un modèle simplifié. Dans ce modèle "bayésien naïf", les variables x_ℓ sont supposées statistiquement indépendantes conditionnellement à une variable latente inconnue, h , elle aussi de distribution discrète, $h \in \{h_1, h_2, \dots, h_R\}$. En d'autres termes, la distribution conjointe de $\mathbf{x}$ s'écrit [58, 67, 68] :

$$\text{prob}(x_1 = v_1, \dots, x_L = v_L) = \sum_{r=1}^R \varphi(r) \prod_{\ell} \text{prob}(x_\ell = v_\ell | h = h_r) \quad (40)$$

où $\varphi(r)$ désigne la probabilité $p(h = h_r)$. Cette dépendance est représentée par le modèle graphique de la figure 3, assez classique en apprentissage automatique [69].

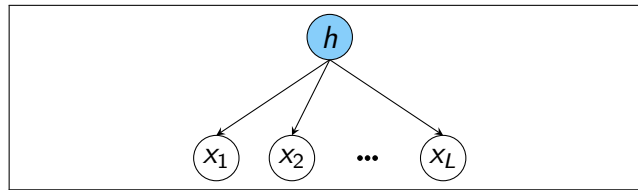


Figure 3 – Représentation graphique du modèle multi-vue ; h est la variable latente et x_ℓ sont les vues.

Si chaque variable x_ℓ prend sa valeur dans alphabet fini de cardinal N_ℓ , alors l'équation précédente peut être représentée par une équation tensorielle de la forme :

$$\mathcal{P} = \sum_{r=1}^R \varphi(r) \mathbf{a}(r) \otimes \mathbf{b}(r) \otimes \dots \otimes \mathbf{c}(r) \quad (41)$$

où $\mathcal{P}$ est d'ordre L et de dimensions $N_1 \times \dots \times N_L$ et où $\{\mathbf{a}(r), \mathbf{b}(r), \dots, \mathbf{c}(r)\}$ désignent les vecteurs contenant les probabilités conditionnelles. Nous retrouvons la décomposition CP non-négative décrite en (17), à condition que R corresponde au nombre minimal de termes nécessaires, c'est à dire au rang non-négatif de $\mathcal{P}$. En mesurant les probabilités d'apparition des L -uplets $(x_1, \dots, x_L)$, il est donc possible – si le modèle (40) est valide – de savoir combien de variables cachées pilotent la génération des x_ℓ , et quelle est leur probabilité. Mais pour ce faire, il faut alors un grand nombre de réalisations !

Dans le problème de la fouille de texte, x_ℓ sont des mots (views) et h_r sont les sujets abordés (topics). Tous les mots $\mathbf{x}_\ell$ appartiennent au même dictionnaire, qui est encodé de manière à ce que ses éléments $\mathbf{u}_n$ désignent les vecteurs de la base canonique en dimension N , i.e. les colonnes de la matrice identité de taille N (plutôt que les nombres de 1 à N). Autrement dit, x_ℓ prend la valeur $\mathbf{u}_{\gamma(\ell)}$, où γ est une application de $\{1, \dots, L\}$ dans $\{1, \dots, N\}$, non injective car chacun des mots $\mathbf{u}_n$ peut apparaître plusieurs fois dans le texte. Pour résoudre ce problème, on admet que les mots sont indépendants conditionnellement au sujet [70, 71], ce qui permet d'utiliser (40). Une idée proposée dans [70] est d'estimer les moments d'ordre deux et trois de $\mathbf{x}$ au lieu de sa table de probabilités. Pour ce faire on peut utiliser l'estimateur empirique suivant, qui fonctionne grâce à l'encodage choisi γ :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \mathbf{u}_{\gamma(\ell)} \otimes \mathbf{u}_{\gamma(\ell)}, \quad \mathcal{T} = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \mathbf{u}_{\gamma(\ell)} \otimes \mathbf{u}_{\gamma(\ell)} \otimes \mathbf{u}_{\gamma(\ell)}.$$

Dans [70], Anandkumar propose d'utiliser ensuite l'algorithme de séparation de sources décrit dans la section 4.1.3.

Cependant, plusieurs faiblesses se révèlent dans la mise en œuvre décrite dans [70] : (i) la dimension du tenseur est très grande, (ii) le rang du tenseur n'est pas grand, mais la réduction de dimension

par MLSVD se heurte à la contrainte de non-négativité, qui n'est pas prise en compte, (iii) l'estimation des moments n'est pas optimale compte-tenu du fait que les distributions sont discrètes. Des améliorations sont donc possibles, par exemple via [72] pour (ii) et via [73] pour (iii).

4.2 Diversités physiques

Dans certains problèmes, les quantités à séparer ne sont pas statistiquement indépendantes. Ce peut être le cas notamment de grandeurs déterministes. Par ailleurs, même si elles sont indépendantes, il peut exister d'autres approches que l'ICA pour les séparer, si nous avons à disposition des hypothèses physiques plus fortes. Nous passons en revue quelques-unes de ces hypothèses, qui permettent de construire un tenseur d'observation ; nous les qualifions de "diversités". L'intérêt de telles approches est que non seulement la matrice de mélange peut être identifiée, même quand $P > N$, mais les signaux source sont aussi estimés conjointement.

4.2.1 Spectrométrie fluorescente

L'imagerie fluorescente permet de détecter et de classifier des composants organiques fluorescents dans une solution, même s'ils sont fortement dilués. La fluorescence est la capacité d'une molécule, lorsqu'elle est excitée par de la lumière, à émettre à son tour de la lumière à un niveau d'énergie inférieur (c.à.d. à une longueur d'onde plus grande). Il se trouve que la plupart des hydrocarbures aromatiques polycycliques (anthracène, naphthalène, phenanthrène, pyrène...) sont des molécules très toxiques même à des concentrations très faibles, et sont fluorescentes. Ceci rend cette technique particulièrement attrayante (par exemple pour la surveillance de l'eau potable ou l'analyse des urines), de sorte que la CPD est un instrument privilégié pour la Spectrométrie fluorescente [74].

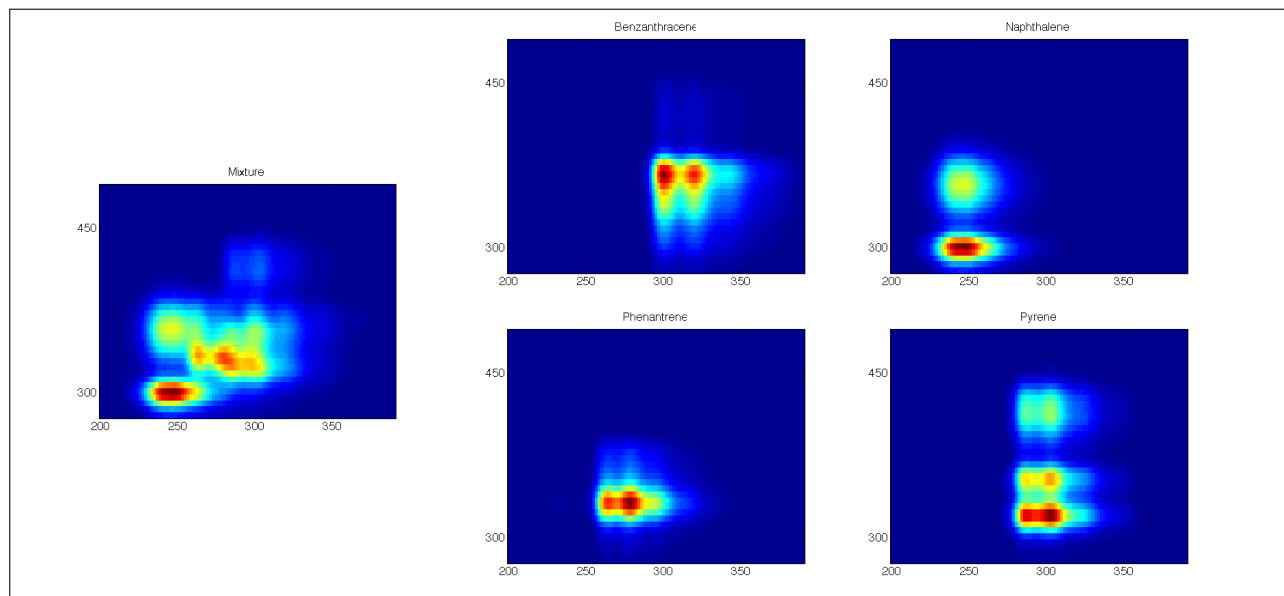


Figure 4 – A gauche : 1 mesure parmi les K . A droite : les $R = 4$ composés séparés, et identifiés. En abscisses : longueur d'onde d'excitation λ_e (nm), en ordonnées : longueur d'onde d'émission fluorescente, λ_f (nm).

En pratique, le spectromètre balaye I fréquences d'excitation, et enregistre l'intensité de la lumière reçue en J fréquences distinctes. Ces mesures délivrent une matrice de taille $I \times J$ à éléments non-négatifs. Après avoir éliminé les effets de diffusion (Rayleigh et Raman) par des techniques de traitement d'image [75], il est possible de reconnaître un composé fluorescent à partir de sa "signature" dans le plan (λ_e, λ_f) des longueurs d'onde d'excitation et d'émission fluorescente [76].

La difficulté est que plusieurs molécules fluorescentes peuvent être présentes simultanément et dans des proportions inconnues, ce qui rend leur identification bien plus difficile. La technique proposée [74] consiste à effectuer $K > 1$ mesures avec des concentrations relatives différentes (mais inconnues). On a alors un tableau de dimension $I \times J \times K$ à valeurs non-négatives.

La relation clé est la loi de Beer-Lambert, qui permet de modéliser l'intensité par une somme de fonctions à variables $(\lambda_e, \lambda_f, k)$ séparées lorsque les concentrations sont faibles :

$$\mathcal{I}(\lambda_e, \lambda_f, k) = \mathcal{I}_0 \sum_{r=1}^R a_r(\lambda_f) b_r(\lambda_e) c_r(k) \quad (42)$$

où $a_r(\lambda_f)$ et $b_r(\lambda_e)$ désignent respectivement les spectres d'excitation et d'émission fluorescente, et $c_r(k)$ la concentration du r ième soluté fluorescent lors de la k ième expérience.

Nota : Si les concentrations augmentent, un effet d'écran apparaît et la loi n'est plus multilinéaire [77].

Au premier coup d'œil, on reconnaît dans (42) la décomposition CP du tenseur $\mathcal{I}$, dont le rang non-négatif désigne par conséquent le nombre de solutés fluorescents en présence. On peut donc isoler chacune des R contributions simples, et analyser leur signature. La figure 4 montre un exemple typique où $R = 4$ solutés sont séparés à partir de $K = 10$ mesures. Dans cet exemple, $(I, J) = (110, 40)$. La condition (13) d'unicité de la CPD serait vérifiée même avec $K = 3$ mesures seulement, car alors $2R + D - 1 = 10$ et $\text{krank}\{A\} + \text{krank}\{B\} + \text{krank}\{C\} = \min(I, 4) + \min(J, 4) + \min(K, 4) = 4 + 4 + 3 = 11$.

Remarque. Il est important de rappeler que les mesures effectuées pour des indices k différents ne doivent pas être proportionnelles, sans quoi il n'y a pas apport de diversité. Par exemple, les échantillons d'eau ou d'urine peuvent être prélevés chaque jour pendant K jours ; de cette manière il y a très peu de chances pour que les concentrations relatives soient strictement identiques d'un jour à l'autre. Par ailleurs, il faut garder à l'esprit que pour être sûr d'obtenir des spectres non-négatifs, il est nécessaire de calculer la CPD sous contrainte non-négative [78]. Ceci est vrai aussi pour la compression préalable [72].

4.2.2 Imagerie planétaire

Nous venons de voir dans la section 4.2.1 comment une diversité physique, que nous pouvons baptiser “diversité de concentration”, pouvait rétablir l'identifiabilité des spectres latents. Cette diversité était fournie par des mesures expérimentales complémentaires. Nous allons voir maintenant un autre exemple, que nous pouvons qualifier de “diversité temporelle”.

L'imagerie hyperspectrale consiste à mesurer la radiance reçue par des capteurs embarqués en un grand nombre de bandes de fréquence et dans un grand nombre de directions proches. Cette radiance peut être associée à la réflectance des matériaux en différents points de la surface du sol, et il est alors possible de caractériser les matériaux en présence. Comme dans les sections précédentes, la difficulté survient lorsque plusieurs matériaux élémentaires (endmembers) sont simultanément présents. Dans ce cas, on peut faire appel à des techniques à base de dictionnaire de matériaux, ou bien à des techniques dites “aveugles”, capables de séparer les contributions des matériaux sans les connaître. C'est à cette deuxième catégorie de méthodes que nous nous intéressons.

Pour ce faire, la donnée d'une seule matrice $I \times J$ de valeurs de radiance ne suffit pas pour obtenir de manière unique les contributions des matériaux. Par contre, une série d'acquisitions, faite par exemple sur un mode journalier pendant plusieurs jours, le permet, pourvu que les acquisitions ne soient pas proportionnelles (il faut que les proportions des matériaux élémentaires changent au cours du temps, de même que les concentrations le devaient dans la section précédente).

Une illustration peut être trouvée dans [79], avec la campagne de mesure MODIS effectuée pendant l'hiver 2012 dans les Alpes. Les mesures s'étalent sur $K = 44$ jours, et chaque image hyperspectrale est de dimension 80×60 , et sept bandes spectrales sont retenues. Autrement dit, nous avons

$I = 4800$ pixels et $J = 7$ fréquences. Pour que l'algorithme de CPD soit efficace, il a été nécessaire de réduire les dimensions en adoptant une technique de compression non-négative [72]. Le tenseur cœur obtenu était de dimensions $175 \times 7 \times 25$, et c'est lui qui a été décomposé en somme de $R = 8$ tenseurs simples, mais sous la contrainte que le tenseur reconstitué dans l'espace d'origine soit non-négatif. Il est important de souligner que si nous avions gardé les images sous la forme de tableaux à 2 dimensions, alors le rang du tenseur de taille $80 \times 60 \times 7 \times 44$ n'aurait pas pu être réduit autant ; les images ne sont en effet que très rarement des matrices de rang faible. Il était plus cohérent de ranger les données dans un tableau à trois dimensions : espace (pixels) $\times$ fréquence $\times$ temps.

Remarque. Lorsque les données sont acquises à partir d'une sonde tournant autour d'une planète et que plusieurs acquisitions se font dans la même journée, alors la diversité temporelle se traduit aussi par un changement d'angle de vue [80]. On notera qu'il existe d'autres types de diversité pouvant être utilisées pour la télédétection [81].

4.2.3 Traitement d'antenne

Le troisième et dernier type de diversité que nous allons présenter peut être appelé "diversité de translation spatiale". Il a été proposé à l'origine dans [82]. Le problème consiste à séparer et localiser R sources rayonnantes en champ lointain à partir d'un réseau de capteurs, formé de K antennes de I capteurs chacune. On suppose que l'on dispose de L échantillons temporels de signaux reçus. Bien qu'il existe des versions en bande large, [83], nous restreignons la présentation au cas de signaux en bande étroite, et représentés en bande de base par un processus à temps discret complexe.

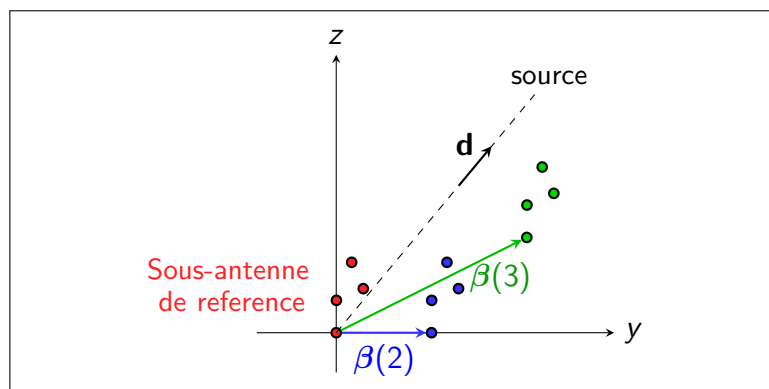


Figure 5 – Antenne formée de $K = 3$ sous-antennes de $I = 4$ capteurs chacune. Les invariances par translation sont définies par les vecteurs $\beta(k)$, $2 \leq k \leq K$. La première sous-antenne sert de référence, de sorte que $\beta(1) = \mathbf{0}$ par définition.

On convient de ranger les mesures dans un tableau $\mathcal{T}$ de dimensions $I \times K \times L$. Si l'antenne reçoit un signal à bande étroite autour d'une pulsation ω , dont l'enveloppe complexe est notée $s(\ell)$, et se propageant à travers un milieu isotrope et non amorti, alors ce signal ne subit qu'un retard pur τ qui peut s'écrire simplement

$$s(\ell + \tau) = s(\ell) \exp[-j\omega\tau], \quad j = \sqrt{-1}. \quad (43)$$

Notons $\alpha(i)$ le vecteur définissant la position du i ème capteur de la première antenne, qui va nous servir de référence. La diversité de translation en espace existe si nous avons $K - 1$ antennes supplémentaires, $K \geq 2$, se déduisant de la première par une translation. Soit $\beta(k)$ le vecteur définissant cette translation, $1 < k \leq K$; par convention $\beta(1) = \mathbf{0}$ pour l'antenne de référence. Sur la figure 5, deux antennes supplémentaires sont représentées. Dans ces conditions, le retard pur subi par un signal source en provenance de la direction $\mathbf{d}$ et reçu sur le capteur i de la sous-antenne k

est donné par :

$$\tau(i, k) = -\frac{1}{C} [\alpha(i) + \beta(k)]^T \mathbf{d} \quad (44)$$

où C désigne la célérité des ondes et $\mathbf{d}$ est de norme unité. On notera que si le produit scalaire dans (44) est positif, alors nous avons une avance de phase et non un retard (c.à.d. τ est négatif). Ceci se comprend aussi au vu de la figure 5, le vecteur $\mathbf{d}$ pointant en direction de la source rayonnante et non en sens inverse. En combinant (43) et (44), il apparaît que les variables i et k se séparent dans l'expression de l'enveloppe complexe du signal $s(\ell + \tau(i, k))$ reçu sur le capteur i de la sous-antenne k :

$$s(\ell + \tau(i, k)) = s(\ell) \cdot \exp \left[j \frac{\omega}{C} \alpha(i)^T \mathbf{d} \right] \cdot \exp \left[j \frac{\omega}{C} \beta(k)^T \mathbf{d} \right].$$

Maintenant en présence de R signaux source, $s_r(\ell)$, $1 \leq r \leq R$, $1 \leq \ell \leq L$, chacun en provenance d'une direction $\mathbf{d}(r)$, ces ondes se superposent et les composantes de $\mathcal{T}$ peuvent donc être modélisées par :

$$\mathcal{T}_{ik\ell} = \sum_{r=1}^R A_{ir} B_{kr} s_r(\ell), \quad \text{avec} \quad (45)$$

$$A_{ir} = \exp \left[j \frac{\omega}{C} \alpha(i)^T \mathbf{d}(r) \right], \quad B_{kr} = \exp \left[j \frac{\omega}{C} \beta(k)^T \mathbf{d}(r) \right]$$

Nous constatons que l'équation (45) n'est autre que la CPD de $\mathcal{T}$. Et suivant (10), nous convenons de la normaliser :

$$\mathcal{T}_{ik\ell} = \sum_{r=1}^R \lambda(r) a_i(r) b_k(r) x_\ell(r), \quad (46)$$

où les vecteurs $\mathbf{a}(r)$, $\mathbf{b}(r)$ et $\mathbf{x}(r)$ sont maintenant de norme unité, et $\lambda(r) \in \mathbb{R}^+$. Ceci veut dire d'abord que, par la seule observation des mesures, il est possible de séparer les signaux source, sans les connaître ni sans connaître la position des capteurs. En outre, cela implique ensuite que si on connaît la position des capteurs de l'antenne de référence, alors on peut localiser les sources, et estimer les vecteurs de translation $\beta(k)$. On voit ici toute la puissance de la CPD.

Néanmoins, il ne faut pas passer sous silence les grosses difficultés cachées derrière le calcul de cette CPD. En pratique il y aura du bruit de mesure et des imperfections de modèle. Il faudra donc calculer une approximation de rang R du tenseur $\mathcal{T}$. Or nous avons vu que ce problème est mal posé dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; il est donc opportun de recourir à une des contraintes précisées dans la section 3.5.

Nous choisissons la contrainte angulaire C1 car elle a un sens physique, comme nous allons l'expliquer maintenant. Il est montré dans [55] que le problème est bien posé (c.à.d. que la meilleure approximation de rang R existe) si :

$$\prod_{d=1}^D \mu(d) < \frac{1}{R-1} \quad (47)$$

où $\mu(d)$ désigne la "cohérence" du mode d . Plus précisément, nous avons avec les notations de (45)

$$\mu(1) = \max_{r < r'} |\mathbf{a}(r)^H \mathbf{a}(r')|, \quad \mu(2) = \max_{r < r'} |\mathbf{b}(r)^H \mathbf{b}(r')|, \quad \mu(3) = \max_{r < r'} |\mathbf{x}(r)^H \mathbf{x}(r')|.$$

Autrement dit, $\mu(3)$ représente le plus grand coefficient de corrélation entre sources. Quant à $\mu(1)$ et $\mu(2)$, il est montré dans [55] qu'avoir $|\mathbf{a}(r)^H \mathbf{a}(r')| = 1$ équivaut à $\mathbf{d}(r) = \mathbf{d}(r')$ sous des hypothèses faibles sur l'antenne de référence. Ce qui veut dire que $\mu(1)$ mesure l'écart angulaire minimal entre les directions d'arrivée des signaux source. Le même résultat est obtenu pour $\mu(2)$, car on montre [55] que les rôles de $\mathbf{a}(r)$ et $\mathbf{b}(r)$ peuvent en réalité être interchangés.

En conclusion, la contrainte (47) est satisfaite si une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- les sources ne sont pas trop corrélées entre elles, ou
- les directions des sources ne sont pas trop proches.

En pratique, un coefficient de corrélation élevé (e.g. 0.95) est encore admissible si les directions des sources sont bien séparées. C'est en effet le produit des cohérences $\mu(r)$ qui compte, donc une petite cohérence $\mu(1)$ peut compenser une grande cohérence $\mu(3)$.

Voyons maintenant pourquoi tout ceci a un sens physique. Les signaux source peuvent être soit des sources distinctes, donc a priori peu corrélées, mais provenant de directions qui peuvent être proches, soit être des trajets multiples issus d'une même source, auquel cas les signaux reçus seront fortement corrélés, mais proviendront alors de directions très différentes. Si par hasard nous avons deux sources très corrélées et très voisines angulairement, alors elles seraient considérées comme une source unique, ce qui est bien légitime en l'absence d'autre information.

Remarques. En pratique, il faudra choisir un nombre ν tel que $\mu(1)\mu(2)\mu(3) \leq \nu < 1/(R-1)$, pour que l'optimisation s'exécute bien sur un ensemble fermé. C'est ce qui a été mis en œuvre dans [56], où le lecteur pourra trouver des détails sur l'implantation de l'algorithme ainsi qu'une illustration des résultats.

L'approche que nous venons de décrire s'applique plus difficilement en champ proche. Mais il existe malgré tout des techniques efficaces basées sur les décompositions tensorielles. Par exemple, le logiciel BIMA dédié à l'imagerie cérébrale propose trois algorithmes, dont un qui exploite la diversité de vecteur d'onde [L1, 84].

5 Annexes

Les petites démonstrations que nous incluons dans cette section ne sont pas disponibles dans la littérature, sans doute à cause de leur caractère évident. Toutefois il semble utile de les inclure dans un article de synthèse qui se veut accessible, au moins à titre illustratif. Il convient d'introduire des notations supplémentaires pour que les démonstrations restent concises et lisibles. En revanche, ces notations ne sont pas indispensables pour comprendre le reste de l'article.

5.1 Notations supplémentaires

- Etant donné un vecteur $\mathbf{u}$ de taille K , on note $\text{Diag}\{\mathbf{u}\}$ la matrice diagonale $K \times K$ comprenant les éléments de $\mathbf{u}$ sur sa diagonale.
- A toute matrice $\mathbf{M}$ de dimension $K \times R$, on peut associer le vecteur $\mathbf{v} = \text{vec}\{\mathbf{M}\}$ de dimension KR défini en empilant les colonnes de $\mathbf{M}$ les unes en dessous des autres ; autrement dit $v_{i+(r-1)K} = M_{ir}$. Un tel opérateur peut aussi être défini pour des tableaux à plus de 2 indices. Par exemple pour un tenseur d'ordre 3 et de dimensions $I \times J \times K$, on définirait :

$$\mathbf{h} = \text{vec}\{\mathcal{T}\} \iff h_{i+(j-1)I+(k-1)IJ} = \mathcal{T}_{ijk}.$$

Exemple 21 : vectorisation d'un tenseur

Soit $\mathbf{u}$ le vecteur de dimension 8 défini par $u_p = p$, $1 \leq p \leq 8$. Alors nous avons :

$$\mathbf{u} = \text{vec}\{\mathbf{T}_{(1)}\} \iff \mathbf{u} = \text{vec}\{\mathcal{T}\} \iff \mathbf{T}_{(1)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array} \right]$$

- Le produit de Kronecker entre deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, de taille $I \times J$ et $K \times L$ respectivement, est la matrice de taille $IK \times JL$ définie par l'empilage de blocs suivant :

$$\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc} A_{11}\mathbf{B} & \dots & A_{1J}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{I1}\mathbf{B} & \dots & A_{IJ}\mathbf{B} \end{array} \right]$$

- La première *matrice dépliant* $\mathbf{T}_{(1)}$ d'un tenseur d'ordre trois, $\mathcal{T}$, de dimensions $I \times J \times K$ est la juxtaposition de tranches matricielles $\mathbf{T}(:, :, k)$, obtenues en fixant la valeur du troisième indice :

$$\mathbf{T}_{(1)} = [\mathbf{T}(:, :, 1), \dots, \mathbf{T}(:, :, K)] \quad (48)$$

Cette matrice est donc de taille $I \times JK$. On peut construire de manière similaire deux autres matrices dépliantes, $\mathbf{T}_{(2)}$ et $\mathbf{T}_{(3)}$, de dimensions $J \times IK$ et $K \times IJ$, respectivement [85, 17].

- Soit $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$ la décomposition CP d'un tenseur $\mathcal{T}$. Alors sa k ème tranche matricielle obtenue en fixant son troisième indice à la valeur k peut s'écrire

$$\mathbf{T}(:, :, k) = \mathbf{A} \text{Diag}\{\mathbf{C}(k, :)\} \mathbf{B}^T. \quad (49)$$

Il suffit de passer en notations indiciaires pour le constater – on pourra se reporter à (9).

- Soit $\mathcal{T} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$. Alors d'après (48) et (49), sa première matrice dépliant peut s'écrire

$$\mathbf{T}_{(1)} = \mathbf{A} [\text{Diag}\{\mathbf{C}(1, :)\} \mathbf{B}^T, \dots, \text{Diag}\{\mathbf{C}(K, :)\} \mathbf{B}^T]. \quad (50)$$

5.2 Démonstration de P9 et (12)

Notons $\mathbf{t}_p$ les colonnes de la première matrice dépliant (48). On peut toujours écrire $\mathbf{T}_{(1)} = \sum_{p=1}^{JK} \mathbf{t}_p \mathbf{e}_p^T$, où $\mathbf{e}_p$ désigne le p ème vecteur de la base canonique en dimension JK (i.e. il a une seule composante non nulle à l'emplacement p). La "vectorisation" de cette dernière relation conduit à :

$$\text{vec}\{\mathbf{T}_{(1)}\} = \sum_{p=1}^{JK} \mathbf{e}_p \boxtimes \mathbf{t}_p = \text{vec}\{\mathcal{T}\}.$$

Or $\mathbf{e}_p$ peut s'écrire comme produit de Kronecker de deux vecteurs $\mathbf{f}_p$ et $\mathbf{g}_p$, éléments de la base canonique en dimension J et K respectivement. Nous avons donc trouvé une décomposition triviale du tenseur $\mathcal{T}$ en une somme de JK tenseurs de rang 1 :

$$\text{vec}\{\mathcal{T}\} = \sum_{p=1}^{JK} \mathbf{f}_p \boxtimes \mathbf{g}_p \boxtimes \mathbf{t}_p \iff \mathcal{T} = \sum_{p=1}^{JK} \mathbf{f}_p \otimes \mathbf{g}_p \otimes \mathbf{t}_p,$$

ce qui prouve que son rang ne peut excéder JK . Comme on peut faire le même raisonnement pour les autres matrices dépliantes, on a aussi $R \leq KI$ et $R \leq IJ$. Nous avons prouvé P9.

Enfin, il est clair que ce qui vient d'être montré pour $D = 3$ pourrait être montré exactement de la même manière pour $D > 3$, moyennant juste des notations plus lourdes. Et ceci conduirait à (12).

5.3 Démonstration de P16 et (23)

Commençons par la preuve de la borne inférieure de P16. D'après une propriété élémentaire d'algèbre matricielle, le rang d'un produit de matrices ne peut excéder la plus petite dimension de ces matrices. Donc au vu de (50) le rang R_1 de $\mathbf{T}_{(1)}$ ne peut excéder $\min(I, R, JK)$. Ceci prouve que $R_1 \leq R$. Le raisonnement pouvant être fait pour les deux autres matrices dépliantes, on a bien finalement $\max(R_1, R_2, R_3) \leq R$.

La preuve de la borne supérieure découle quant à elle directement de la propriété P9. En effet, si on applique la propriété P9 au tenseur cœur $\mathcal{G}$, qui est de dimensions $R_1 \times R_2 \times R_3$, alors on obtient $\text{rank}\{\mathcal{G}\} \leq \min(R_1 R_2, R_2 R_3, R_3 R_1)$. Or, la transformation multilinéaire (22) ne change pas le rang tensoriel (c'est une compression sans perte). Donc le rang de $\mathcal{G}$ est le même que celui de $\mathcal{T}$. D'où la deuxième inégalité de P16.

Enfin, la démonstration pour des tenseurs d'ordre $D > 3$ est exactement la même, au prix de notations plus lourdes, et elle conduirait à (23).

Conclusion

L'utilisation des tenseurs dans le monde de l'ingénieur présente des avantages indiscutables : certains problèmes étaient restés insolubles sans leur recours. C'est notamment le cas de la séparation aveugle de sources, où la propriété clé est l'unicité de la CPD.

Que se passe-t-il quand on passe de l'ordre $D = 2$ à l'ordre $D = 3$? La SVD matricielle $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$ peut être vue à la fois vue comme une CPD où les matrices-facteur $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}^*$ ont des colonnes orthogonales, ou bien comme une MLSVD où le tenseur cœur $\mathbf{\Sigma}$ est diagonal. Quand on passe de l'ordre $D = 2$ à l'ordre $D = 3$, on ne peut pas préserver ces deux propriétés car le rang tensoriel peut dépasser les dimensions. Et pourquoi le peut-il ? Simplement parce que le nombre de paramètres libres augmente, comme nous l'avons vu avec l'obtention de l'équation (14).

Finalement, la CPD et la MLSVD sont donc deux généralisations possibles de la SVD matricielle aux tenseurs [17]. La CPD impose un cœur diagonal mais doit relâcher les contraintes d'orthogonalité sur les matrices-facteur, alors que la MLSVD maintient cette contrainte, mais doit relâcher le caractère diagonal du cœur. Chacune a son avantage : la MLSVD n'est pas unique, mais l'approximation de rang multilinéaire faible existe, et s'obtient facilement par troncature. La CPD est souvent unique, mais l'approximation de rang tensoriel faible est généralement un problème mal posé sans contrainte supplémentaire.

On peut résumer notre présentation en listant huit différences frappantes apparaissant dès qu'on passe de l'ordre $D = 2$ (matrices) à l'ordre $D \geq 3$ (tenseurs) [86]. Certaines sont des avantages, d'autres sont des difficultés.

Huit différences fondamentales. Contrairement aux matrices, on fait les constats suivants pour les tenseurs (d'ordre $D \geq 3$) :

1. Le rang peut excéder les dimensions (cf. P9)
2. La décomposition en somme de termes de rang 1 est unique si le rang n'est pas trop élevé (cf. P11)
3. Le rang peut être différent dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ (cf. exemple 16)
4. Le rang symétrique d'un tenseur symétrique peut être plus élevé que son rang [4]
5. Le rang d'un tenseur tiré au hasard n'est pas maximal [87, 5, 45]
6. Le rang maximal n'est toujours pas connu pour toutes les valeurs possibles des dimensions
7. Retrancher la meilleure approximation de rang 1 à un tenseur ne diminue pas forcément son rang [88]
8. La meilleure approximation de rang $R > 1$ d'un tenseur n'existe pas toujours (cf. section 3.5)

Ce qu'il faut retenir, c'est que nous avons des intuitions trompeuses qui se sont construites avec l'apprentissage de l'algèbre linéaire, et qu'il convient d'être très prudent.

Glossaire

ordre d'un tenseur ; tensor order

Nombre d'espaces de dimension non nulle impliqués dans la construction de l'application multilinéaire que représente le tenseur. C'est aussi le nombre d'indices de son tableau de coordonnées ; cf. définition D2.

rang tensoriel ; tensor rank

Nombre minimal de termes dans la décomposition CP ; cf. définition D8 et proposition P7.

rang multilinéaire ; multilinear rank

D -uplet constitué par les rangs R_d des D matrices dépliantes (définies dans la section 5). Ce sont

les dimensions du tenseur cœur $\mathcal{G}$ apparaissant dans la MLSVD ; voir la définition D14.

tenseur simple ; *simple tensor*

Tenseur de rang 1, parfois aussi appelé tenseur pur ou tenseur décomposable ; cf exemples 3 et 12.

Acronymes

BSS (*Blind Source Separation*)

Séparation Aveugle de Sources (cf. section 4.1)

CPD (*Canonical Polyadic Decomposition*)

Décomposition Canonique Polyadique. La CPD révèle le rang tensoriel ; cf. proposition P7 et définition D8.

ICA (*Independent Component Analysis*)

Analyse en Composantes Indépendantes (cf. section 4.1)

MLSVD (*Multilinear Singular Value Decomposition*)

Décomposition d'un tenseur par transformations orthogonales en un tenseur cœur de taille minimale. La MLSVD révèle les rangs multilinéaires ; cf. définition D14.

SVD (*Singular Value Decomposition*)

Décomposition d'une matrice en éléments singuliers.

Notations et symboles

Symbole	Description	Observations
$\mathbf{a}$	vecteur	minuscule grasse
$\mathbf{A}$	matrice	majuscule grasse
$\mathcal{A}$	tenseur	majuscule calligraphique grasse
a_i	coordonnée d'un vecteur	minuscule
A_{ij}	coordonnée d'une matrice	majuscule
$\mathcal{A}_{ijk}$	coordonnée d'un tenseur	majuscule calligraphique
$\otimes$	produit tensoriel	section 1.1
$\boxtimes$	produit de Kronecker	section 5.1
$\bullet_k$	contraction sur le k ème indice	section 1.3.1
$\text{vec}\{\cdot\}$	vectorisation	section 5.1
$\mathbb{E}\{\mathbf{x}\}$	espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathbf{x}$	exemple 8, section 4.1
$\llbracket \cdot \rrbracket$	transformation multilinéaire, décomposition tensorielle	P5 (10), P13

Pour en savoir plus

Tenseurs

en sciences des données

par **Pierre COMON**

Directeur de Recherche

Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, Gipsa-Lab, 38000 Grenoble

Sources bibliographiques

- [1] W. HACKBUSCH. *Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus*. Series in Computational Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer, 2012. ISBN : 978-3-642-28026-9.
- [2] J. R. RUIZ-TOLOSA et E. CASTILLO. *From Vectors to Tensors*. Universitext. Berlin, Heidelberg : Springer, 2005.
- [3] J. M. LANDSBERG. *Tensors : Geometry and Applications*. T. 128. Graduate Studies in Mathematics. AMS publ., 2012, p. 439.
- [4] Y. SHITOV. “A counterexample to Comon’s conjecture”. In : *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry* 2.3 (2018), p. 428–443.
- [5] P. COMON et al. “Symmetric Tensors and Symmetric Tensor Rank”. In : *SIAM Journal on Matrix Analysis Appl.* 30.3 (sept. 2008). hal-00327599, p. 1254–1279.
- [6] P. COMON et C. JUTTEN. *Factorization of Multidimensional Observations*. Notes de cours, Master2 SIGMA. Licence creativecommons.com. Univ. Grenoble Alpes, nov. 2015.
- [7] P. BÜRGISSE, M. CLAUSEN et M. A. SHOKROLLAHI. *Algebraic Complexity Theory*. T. 315. Berlin Heidelberg : Springer, 1997. ISBN : 978-3-540-60582-9.
- [8] B. SPAIN. *Tensor Calculus*. Mineola, NY : Dover, 2003.
- [9] R. ARIS. *Vectors, Tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Mineola, NY : Dover, 1989.
- [10] P. MCCULLAGH. *Tensor Methods in Statistics*. Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman et Hall, 1987.
- [11] P. COMON et C. JUTTEN, éd. *Handbook of Blind Source Separation, Independent Component Analysis and Applications*. ISBN : 978-0-12-374726-6. hal-00460653. Oxford UK, Burlington USA : Academic Press, 2010.
- [12] L. P. EISENHART. *An introduction to differential geometry with the use of tensor calculus*. London : Princeton Univ. Press, 1940.
- [13] D. F. LAW DEN. *Relativity and Cosmology*. Mineola, NY : Dover, 2002.
- [14] F. L. HITCHCOCK. “The Expression of a Tensor or a Polyadic as a Sum of Products”. In : *J. Math. and Phys.* 6.1 (1927), p. 165–189.
- [15] R. A. HARSHMAN. “Foundations of the Parafac procedure : Models and conditions for an explanatory multimodal factor analysis”. In : *UCLA Working Papers in Phonetics* 16 (1970), p. 1–84.

- [16] J. D. CARROLL et J. J. CHANG. "Analysis of Individual Differences in Multidimensional Scaling via N-Way Generalization of Eckart-Young Decomposition". In : *Psychometrika* 35.3 (sept. 1970), p. 283–319.
- [17] P. COMON. "Tensors : a brief introduction". In : *IEEE Sig. Proc. Magazine* 31.3 (mai 2014). hal-00923279, p. 44–53.
- [18] H. A. L. KIERS. "Towards a standardized notation and terminology in multiway analysis". In : *J. Chemometrics* 14 (2000), p. 105–122.
- [19] M. D. ATKINSON et S. LLOYD. "Bounds on the Ranks of Some 3-Tensors". In : *Linear Algebra Appl.* 31 (1980), p. 19–31.
- [20] J. B. KRUSKAL. "Rank, Decomposition, and Uniqueness for 3-Way and N-Way Arrays". In : *Multiway Data Analysis*. Sous la dir. de R. COPPI et S. BOLASCO. Elsevier Science, North-Holland, 1989, p. 7–18.
- [21] J. B. KRUSKAL. "Three-Way Arrays : Rank and Uniqueness of Trilinear Decompositions". In : *Linear Algebra and Applications* 18 (1977), p. 95–138.
- [22] N. D. SIDIROPOULOS et R. BRO. "On the Uniqueness of Multilinear Decomposition of N-way Arrays". In : *Jour. Chemo.* 14 (2000), p. 229–239.
- [23] A. STEGEMAN et N. SIDIROPOULOS. "On Kruskal's uniqueness condition for the CP decomposition". In : *Lin. Alg. Appl.* 420.2-3 (jan. 2007), p. 540–552.
- [24] J. A. RHODES. "A concise proof of Kruskal's theorem on tensor decomposition". In : *Linear Algebra and its Applications* 432 (2010), p. 1818–1824.
- [25] J. ALEXANDER et A. HIRSCHOWITZ. "Polynomial interpolation in several variables". In : *J. Alg. Geom.* 4.2 (1995), p. 201–222.
- [26] R. MIRANDA. "Linear Systems of Plane Curves". In : *Notices of the AMS* 46.2 (fév. 1999), p. 192–202.
- [27] L. H. LIM. "Tensors and hypermatrices". In : *Handbook of Linear Algebra*. Sous la dir. de L. HOGBEN. 2nd Ed. Boca Raton, FL : CRC Press, 2013. Chap. 15, p. 15.1–15.29.
- [28] L. CHIANTINI, G. OTTAVIANI et N. VANNIEUWENHOVEN. "An algorithm for Generic and low-Rank Specific Identifiability of Complex Tensors". In : *SIAM J. matrix Ana. Appl.* 35.4 (2014), p. 1265–1287.
- [29] L. DE LATHAUWER. "A Link between Canonical Decomposition in Multilinear Algebra and Simultaneous Matrix Diagonalization". In : *SIAM Journal on Matrix Analysis* 28.3 (2006), p. 642–666.
- [30] P. COMON et B. MOURRAIN. "Decomposition of quantics in sums of powers of linear forms". In : *Signal Processing, Elsevier* 53.2 (sept. 1996). special issue on High-Order Statistics, p. 93–107.
- [31] A. SCHÖNHAGE. "Partial and Total Matrix Multiplication". In : *SIAM J. Computation* 10 (1981), p. 434–455.
- [32] J. LANDSBERG. "Geometry and the complexity of matrix multiplication". In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 45.2 (avr. 2008), p. 247–284.
- [33] L. R. TUCKER. "Some Mathematical Notes for Three-Mode Factor Analysis". In : *Psychometrika* 31 (1966), p. 279–311.
- [34] L. DE LATHAUWER, B. DE MOOR et J. VANDEWALLE. "A Multilinear Singular Value Decomposition". In : *SIAM Jour. Matrix Ana. Appl.* 21.4 (avr. 2000), p. 1253–1278.
- [35] J. COHEN et U. ROTHBLUM. "Nonnegative ranks, decompositions and factorizations of nonnegative matrices". In : *Lin. Alg. Appl.* 190 (1993), p. 149–168.

- [36] E. BALLICO. “Tensor ranks and symmetric tensor ranks are the same for points with low symmetric tensor rank”. In : *Archiv der Mathematik* 96.6 (juin 2011), p. 531–534.
- [37] S. FRIEDLAND. “Remarks on the Symmetric Rank of Symmetric Tensors”. In : *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 37.1 (2016), p. 320–337. DOI : <https://doi.org/10.1137/15M1022653>.
- [38] X. ZHANG, Z-H. HUANG et L. QI. “Comon’s Conjecture, Rank Decomposition, and Symmetric Rank Decomposition of Symmetric Tensors”. In : *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 37.4 (2016), p. 1719–1728. DOI : doi.org/10.1137/141001470.
- [39] T. G. KOLDA. “Orthogonal Tensor Decomposition”. In : *SIAM Jour. Matrix Ana. Appl.* 23.1 (2001), p. 243–255.
- [40] Y. YANG. “The Epsilon-Alternating Least Squares for Orthogonal Low-Rank Tensor Approximation and Its Global Convergence”. In : *SIAM Jour. Matrix Ana. Appl.* 41.4 (2020), p. 1797–1825.
- [41] C. ZENG. *Rank properties and computational methods for orthogonal tensor decompositions*. arxiv :2103.07053. Mar. 2021.
- [42] I. V. OSELEDETS, D. V. SAVOSTYANOV et E. E. TYRTYSHNIKOV. “Tucker dimensionality reduction of three-dimensional arrays in linear time”. In : *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 30.3 (2008), p. 939–956.
- [43] S. MIRON et al. “Tensor methods for multisensor signal processing”. In : *IET Signal Processing* 14.10 (déc. 2020). hal-03024673, p. 693–709.
- [44] L. GRASEDYCK, D. KRESSNER et C. TOBLER. “A Literature survey of Low-Rank Tensor Approximation techniques”. In : *GAMM Mitteilungen* 36.1 (août 2013), p. 53–78. DOI : [10.1002/gamm.201310004](https://doi.org/10.1002/gamm.201310004).
- [45] P. COMON et al. “Generic and Typical Ranks of Multi-Way Arrays”. In : *Linear Algebra Appl.* 430.11–12 (juin 2009). hal-00410058, p. 2997–3007.
- [46] P. COMON. “Independent Component Analysis, a new concept?” In : *Signal Processing, Elsevier* 36.3 (avr. 1994). Special issue on Higher-Order Statistics. hal-00417283, p. 287–314.
- [47] P. COMON. “Tensor Diagonalization, A useful Tool in Signal Processing”. In : *IFAC-SYSID, 10th IFAC Symposium on System Identification*. Sous la dir. de M. BLANKE et T. SODERSTROM. T. 1. hal-00561523. Copenhagen, Denmark, juil. 1994, p. 77–82.
- [48] C. D. M. MARTIN et C. van LOAN. “A Jacobi-Type Method for Computing Orthogonal Tensor decompositions”. In : *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 30.3 (2008), p. 1219–1232.
- [49] A. Pereira da SILVA, P. COMON et A. Lima Ferrer de ALMEIDA. “A finite algorithm to compute rank-1 tensor approximations”. In : *IEEE Sig. Proc. Letters* 23.7 (juil. 2016). hal-01385538, p. 959–963.
- [50] N. VANNIEUWENHOVEN, R. VANDEBRIL et K. MEERBERGEN. “A new truncation strategy for the higher-order singular value decomposition”. In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 34.2 (2012), A1027–A1052.
- [51] J. NIE et L. WANG. “Semidefinite relaxations for best rank-1 tensor approximations”. In : *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 35.3 (2014), p. 1155–1179.
- [52] Y. YANG et al. “Rank-1 Tensor Properties with Applications to a Class of Tensor Optimization Problems”. In : *SIAM Journal on Optimization* 26.1 (2016), p. 171–196.
- [53] T. ZHANG et G. H. GOLUB. “Rank-one approximation to high-order tensors”. In : *SIAM Jour. Matrix Ana. Appl.* 23.2 (2001), p. 534–550.

- [54] V. De SILVA et L-H. LIM. "Tensor rank and the ill-posedness of the best low-rank approximation problem". In : *SIAM Journal on Matrix Analysis Appl.* 30.3 (2008), p. 1084–1127.
- [55] L.-H. LIM et P. COMON. "Blind Multilinear identification". In : *IEEE Trans. Inf. Theory* 60.2 (fév. 2014). open access. hal-00763275, p. 1260–1280.
- [56] S. SAHNOUN et P. COMON. "Joint Source Estimation and Localization". In : *IEEE Trans. Sig. Proc.* 63.10 (mai 2015). hal-01005352, p. 2485–2495.
- [57] M. NAZIH, K. MINAOUI et P. COMON. "Using the Proximal Gradient and the Accelerated Proximal Gradient as Canonical Polyadic tensor decomposition Algorithms in difficult situations". In : *Signal Processing* 171 (juin 2020). hal-02433477. doi : doi.org/10.1016/j.sigpro.2020.107472.
- [58] L-H. LIM et P. COMON. "Nonnegative approximations of nonnegative tensors". In : *Jour. Chemometrics* 23 (août 2009). hal-00410056, p. 432–441.
- [59] Y. QI, P. COMON et L. H. LIM. "Uniqueness of nonnegative tensor approximations". In : *IEEE Trans. Inf. Theory* 62.4 (avr. 2016). arXiv :1410.8129, p. 2170–2183. doi : 10.1109/TIT.2016.2532906.
- [60] P. COMON et M. RAJIB. "Blind Identification of Under-Determined Mixtures based on the Characteristic Function". In : *Signal Processing* 86.9 (sept. 2006). Sous la dir. d'ELSEVIER. hal-00263668, p. 2271–2281.
- [61] A. YEREDOR. "Blind source separation via the second characteristic function". In : *Signal Processing* 80 (2000), p. 897–902.
- [62] A. YEREDOR. "Blind Channel Estimation Using First and Second Derivatives of the Characteristic Function". In : *IEEE Signal Processing Letters* 9.3 (mar. 2002), p. 100–103.
- [63] X. LUCIANI, A. L. F. de ALMEIDA et P. COMON. "Blind Identification of Underdetermined Mixtures Based on the Characteristic Function : The Complex Case". In : *IEEE Trans. Signal Proc.* 59.2 (fév. 2011). hal-00537838, p. 540–553.
- [64] P. COMON. "Contrasts, Independent Component Analysis, and Blind Deconvolution". In : *Int. Journal Adapt. Control Sig. Proc.* 18.3 (avr. 2004). Sous la dir. de WILEY, p. 225–243.
- [65] L. ALBERA et al. "ICAR, a Tool for Blind Source Separation using Fourth Order Statistics only". In : *IEEE Trans. Sig. Proc.* 53.10 (oct. 2005). hal-00743890, p. 3633–3643.
- [66] L. ALBERA et al. "Blind Identification of Overcomplete Mixtures of Sources (BIOME)". In : *Lin. Algebra Appl.* 391 (nov. 2004). Sous la dir. d'ELSEVIER. hal-00536010, p. 1–30.
- [67] L. D. GARCIA, M. STILLMAN et B. STURMFELS. "Algebraic geometry of Bayesian networks". In : *J. Symbolic Comput.* 39.3-4 (avr. 2005), p. 331–355.
- [68] A. SHASHUA et T. HAZAN. "Non-negative tensor factorization with applications to statistics and computer vision". In : *ICML'05*. T. 22. 792–799, août 2005.
- [69] M. I. JORDAN. "Graphical Models". In : *Statistical Science* 19.1 (fév. 2004), p. 140–155.
- [70] A. ANANDKUMAR et al. "Tensor Decompositions for Learning Latent Variable Models". In : *J. Machine Learning Research* 15 (août 2014), p. 2773–2832.
- [71] D. BLEI, A. Y. NG et M. I JORDAN. "Latent Dirichlet Allocation". In : *Machine Learning Research* 3 (2003), p. 993–1022.
- [72] J. E. COHEN, R. CABRAL-FARIAS et P. COMON. "Fast Decomposition of Large Nonnegative Tensors". In : *IEEE Sig. Proc. Letters* 22.7 (juil. 2015). hal-01069069, p. 862–866.

- [73] M. RUFFINI, M. CASANELLAS et R. GAVALDA. "A new method of moments for latent variable models". In : *Machine Learning* (2018), p. 1431–1455.
- [74] R. BRO. "Review of Multiway Analysis in Chemistry – 2000-2005". In : *Critical reviews in Analytical Chemistry* 36 (2006). Sous la dir. de Taylor & FRANCIS, p. 279–293.
- [75] J.-P. ROYER et al. "A Regularized NonNegative Canonical Polyadic Decomposition algorithm with preprocessing for 3D Fluorescence Spectroscopy". In : *Jour. Chemometrics* 29.4 (avr. 2015). hal-01126693, p. 253–265.
- [76] C. M. ANDERSEN et R. BRO. "Practical aspects of Parafac modelling of fluorescence excitation-emission data". In : *J. Chemometrics* 17 (2003), p. 200–215.
- [77] J. E. COHEN, P. COMON et X. LUCIANI. "Correcting inner filter effects, a non Multilinear Tensor Decomposition Method". In : *Chemometrics Intel. Lab. Syst.* 150 (jan. 2016). hal-01158152, p. 29–40.
- [78] R. CABRAL-FARIAS, P. COMON et R. REDON. "Data Mining by NonNegative Tensor Approximation". In : *IEEE MLSP*. hal-01077801. Reims, France, sept. 2014.
- [79] M. VEGANZONES et al. "Nonnegative Tensor CP Decomposition of Hyperspectral Data". In : *IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing* 54.5 (mai 2016), p. 2577–2588.
- [80] M. A. VEGANZONES et al. "Nonnegative CP decomposition of multiangle hyperspectral data : a case study on CRISM observations of martian icy surface". In : *IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing : Evolution in Remote Sensing (WHISPERS 2016)*. hal-01382360. Los Angeles, août 2016, p. 420–424.
- [81] Y. XU et al. "Nonlocal Coupled Tensor CP Decomposition for Hyperspectral and Multispectral Image Fusion". In : *IEEE Trans. Geoscience Remote Sensing* 58.1 (jan. 2020). hal-02123922, p. 348–362.
- [82] N. D. SIDIROPOULOS, R. BRO et G. B. GIANNAKIS. "Parallel Factor Analysis in Sensor Array Processing". In : *IEEE Trans. Sig. Proc.* 48.8 (août 2000), p. 2377–2388.
- [83] F. RAIMONDI et al. "Wideband multiple diversity tensor array processing". In : *IEEE Trans. Sig. Proc.* 65 (20 oct. 2017). hal-01350549, p. 5334–5346.
- [84] H. BECKER et al. "Multi-way Space-Time-WaveVector analysis for EEG source separation". In : *Signal Processing* 92.4 (avr. 2012). hal-00683304, p. 1021–1031.
- [85] T. G. KOLDA et B. W. BADER. "Tensor decompositions and applications". In : *SIAM Review* 51.3 (sept. 2009), p. 455–500.
- [86] P. COMON. "Tensors vs matrices, usefulness and unexpected properties". In : *15th IEEE Workshop on Statistical Signal Processing (SSP'09)*. keynote. hal-00417258. Cardiff, UK, sept. 2009, p. 781–788.
- [87] V. STRASSEN. "Rank and Optimal Computation of Generic Tensors". In : *Linear Algebra Appl.* 52 (juil. 1983), p. 645–685.
- [88] A. STEGEMAN et P. COMON. "Subtracting a best rank-1 approximation does not necessarily decrease tensor rank". In : *EUSIPCO'09*. hal-00435877. Glasgow, Scotland, août 2009.

À lire également dans nos bases

- [A125] G. CHATELET, Calcul tensoriel. *Techniques de l'Ingénieur*, nov. 1982.
- [A1210] H. LANCHON-DUCAUQUIS, Les tenseurs et leurs applications. *Techniques de l'Ingénieur*, mai 1989.

Logiciels

- [L1] H.BECKER et al. "Brain source IMaging Algorithms (BIMA)". Logiciel de localisation de sources cérébrales distribués, IDDN.FR.001.200011.000.S.P.2016.000.31230. Mai 2016.

Brevets

- [B1] P. COMON. "Method and device for blind equalization of a communication channel". Patent no 9806709, registered for Eurecom Institute. Mai 1998.
- [B2] L. ALBERA et al. "Procédé d'identification et de séparation autodidacte de mélanges de sources aux ordres supérieurs - Method for High-Order Blind Identification of Mixtures of Sources". patent registered for Thales Communications, FR 03.04041. US extension US2004-0260522A1, Dec. 23, 2004. Avr. 2003.

Sites Internet

N-way toolbox : <http://www.models.kvl.dk/algorithms>
Tensor Toolbox : <https://www.kolda.net>
Tensor package : <http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~pierre.comon>
Three-mode company : <http://three-mode.leidenuniv.nl/>